

TRANSFERENCIA DE CALOR APLICADA A LA INGENIERÍA

Welty

ACERCA DEL AUTOR:

Profesor y jefe del departamento de Ingeniería Mecánica en la Universidad Estatal de Oregon, **James R. Welty** obtuvo, además, su doctorado en Ingeniería Química en la Universidad Estatal de Oregon.

TEMAS QUE TRATA LA OBRA:

- * Conceptos básicos de la transferencia de calor
- * Las ecuaciones para el análisis de transferencia de calor
- * Formulación numérica de las ecuaciones de transferencia de calor
- * Transferencia de calor por conducción
- * Transferencia de calor por convección
- * Transferencia de calor por radiación
- * Equipo para la transferencia de calor
- * Propiedades de los materiales
- * Gráficas para la solución de problemas de conducción transitoria
- * La función error
- * Emisividades totales normales de varias superficies
- * Funciones de radiación de Planck
- * Tubos estándar y calibres de tubos
- * Problemas

**TRANSFERENCIA
DE CALOR
APLICADA A LA
INGENIERÍA**

INSTITUTO
NACIONAL DE
DE CALIDAD
TRANSACCIONES

TRANSFERENCIA DE CALOR APLICADA A LA INGENIERÍA

JAMES R. WELTY

*Departamento de Ingeniería Mecánica,
Universidad Estatal de Oregon,
Corvallis*



LIMUSA

NORIEGA EDITORES

MÉXICO • España • Venezuela • Colombia

VERSIÓN AUTORIZADA EN ESPAÑOL DE LA OBRA
PUBLICADA EN INGLÉS CON EL TÍTULO:
ENGINEERING HEAT TRANSFER
© JOHN WILEY & SONS, INC.

COLABORADOR EN LA TRADUCCIÓN:
SERGIO FERNÁNDEZ EVERST
INGENIERO DE SISTEMAS DE IBM DE MÉXICO.

REVISIÓN:
GERARDO HIRIART LE BERT
DOCTOR EN INGENIERÍA NAVAL. POSTGRADUATE
SCHOOL, CALIFORNIA. PROFESOR DE LA FA-
CULTAD DE INGENIERÍA DE LA UNIVERSIDAD
NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.

JOSÉ LUIS FERNÁNDEZ ZAYAS
DOCTOR EN INGENIERÍA DE LA UNIVERSIDAD DE
BRISTOL, INGLATERRA. PROFESOR INVESTIGADOR
DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA DE LA UNIVER-
SIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.

LA PRESENTACIÓN Y DISPOSICIÓN EN CONJUNTO DE
**TRANSFERENCIA DE CALOR
APLICADA A LA INGENIERÍA**

SON PROPIEDAD DEL EDITOR. NINGUNA PARTE DE
ESTA OBRA PUEDE SER REPRODUCIDA O TRANS-
MITIDA, MEDIANTE NINGÚN SISTEMA O MÉTODO, ELEC-
TRÓNICO O MECÁNICO (INCLUYENDO EL FOTOCOPIADO,
LA GRABACIÓN O CUALQUIER SISTEMA DE RECUE-
PERACIÓN Y ALMACENAMIENTO DE INFORMACIÓN), SIN
CONSENTIMIENTO POR ESCRITO DEL EDITOR.

DERECHOS RESERVADOS:

© 1996, EDITORIAL LIMUSA, S.A. DE C.V.
GRUPO NORIEGA EDITORES
BALDERAS 95, MÉXICO, D.F.
C.P. 06040
☎ 521-21-05
📠 512-29-03

CANIEM NÚM. 121

SÉPTIMA REIMPRESIÓN

HECHO EN MÉXICO
ISBN 968-18-0628-X

TJ 265
W 452
1996
Ej. 14

SEP	INSTIT	SEIT
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE		
MINATITLAN		
CENTRO DE INFORMACION		
NO. DE ADQUISICION	025016	
NO. DE CLASIFICACION		
NO. CUTTERS		
NO. EJEMPLARES	14	
VOLUMENES		
FECHA	octubre-98	
AREA		

Prólogo



0 2 5 0 1 6 - 1 4



INSTITUTO TECNOLÓGICO DE MINATITLAN
CENTRO DE INFORMACION

En los últimos veinte años se han publicado muchos libros de texto relacionados con la transferencia de calor. En cada caso es indudable que el autor o autores han pensado que la aparición de su(s) obra(s) sobre la materia ofrecía(n) algo nuevo o especial a los estudiantes interesados en esta importante área. En el mismo campo de la transferencia de calor ha habido avances considerables durante este período; se han editado muchas publicaciones con información adicional sobre la materia y se han desarrollado nuevas técnicas para la solución de problemas.

Cada profesor a nivel universitario elabora un plan de enseñanza y organiza el material de la materia en la manera que, de acuerdo con su experiencia, considera que da los mejores resultados. Este texto representa el enfoque y la organización que me parecieron mejores de los que apliqué al impartir mi cátedra en un período de quince años.

Se supone que un estudiante que ha terminado un curso de transferencia de calor a primer o segundo nivel debe comprender los fenómenos físicos implicados y tener cierta habilidad para formular y resolver problemas típicos que se encuentran en el medio. En este texto se enfatizan tanto la comprensión básica de la materia como la solución a los problemas.

En esta obra se hace énfasis en los aspectos fundamentales de la transferencia del calor. No se ha intentado profundizar en forma exhaustiva con relación a los desarrollos más avanzados y la investigación más reciente en el medio. Las aplicaciones modernas de los análisis de transferencia de calor son numerosas. Gracias a las industrias nuclear, electrónica y espacial se han logrado avances significativos en el campo de la transferencia de calor; la transferencia de calor es de importancia vital en muchas aplicaciones para el

VI PROLOGO

mejoramiento ambiental; el tubo de calor promete ser uno de los logros tecnológicos más importantes en los últimos cincuenta años. Todo autor que profundiza en estos campos de aplicaciones, difícilmente puede saber cuándo detenerse. En consecuencia, para evitar ser considerado una persona que deja el trabajo "a medias", decidí no empezar del todo. Las ideas básicas presentadas en este texto, junto con la comprensión de las técnicas estudiadas para la solución y la habilidad para aplicarlas, deben proporcionar a cualquier ingeniero bases suficientes y una serie de métodos adecuados para enfocar áreas nuevas y a veces complejas del análisis.

Este texto incluye un capítulo completo relativo a la formulación numérica de los problemas de transferencia de calor. Probablemente la característica más sobresaliente de esta obra es el trabajo numérico desarrollado y las aplicaciones del análisis numérico a la transferencia de calor. En los casos en que las técnicas son apropiadas, se proporcionan soluciones numéricas que incluyen diagramas de flujo, ejemplos de programas FORTRAN y listados de computador. En la actualidad el computador digital se usa ampliamente para resolver problemas que antes se resolvían a mano. En este libro se omiten las soluciones complicadas que tradicionalmente se incluyen en textos relativos a la transferencia de calor; un ejemplo de este tipo de omisiones es la técnica de la "relajación" que se convierte en aplicación rutinaria del análisis numérico. El capítulo que trata la formulación numérica se puede omitir al igual que los problemas de ejemplo resueltos numéricamente para un curso determinado, aunque es probable que en la práctica algunos ingenieros empleen estas técnicas. El propósito de presentar los procedimientos numéricos en este texto es desarrollar un vocabulario y la comprensión suficiente para que un ingeniero elabore programas sencillos y pueda intercambiar ideas con aquellas personas que elaboran o emplean programas más complicados.

En los problemas relativos a la conducción de calor se emplean con mucha facilidad soluciones numéricas. La mayoría de los problemas de ejemplos resueltos en forma numérica aparecen en el capítulo 4 que se refiere a la transferencia de calor por conducción. En el capítulo 6 se resuelve un problema relativo a la radiación; no se resuelven problemas numéricos relativos a la convección. La razón de este desequilibrio aparente en el estudio de la materia se debe a la complejidad tanto de la formulación como de los programas de computador necesarios para resolver problemas reales en estos casos. Aunque se emplean soluciones numéricas en estas áreas que son de extrema importancia, éstas no se estudian en esta obra.

Escribir un libro de texto requiere determinada selección de material y llegar a un acuerdo razonable en relación al nivel de

profundidad. El autor seleccionó el material que consideró más apropiado. Se espera que quien utilice este libro comprenda y domine las matemáticas hasta el nivel de ecuaciones diferenciales. Además, es conveniente que tenga algunos conocimientos de termodinámica al igual que cierta familiaridad con los conceptos básicos de la mecánica de los fluidos. Al principio del capítulo 5 se presenta material relativo al flujo de fluidos con relación a la transferencia de calor por convección.

En la preparación de este libro colaboraron muchas personas. Y las numerosas conversaciones con colegas y estudiantes graduados me permitieron desarrollar ideas relativas al material que sería más conveniente incluir, así como la mejor forma de presentar determinados temas. Agradezco en forma especial al Dr. Donald S. Trent y al Sr. David P. Slack su valiosa ayuda e ideas relativas a los análisis numéricos.

Vaya también mi agradecimiento a mi esposa Janet y a mis hijos Mark, Stephen, Dana, Jim y Tracey por lo que me apoyaron y me animaron durante el tiempo que dediqué a la preparación de este libro.

Finalmente, deseo agradecer al personal editorial de John Wiley & Sons, y en especial a los Sres. Al Beckett, Gene Davenport y Gary Brahms por su apoyo y confianza continua.

Corvallis, Oregón

JAMES R. WELTY

...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...

...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...

...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...

...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...

...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...

Contenido

Capítulo 1 Conceptos básicos de la transferencia de calor	1
1.1 CONDUCCION, 1	
1.2 CONVECCIÓN, 11	
1.3 RADIACION TERMICA, 14	
1.4 MECANISMOS COMBINADOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR, 14	
1.5 CONCLUSIONES, 18	
Capítulo 2 Las ecuaciones para el análisis de transferencia de calor	21
2.1 LEYES BASICAS DEL ANALISIS DE TRANSFERENCIA DE CALOR, 21	
2.1-1 Formulación de mosaico de las leyes básicas, 22	
2.1-2 Formulación integral de las leyes básicas, 26	
2.1-3 Formulación diferencial de las leyes básicas, 31	
2.2 CONCLUSIONES, 38	
Capítulo 3 Formulación numérica de las ecuaciones de transferencia de calor	41
3.1 CONSIDERACIONES FUNDAMENTALES DE LA FORMULACION NUMERICA, 41	
3.1-1 Representación por diferencia finita de las derivadas, 44	
3.1-2 Formulación de ecuación de diferencia usando métodos de diferencias, 45	
3.1-3 Formulación de ecuación de diferencia usando el método de balance del calor, 49	
3.2 PATRONES DE COMPUTACION PARA PROBLEMAS FORMULADOS NUMERICAMENTE, 52	
3.2-1 La técnica de eliminación de Gauss, 54	
3.2-2 La técnica de iteración de Gauss-Seidel, 59	

X CONTENIDO

3.3 CONSIDERACIONES ADICIONALES INVOLUCRANDO SOLUCIONES NUMERICAS, 65

3.4 CONCLUSIONES, 68

Capítulo 4 Transferencia de calor por conducción

71

4.1 CONDUCCION DE ESTADO ESTABLE, 71

4.1-1 Sistemas unidimensionales sin generación térmica, 72

4.1-2 Conducción unidimensional de calor de estado estable con generación térmica interna, 81

4.1-3 Transferencia de calor desde superficies extendidas, 84

4.1-4 Conducción de calor en estado estable en dos y tres dimensiones, 94

4.2 CONDUCCION DE CALOR EN ESTADO NO ESTABLE, 121

4.2-1 Conducción de calor transitorio en sistemas unidimensionales sin generación térmica, 122

4.2-2 Conducción transitorio bi y tridimensional, 134

4.2-3 Conducción transitorio unidimensional en una pared semi-infinita, 142

4.2-4 Conducción transitorio de calor; análisis numérico y gráfico, 150

4.3 CONCLUSIONES, 179

Capítulo 5 Transferencia de calor por convección

181

5.1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES EN LA TRANSFERENCIA POR CONVECCIÓN, 181

5.1-1 Consideraciones de flujo de fluidos, 181

5.1-2 Flujo combinado de fluidos—consideraciones de energía, 212

5.2 CONVECCION NATURAL: CONSIDERACIONES TEORICAS Y EXPERIMENTALES, 247

5.2-1 Convección en fluidos adyacentes a una pared vertical plana sencilla, 247

5.2-2 Convección natural en canales verticales, 252

5.2-3 Convección natural para superficies horizontales, 258

5.2-4 Expresiones simplificadas para la convección natural en el aire, 264

5.3 CONVECCION FORZADA: CONSIDERACIONES TEORICAS Y EMPIRICAS, 266

5.3-1 Convección forzada en el flujo interno, 267

5.3-2 Convección forzada para flujo externo, 277

5.4 TRANSFERENCIA DE CALOR CON UN CAMBIO DE FASE, 288

5.4-1 Transferencia de calor en ebullición, 288

5.4-2 Transferencia de calor con vapores en condensación, 295

5.5 CONCLUSIONES, 304

Capítulo 6 Transferencia de calor por radiación

307

6.1 RADIACION DESDE SUPERFICIES IDEALES (NEGRAS), 309

6.1-1 Intensidad de radiación de un cuerpo negro, 311

6.1-2 Potencia de emisión de un cuerpo negro, 312

6.1-3 Potencia de emisión espectral hemisférica de superficies negras, 312

6.1-4 Distribución espectral de la potencia de emisión de un cuerpo negro; ley de Planck, 314

6.1-5 Intensidad total y potencia de emisión de un cuerpo negro, 316

6.1-6 Potencia de emisión del cuerpo negro dentro de una banda de longitud de onda, 317

6.2 RADIACION DESDE SUPERFICIES NO NEGRAS, 319

6.2-1 Emisividad, 319

6.2-2 Absortividad, 324

6.2-3 Reflectividad, 330

6.3 PROPIEDADES RADIATIVAS PARA LAS SUPERFICIES REALES, 331

6.3-1 Variación direccional de la emisión radiante, 331

6.3-2 Variación en la longitud de onda de la emisión superficial, 334

6.3-3 Variación en la emisión con la temperatura superficial, 335

6.3-4 Efectos de la rugosidad superficial, 335

6.3-5 Los efectos de las impurezas superficiales, 336

6.3-6 Comportamiento de las superficies reales en general, 337

6.4 INTERCAMBIO DE ENERGIA RADIANTE ENTRE SUPERFICIES NEGRAS ISOTERMICAS, 337

6.4-1 Intercambio radiante entre elementos de área de extensión diferencial, 337

6.4-2 Intercambio radiante entre elementos de área de extensión finita, 342

6.4-3 Algebra del factor de vista, 345

6.4-4 Reciprocidad especial, 354

6.4-5 Determinación del factor de vista para superficies elongadas: el método de hilos cruzados de Hottel, 357

6.4-6 Radiación entre superficies negras; analogía de la red eléctrica, 359

XII CONTENIDO

- 6.4-7 Radiación entre superficies negras con superficies en presencia de superficies rerradiantes no conductoras, 360
- 6.5 INTERCAMBIO DE ENERGIA RADIANTE ENTRE SUPERFICIES GRISES ISOTERMICAS, 362
 - 6.5-1 Radiosidad e irradiación, 362
 - 6.5-2 Intercambio radiante entre superficies grises infinitas, paralelas, isothermas, 364
 - 6.5-3 Intercambio radiante entre superficies grises isotérmicas paralelas, finitas, 366
 - 6.5-4 Intercambio radiante entre superficies grises isotérmicas: el enfoque de la analogía eléctrica, 366
 - 6.5-5 Intercambio de energía radiante entre superficies grises: solución numérica, 374
- 6.6 INTERCAMBIO DE ENERGIA RADIANTE EN PRESENCIA DE GASES ABSORBENTES Y RERRADIANTES, 383
 - 6.6-1 Absorción monocromática y transmisión a través de una capa de gas, 386
 - 6.6-2 Aproximaciones de gas gris para H_2O y CO_2 , 387
 - 6.6-3 Intercambio radiante entre gases absorbentes y una superficie negra, 389
- 6.7 EL COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE CALOR POR RADIACION, 392
- 6.8 CONCLUSIONES, 393

Capítulo 7 Equipo para la transferencia de calor 395

- 7.1 CLASIFICACIÓN DEL INTERCAMBIADOR DE CALOR, 396
- 7.2 ANALISIS DEL INTERCAMBIADOR DE CALOR DE UN SOLO PASO, 399
 - 7.2-1 Análisis del intercambiador de calor de un solo paso de doble tubo en flujo cruzado, 401
- 7.3 ANALISIS DEL INTERCAMBIADOR DE CALOR DE CORAZA Y TUBO Y DE FLUJO CRUZADO, 407
- 7.4 METODO DE NUMERO DE UNIDADES DE TRANSFERENCIA (NUT) PARA EL DISEÑO Y ANALISIS DE UN INTERCAMBIADOR DE CALOR, 413
 - 7.4-1 Efectividad del intercambiador de calor, 414
- 7.5 CONSIDERACIONES ADICIONALES EN EL ANALISIS Y DISEÑO DE INTERCAMBIADORES DE CALOR, 423
 - 7.5-1 Ensuciamiento de un intercambiador de calor, 423
- 7.6 CONCLUSIONES, 425

Apéndice A Propiedades de los materiales	427
A-1 PROPIEDADES FISICAS DE LOS SOLIDOS, 427	
A-2 PROPIEDADES FISICAS DE LOS LIQUIDOS, 429	
A-3 PROPIEDADES FISICAS DE LOS GASES, 438	
Apéndice B Gráficas para la solución de problemas de conducción transitoria	448
Apéndice C La función error	461
Apéndice D Emisividades totales normales de varias superficies	462
Apéndice E Funciones de radiación de Planck	466
Apéndice F Tubos estándar y calibres de tubos	468
F-1 TAMAÑOS ESTANDAR DE TUBOS, 468	
F-2 CALIBRES ESTANDAR DE LA TUBERIA, 471	
Problemas	473
Indice	539

**TRANSFERENCIA
DE CALOR
APLICADA A LA
INGENIERÍA**

TRANSMISSION
OF DATA
APPLICABLE TO
RESEARCH

Conceptos básicos en la transferencia del calor

En este capítulo se estudian los modos de transferencia de calor al igual que las relaciones cuantitativas básicas necesarias para determinar las relaciones de transferencia de calor para cada modo.

Se puede definir la relación de transferencia de calor como el producto de una fuerza motriz por una conductancia térmica. Las fuerzas motrices y las conductancias térmicas (los recíprocos de las resistencias térmicas) varían para cada forma; en las siguientes secciones se estudiarán más detalladamente estas cantidades.

En este primer capítulo también se estudia cierta terminología relacionada al tema de la transferencia del calor. Ya que estos términos y símbolos se usarán en los siguientes capítulos, es necesario que se comprendan antes de seguir adelante.

1.1 CONDUCCION

La transferencia del calor por medio de la conducción se logra a través de dos mecanismos. El primero es la interacción molecular, en el cual las moléculas de niveles energéticos relativamente mayores (indicados por su temperatura) ceden energía a moléculas adyacentes en niveles inferiores. Este tipo de transferencia sucede en los sistemas que tienen moléculas de sólidos, líquidos o gases y en los que hay un gradiente de temperatura.

El segundo mecanismo de transferencia de calor por conducción es el de electrones "libres", los cuales se presentan principalmente en los sólidos metálicos puros. La concentración de electrones libres varía considerablemente para las aleaciones metálicas y es muy baja para los no metales. La facilidad que tienen los sólidos para conducir el calor varía directamente con la concentración de electrones libres;

en consecuencia, se espera que los metales puros sean los mejores conductores de calor, hecho confirmado por la experiencia.

Se ha mencionado que la conducción es principalmente un fenómeno molecular que requiere de un gradiente de temperatura como fuerza motriz. Se atribuye a Fourier¹ una expresión cuantitativa que relaciona el gradiente de temperatura con la naturaleza del medio conductor y la razón de la transferencia del calor; en 1822 presentó la relación

$$\frac{q_x}{A} = -k \frac{dT}{dx} \quad (1-1)$$

en que q_x es la razón de flujo de calor en la dirección de las x en Btu/hr; A es el área normal a la dirección del flujo de calor en ft²; dT/dx es el gradiente de temperatura en la dirección de las x en °F/ft; y k es la conductividad térmica, que tiene unidades de Btu/hr-°F-ft²/ft. A la relación q_x/A , que tiene unidades de Btu/hr-ft², se le llama el *flujo de calor* direccional en x . La expresión completa para el flujo de calor es

$$\frac{\mathbf{q}}{A} = -k \nabla T \quad (1-2)$$

en donde \mathbf{q} es el vector de flujo de calor y ∇T es el gradiente de temperatura en forma vectorial. El signo negativo es necesario en las ecuaciones (1-1) y (1-2) debido a que el flujo de calor por conducción sucede en la dirección de un gradiente de temperatura decreciente. Estas ecuaciones son respectivamente las formas escalar y vectorial de la ecuación de la relación de Fourier, conocida en ocasiones como la primera "ley" de Fourier de la conducción del calor.

De acuerdo con la ecuación de la relación de Fourier, el flujo de calor es proporcional al gradiente de temperatura, dicha proporcionalidad se representa mediante la conductividad térmica k . La conductividad térmica es una propiedad de un medio dado, y las ecuaciones (1-1) y (1-2) son las relaciones de definición de esta cantidad.

La conductividad térmica es una propiedad muy importante de un material o medio. En gran parte, el valor de la conductividad determina la adaptabilidad de un material para un uso determinado.

En la figura 1.1 se muestran valores de la conductividad térmica para varios materiales comunes. En esta figura se puede ver la dependencia de la temperatura en la conductividad térmica; también es posible llegar a ciertas conclusiones generales a este respecto.

¹ J. B. J. Fourier, "Théorie Analytique de la Chaleur," Gouthier-Villars, 1822; traducción al inglés por Freeman, Cambridge, 1878.

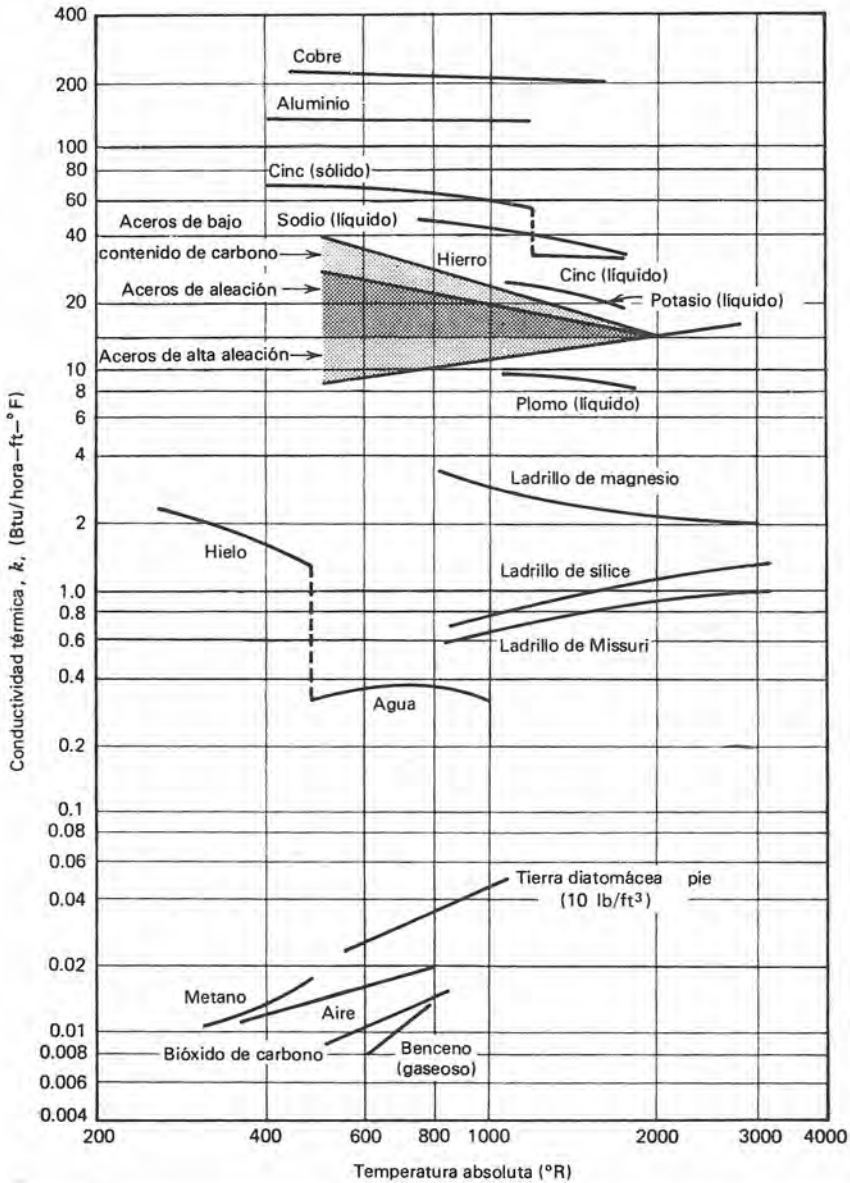


Figura 1.1 Variación en la conductividad térmica con la temperatura para distintos materiales. (De M. Jakob y B.A. Hawkins, *Elements of Heat Transfer* (Nueva York: McGraw-Hill Book Co, 1958), p. 23. Con permiso del editor.)

Para los gases, los valores de la conductividad térmica muestran un incremento con el aumento de la temperatura, lo que se debe a que la mayor agitación de las moléculas gaseosas a las temperaturas elevadas producen una mayor frecuencia de choque con el correspondiente aumento en las relaciones de intercambio molecular.

Se puede desarrollar gran cantidad de trabajo analítico en la predicción de la conductividad térmica de los gases monoatómicos diluidos. El lector puede consultar las obras de Bird, Stewart y Lightfoot² o Welty, Wicks y Wilson³, donde encontrará un enfoque general de la teoría cinética en el caso del gas monoatómico. Tomando la molécula de gas como una esfera rígida, la ecuación resultante para k es

$$k = \frac{1}{\pi^{3/2} d^2} \sqrt{\frac{\kappa^3 T}{m}} \quad (1-3)$$

en donde d es el diámetro molecular, κ es la constante de Boltzmann, T es la temperatura absoluta y m es la masa por molécula del medio gaseoso.

Esta ecuación predice que la conductividad térmica es función de la temperatura a la potencia $1/2$ e independiente de la presión. La dependencia de la temperatura es un poco débil comparada con los resultados experimentales; sin embargo, se ha encontrado correcta la independiencia de la presión hasta 10 atmósferas para la mayoría de los gases. Aunque son un poco burdos, no se deben considerar inútiles la ecuación (1-3) y el análisis sencillo que conduce a la misma, ya que el resultado es cualitativamente correcto y proporciona una base para predecir las variaciones de k con la temperatura y presión.

Para determinar la conductividad térmica, en la teoría de Chapman-Enskog⁴ se empleó un modelo más sofisticado de la fuerza intermolecular para un gas monoatómico. La ecuación de Chapman-Enskog es

$$k = \frac{1.9891 \times 10^{-4} \sqrt{T/M}}{\sigma^2 \Omega_k} \quad (1-4)$$

en donde k es la conductividad térmica en cal/cm-sec T es la temperatura absoluta en °K, M es el peso molecular y σ y Ω_k son los parámetros de Lennard-Jones asociados con el modelo de potencial de fuerza intermolecular de Lennard-Jones. En las referencias citadas

² R. B. Bird, W. E. Stewart, y E. N. Lightfoot, *Transport Phenomena* (Nueva York: John Wiley and Sons, Inc., 1960), cap. 8.

³ J. R. Welty, C. E. Wicks, y R. E. Wilson, *Fundamentals of Momentum, Heat and Mass Transfer* (Nueva York: John Wiley and Sons, Inc., 1969), cap. 15.

⁴ S. Chapman y T. G. Cowling, *Mathematical Theory of Non-uniform Gases* 2ª ed. (Cambridge: Cambridge University Press, 1951).

Tabla 1.1 Constantes críticas para los gases

Sustancia	Peso molecular	T_c (°K)	P_c (atm)	k_c (cal/sec-cm-°K)
Air	28.97	132	36.4	90.8
O ₂	32.00	154.4	49.7	105.3
N ₂	28.02	126.2	33.5	86.8
CO	28.01	133.0	34.5	86.5
CO ₂	44.01	304.2	72.9	122.0
NO	30.01	180.00	64.0	118.2
N ₂ O	44.02	309.7	71.7	131.0
Cl ₂	70.91	417.0	76.1	97.0
Ne	20.18	44.5	26.9	79.2
Ar	39.94	151.0	48.0	71.0
Kr	83.80	209.4	54.3	49.4
CH ₄	16.04	190.7	45.8	158.0

y en la publicación de Hirschfelder, Curtiss y Bird ⁵ se pueden obtener los valores de σ y Ω_k . Nuevamente, la ecuación (1-4) indica que k es independiente de la presión y que es función de T a la potencia $1/2$.

En las figuras 1.2 y 1.3 se incluye mucha información útil relacionada con la conductividad térmica a una temperatura y presión dadas. La figura 1.2 muestra la conductividad térmica reducida, $k_r = k/k_c$, que es la relación de la conductividad térmica bajo condiciones dadas al valor del punto crítico, en función de la temperatura reducida $T_r = T/T_c$, y presión reducida $P_r = P/P_c$. Esta gráfica se desarrolló para predecir las conductividades de los gases monoatómicos, aunque se puede emplear para determinar valores aproximados de k también para gases poliatómicos. En la tabla 1.1 aparecen los valores de k_c , T_c , y P_c para algunos de los gases más comunes.

En la figura 1.3, la función de conductividad térmica reducida k^* es la relación k/k^0 , la relación de la conductividad térmica a una temperatura y presión dadas a las correspondientes a la presión atmosférica y misma temperatura. De las dos, esta cifra puede ser más útil ya que es más fácil obtener k^0 que k_c . Igual como con la figura 1.2, se debe considerar que cualesquiera valores de k que se obtengan para los gases poliatómicos son solamente aproximaciones.

En el apéndice A-3 aparecen tabulados los valores de la conductividad térmica contra la temperatura para muchos gases de interés.

En los materiales sólidos y líquidos, a diferencia de los gases, la conductividad térmica es esencialmente independiente de la presión y

⁵ J. O. Hirschfelder, C. F. Curtiss, y R. B. Bird, *Molecular Theory of Gases and Liquids* (Nueva York: John Wiley and Sons, Inc., 1954).

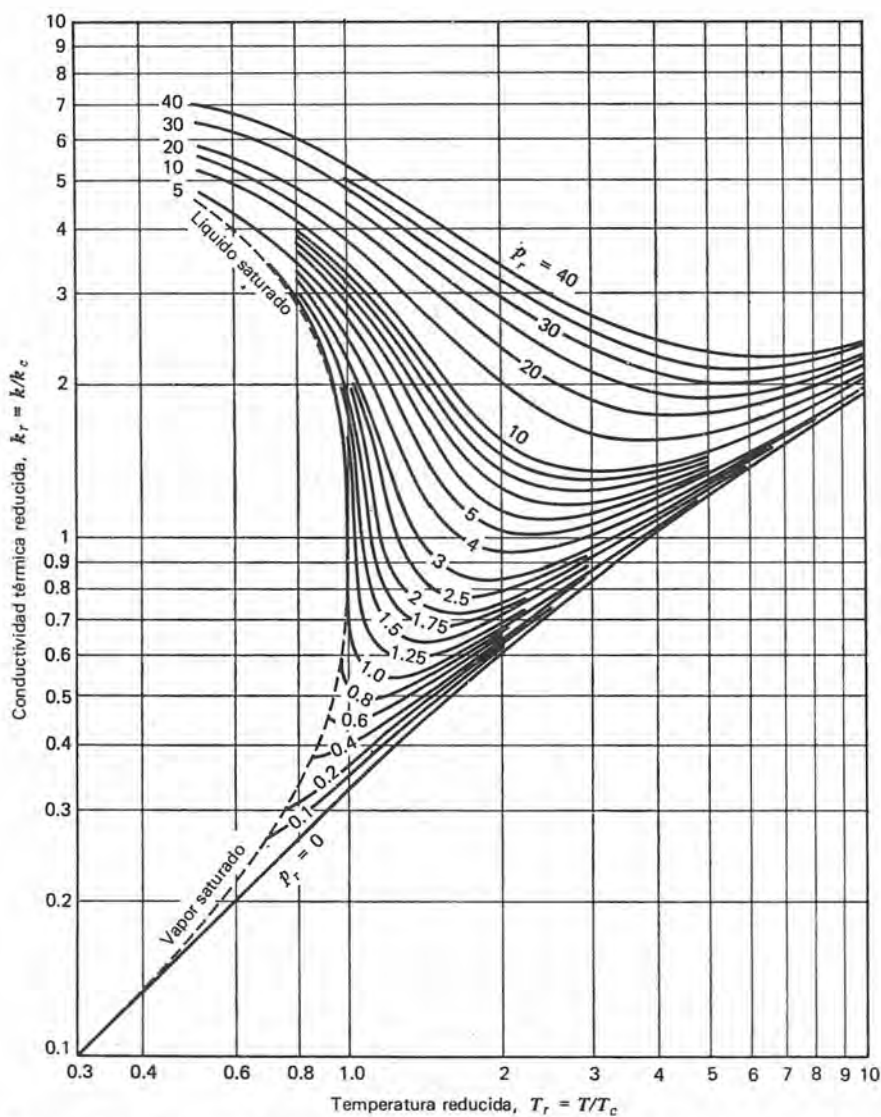


Figura 1.2 Conductividad térmica reducida en función de la temperatura y presión reducidas para gases monoatómicos. (De E. J. Owens y G. Thodos, *AIChE Journal* 3 (1958): 461. Con permiso del editor.)

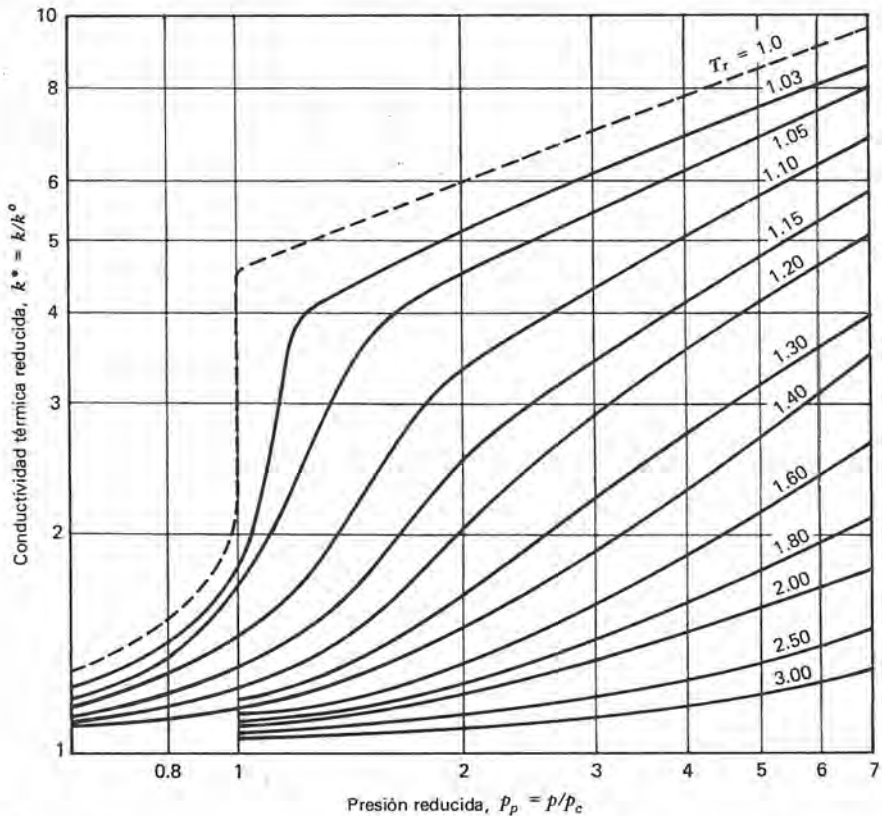


Figura 1.3 Conductancia térmica reducida en función de la temperatura y presión reducidas. (De H.J.N. Lenoir, W.A. Junk y E.W. Comings, *Chem. Engr. Progress* 49 (1953): 539. Con permiso del editor.)

mucho menos función de la temperatura. La figura 1.1 muestra la dependencia de la temperatura de distintos materiales líquidos y sólidos. En el apéndice A-1 aparecen tablas de valores de k para líquidos y sólidos.

Cabe hacer una mención especial relativa a la conductividad térmica de los metales puros. En estos materiales hay electrones libres que aumentan considerablemente las capacidades de conducción de calor y de conducción de corriente eléctrica. Son conocidas ya las propiedades de conducción eléctrica de los metales puros; y son las mismas características físicas que lo originan, las que también son responsables de que estos materiales sean los mejores conductores del calor. La tabla 1.2 nos da, en orden descendente, el rango general en la conductividad térmica para distintas categorías de conductores.

En el apéndice A-1 aparecen los valores de las conductividades térmicas de algunos materiales. Se debe dar énfasis al caso de la

Tabla 1.2 Valores de la conductividad térmica para distintas categorías de materiales

Medio	k (Btu/hr-ft-°F)
Metales puros	20–250
Aleaciones metálicas	10–100
Metales líquidos	5–50
Líquidos (no metálicos)	0.1–1.0
Sólidos no metálicos	0.01–10
Materiales aislantes	0.01–0.2
Gases	0.001–0.1

madera. Note que los valores de k paralelos y normales a la veta de la madera difieren bastante, por ejemplo para el roble difieren por un factor de 2. La madera es un buen ejemplo de un material *anisotrópico*, o sea aquel cuyas propiedades varían en distintas direcciones. Se llama *isotrópico* al medio cuyas propiedades no varían con la dirección.

Los siguientes ejemplos ilustran la aplicación de la ecuación de la relación de Fourier para resolver problemas sencillos de conducción de calor.

Ejemplo 1.1

La figura 1.4 ilustra el caso en que se transporta vapor por medio de un tubo de acero de 1-1/2-in y calibre 80, de acero suave. Las temperaturas de las paredes interior y exterior son 205°F y 195°F respectivamente. Encontrar

a) la pérdida de calor de 10 ft de tubo.

b) el flujo de calor en base a las áreas de las superficies interna y externa.

En este caso, el calor se transfiere radialmente, de aquí que la forma escalar aplicable de la ecuación de relación de Fourier es

$$q_r = -kA \frac{dT}{dr}$$

Tubo de acero número 80 de catálogo

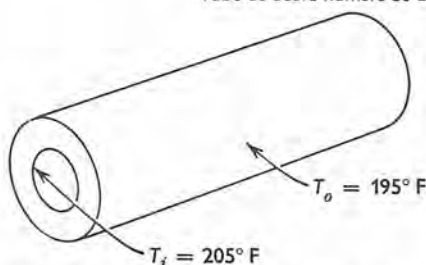


Figura 1.4 Conducción de calor radial estable a través de la pared de un tubo con temperaturas superficiales uniformes.

Tomando en cuenta que $A = 2\pi rL$, esta ecuación queda

$$q_r = -k(2\pi rL) \frac{dT}{dr}$$

Para el caso de estado estable (no hay dependencia del tiempo), q_r es constante. Entonces se pueden separar las variables de la ecuación anterior y resolver en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} q_r \int_{r_i}^{r_o} \frac{dr}{r} &= -2\pi kL \int_{T_i}^{T_o} dT \\ q_r \ln \frac{r_o}{r_i} &= -2\pi kL(T_o - T_i) = 2\pi kL(T_i - T_o) \\ q_r &= \frac{2\pi kL}{\ln \frac{r_o}{r_i}} (T_i - T_o) \end{aligned} \quad (1-5)$$

La ecuación (1-5) expresa la relación de flujo de calor radial estable en función de las propiedades geométricas y del material y la diferencia de temperatura en función de la fuerza motriz.

Del apéndice A-1 se tiene que k para el acero suave es igual a 24.8 Btu/hr·ft·°F y del apéndice F-1 se lee que para tubo de 1-1/2-in calibre 80, el diámetro exterior es de 1.900 in, diámetro interior igual a 1.500 in y espesor de pared = 0.200 in. Sustituyendo estos valores adecuadamente y resolviendo, se tiene

$$\begin{aligned} q_r &= \frac{2\pi(24.8 \text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}\cdot^\circ\text{F})(10 \text{ ft})(10^\circ\text{F})}{\ln \frac{1.900}{1.500}} \\ &= 65,000 \text{ Btu/hr} \end{aligned}$$

Las áreas de la superficie interior y exterior del tubo son

$$\begin{aligned} A_i &= \pi \left(\frac{1.500}{12} \text{ ft} \right) (10 \text{ ft}) = 3.93 \text{ ft}^2 \\ A_o &= \pi \left(\frac{1.900}{12} \text{ ft} \right) (10 \text{ ft}) = 4.98 \text{ ft}^2 \end{aligned}$$

En consecuencia, los flujos evaluados en ambas superficies son

$$\begin{aligned} \frac{q_r}{A_i} &= \frac{65,500}{3.93} = 16,700 \text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}^2 \\ \frac{q_r}{A_o} &= \frac{65,500}{4.98} = 13,150 \text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}^2 \end{aligned}$$

Los valores del flujo de calor obtenidos difieren en más de 25% para la misma relación de flujo. El lector debe notar la importancia de especificar el área en la que se fundamenta un determinado flujo de calor.

Ejemplo 1.2

Para la conducción de calor de estado estable a través de una pared plana con las dimensiones y temperaturas superficiales mostradas en la figura 1.5 expresar

- La razón del flujo de calor para una conductividad térmica constante k .
- la razón del flujo de calor cuando la conductividad térmica del material de la pared varía linealmente con la temperatura de acuerdo con la expresión

$$k = k_o(1 + \beta T)$$

Comparar el resultado obtenido en *b*) con el de *a*), si se utiliza un solo valor de K , evaluado en una temperatura media aritmética.

Para K constante, la forma de la ecuación de la relación de Fourier en la dirección de las x es

$$q_x = -kA \frac{dT}{dx}$$

Esta ecuación se puede separar y resolver fácilmente en la siguiente forma:

$$q_x \int_0^L dx = -kA \int_{T_0}^{T_L} dT$$

$$q_x L = -kA(T_L - T_0) = kA(T_0 - T_L)$$

$$q_x = \frac{kA}{L} (T_0 - T_L) \quad (1-6)$$

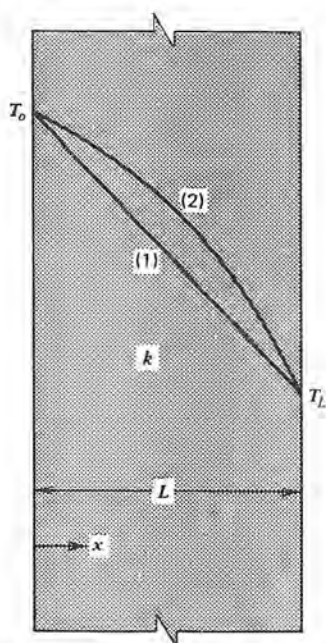


Figura 1.5 Condiciones para la conducción estable de calor a través de una pared plana con (1) k constante y (2) k una función lineal de la temperatura.

La ecuación (1-6) se aplica al caso de una pared plana. Al igual que en la ecuación (1-5) la relación de flujo de calor de estado estable se expresa en función de los efectos geométricos, propiedades materiales y la fuerza motriz, o sea la diferencia de la temperatura. Note que la expresión para una pared plana es relativamente sencilla comparada con la correspondiente a un cilindro hueco.

Para el caso de la conductividad térmica variable, la expresión dada de la K sustituida en la ecuación de la relación de Fourier es

$$q_x = -k_0(1 + \beta T)A \frac{dT}{dx}$$

Separando y despejando se tiene

$$\begin{aligned} q_x \int_0^L dx &= -k_0 A \int_{T_0}^{T_L} (1 + \beta T) dT \\ q_x L &= -k_0 A \left[T_L - T_0 + \frac{\beta}{2} (T_L^2 - T_0^2) \right] \\ q_x &= \frac{k_0 A}{L} \left[(T_0 - T_L) + \frac{\beta}{2} (T_0^2 - T_L^2) \right] \\ q_x &= \frac{A}{L} \left\{ k_0 \left[1 + \frac{\beta}{2} (T_0 + T_L) \right] \right\} (T_0 - T_L) \end{aligned} \quad (1-7)$$

En la ecuación (1-7) se observa que el término que está dentro de los corchetes es la conductividad térmica calculada a la temperatura media aritmética. En consecuencia, una forma equivalente de la ecuación (1-7) es

$$q_x = \frac{k_{avg} A}{L} (T_0 - T_L)$$

que completa el ejemplo.

1.2 CONVECCION

La segunda forma básica que se estudiará es la transferencia de calor por convección la cual involucra el intercambio de energía entre un fluido y una superficie o interfase. Hay dos clases de procesos convectivos, que son la *convección forzada* en que se fuerza el movimiento de un fluido por una superficie debido al efecto de un agente externo tal como un ventilador o bomba y la *convección natural* o *libre* en que los cambios de densidad en el fluido a consecuencia del intercambio de energía provocan un movimiento natural del fluido.

En 1701 Sir Isaac Newton expresó por primera vez la ecuación básica de la relación para la transferencia convectiva del calor. Esta expresión muy sencilla, conocida como la ecuación de la razón o "ley" de enfriamiento de Newton es

$$q = hA(T_{superf} - T_{fluido}) \quad (1-8)$$

en donde q es la relación de la transferencia convectiva del calor en Btu/hr, A es el área normal a la dirección del flujo de calor en ft^2 ,

$T_{\text{superf}} - T_{\text{fluido}}$ es la fuerza motriz de la temperatura en $^{\circ}\text{F}$ y h es el coeficiente convectivo de transferencia de calor en $\text{Btu/hr}\cdot\text{ft}^2\cdot^{\circ}\text{F}$.

La diferencia de la temperatura se puede escribir como en la ecuación (1-8) o como $T_{\text{fluido}} - T_{\text{superf}}$. Esta fuerza motriz de temperatura determina si la transferencia del calor es hacia o desde una superficie dada. Muy pocas veces se escribe la ecuación de la razón de Newton en la forma vectorial como sucede con la ecuación de la relación de Fourier. La orientación de la superficie, hacia o desde la que se intercambia el calor con un fluido adyacente, determina la dirección de la transferencia del calor.

En los siguientes capítulos se considerará más ampliamente el intercambio convectivo. También se necesita considerar los efectos del momento descritos por la segunda ley del movimiento de Newton además de los conceptos básicos de la transferencia del calor y de la primera ley. Sin considerar el fenómeno del flujo involucrado, se sabe que la conducción es el mecanismo de transferencia de energía directamente adyacente a una superficie. Estas capas conductivas superficiales del fluido o "película" del fluido son las que controlan la razón de la transferencia del calor, con lo que determinan un valor dado para h . Por esta razón se denomina con frecuencia al coeficiente h como el "coeficiente de película". Muchas personas insisten en que no se debe establecer una diferencia entre la convección, ya que el factor de control es la conducción. Sin embargo, es este libro se mantiene la distinción, según los conceptos descritos arriba.

El trabajo cuantitativo que involucra la ecuación (1-8) es extremadamente sencillo al igual que la propia ecuación. La dificultad para describir los fenómenos convectivos radica en la evaluación del coeficiente de la película. Parte del estudio que se hará de la convección, se dedicará a determinar h .

La ecuación (1-8) también evalúa la transferencia de energía asociada con los cambios de fase, en especial entre las fases líquida y de vapor. Tanto el proceso de ebullición como el de condensación están asociados con valores de h relativamente altos. La tabla 1.3 da algunos límites aproximados para los rangos de los valores de h que caracterizan la transferencia de calor por convección forzada y libre en el aire y el agua.

Se puede comparar la ecuación (1-8) tanto con la ecuación (1-6) como con la (1-7), ya que son similares en su forma. Los coeficientes de ΔT de los lados derechos de cada una tienen funciones semejantes, o sea la *conductancia* de cada situación y la geometría para la transferencia de calor. Las conductancias para la convección, conducción a través de una pared cilíndrica hueca y conducción a través de una pared plana son

$$K_{\text{convección}} = hA \quad \text{Btu/hr}\cdot^{\circ}\text{F}$$

$$K_{\text{conducción cilindro hueco}} = \frac{2\pi kL}{\ln \frac{r_o}{r_i}} \text{ Btu/hr-}^\circ\text{F}$$

$$K_{\text{conducción pared plana}} = \frac{kA}{L} \text{ Btu/hr-}^\circ\text{F}$$

Se puede pensar que los recíprocos de estas cantidades son las *resistencias térmicas* que ofrece cada mecanismo o geometría.

Tabla 1.3 Valores aproximados para h en distintas situaciones convectivas

Mecanismo	h (Btu/hr-ft ² -°F)
Vapor de agua en condensación	1000–20,000
Agua hirviendo	500–5,000
Convección forzada, agua	50–3,000
Convección forzada, aire	5–100
Convección libre, aire	1–10

Ejemplo 1.3

Dado el tubo de acero con las condiciones descritas en el ejemplo 1.1, con aire a 10°F rodeando el tubo y vapor fluyendo por el interior a 210°F, evaluar los coeficientes de transferencia de calor convectiva en cada una de las superficies del tubo e indicar el mecanismo convectivo que ocurre en las superficies interior y exterior.

El flujo de calor calculado en la superficie interior fue de 16,700 Btu/hr-ft²-°F. Usando la ecuación (1-8) se obtiene el valor de h .

$$\begin{aligned} h &= \frac{q/A}{(T_{\text{vapor}} - T_{\text{super}})} \\ &= \frac{16,700 \text{ Btu/hr-ft}^2}{5^\circ\text{F}} \\ &= 3,340 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^\circ\text{F} \end{aligned}$$

De la tabla 1.3 es aparente que el vapor se está condensando en la superficie interior del tubo.

Usando el mismo enfoque para la superficie exterior, el coeficiente de película en el lado del aire es

$$\begin{aligned} h &= \frac{q/A}{T_{\text{super}} - T_{\text{aire}}} \\ &= \frac{13,150 \text{ Btu/hr-ft}^2}{(195 - 10)^\circ\text{F}} \\ &= 71 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^\circ\text{F} \end{aligned}$$

Definitivamente, el aire del exterior debe estar en convección forzada para tener un valor de h de esta magnitud.

1.3 RADIACION TERMICA

La transferencia de calor por radiación no requiere de un medio para propagarse. De hecho, el intercambio radiante entre las superficies es máximo cuando no hay material que ocupe el espacio intermedio. El intercambio de energía radiante puede ocurrir entre dos superficies, entre una superficie y un gas o medio participante, o puede involucrar una interacción compleja entre varias superficies y fluidos participantes. La transferencia de energía por radiación es un fenómeno electromagnético cuya naturaleza exacta no se conoce. Sin embargo, es posible tratar este tema tan complejo con razonable exactitud.

Se llama cuerpo negro a un cuerpo perfectamente emisor o absorbente. La razón a la que emite energía radiante el cuerpo *negro* está dada por

$$\frac{q}{A} = \sigma T^4 \quad (1-9)$$

en donde q es la emisión radiante en Btu/hr A es el área de la superficie de emisión en ft²; T es la temperatura absoluta en °R; y σ es la constante de Stefan-Boltzmann, que numéricamente es igual a 0.1714×10^{-8} Btu/hr-ft²-°R⁴. La ecuación (1-9) es la ecuación básica de la relación para la emisión de energía radiante y se conoce como la ecuación de la relación de Stefan-Boltzmann o como la ley de Stefan-Boltzmann de la radiación térmica. Stefan postuló la ecuación (1-9) en 1879 en forma empírica y Boltzmann la obtuvo de los principios termodinámicos en 1884.

La ecuación de la relación de Stefan-Boltzmann en la forma presentada es demasiado sencilla ya que no se tiene en cuenta la geometría, la interacción entre la superficie de emisión y otras superficies o medios que enfrenta, o el comportamiento de cualquier superficie no negra. En el capítulo 6 se estudiará con mayor detalle a cada uno de estos factores.

1.4 MECANISMOS COMBINADOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR

Aunque es posible separar la conducción, convección y radiación para facilitar su estudio, es poco usual el caso en que una situación real de ingeniería de la transferencia de calor no involucre al menos dos, si no es que los tres mecanismos.

La figura 1.6 muestra una pared plana compuesta, formada por dos materiales distintos, que separa dos gases a distintas tempera-

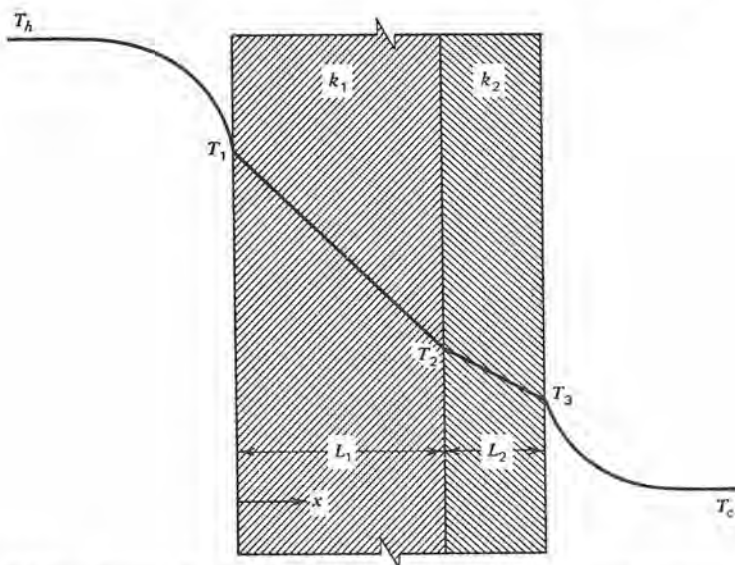


Figura 1.6 Transferencia de calor a través de una pared plana compuesta con convección en las superficies.

turas. Se puede imaginar este caso físicamente como el de la pared de un horno en que se coloca un material próximo al gas caliente del horno por sus cualidades aislantes y se coloca el otro fuera, adyacente al aire, debido a su apariencia, o quizás sus cualidades estructurales o ambas. Denotando por T_h y T_c las temperaturas caliente y fría del gas respectivamente, las temperaturas superficiales de los materiales por T_1 y T_3 , y la temperatura de la interfase entre los dos materiales de la pared por T_2 , para la razón de transferencia de calor para cada parte en este proceso se puede escribir

$$q_{h \rightarrow 1} = h_h A (T_h - T_1)$$

$$q_{1 \rightarrow 2} = -k_1 A \frac{dT}{dx}$$

$$q_{2 \rightarrow 3} = -k_2 A \frac{dT}{dx}$$

$$q_{3 \rightarrow c} = h_c A (T_3 - T_c)$$

Para el caso de estado estable, las dos expresiones de la conducción toman la misma forma, siendo la diferencia los límites de integración. Obteniendo el valor de $q_{1 \rightarrow 2}$, se tiene

$$q_{1 \rightarrow 2} \int_0^{L_1} dx = -k_1 A \int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$q_{1 \rightarrow 2} = \frac{k_1 A}{L_1} (T_1 - T_2) \quad (1-10)$$

De un análisis semejante para $q_{2 \rightarrow 3}$ obtenemos

$$q_{2 \rightarrow 3} = \frac{k_2 A}{L_2} (T_2 - T_3) \quad (1-11)$$

Se notará aquí que el perfil de la temperatura es lineal para la conducción de estado estable a través de una pared plana.

El estado estable también requiere que todas las q sean iguales; por tanto, se pueden escribir las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} q &= h_h A (T_h - T_1) = \frac{k_1 A}{L_1} (T_1 - T_2) \\ &= \frac{k_2 A}{L_2} (T_2 - T_3) = h_c A (T_3 - T_c) \end{aligned}$$

Cada una de estas formas es suficiente para calcular el flujo de calor. Se pueden obtener expresiones adicionales si se escribe cada diferencia de temperatura en función de q como

$$\begin{aligned} T_h - T_1 &= q \left(\frac{1}{h_h A} \right) \\ T_1 - T_2 &= q \left(\frac{L_1}{k_1 A} \right) \\ T_2 - T_3 &= q \left(\frac{L_2}{k_2 A} \right) \\ T_3 - T_c &= q \left(\frac{1}{h_c A} \right) \end{aligned}$$

La adición de dos o más de estas expresiones da otra expresión para q . Por ejemplo, si se suman las dos expresiones de la conducción, se obtiene

$$q = \frac{T_1 - T_3}{\frac{L_1}{k_1 A} + \frac{L_2}{k_2 A}} \quad (1-12)$$

que involucra la diferencia en temperaturas superficiales como fuerza motriz. Con esto se puede evaluar q sin conocer la temperatura T_2 de la interfase.

Si se suman todas las ecuaciones de las diferencias de temperaturas, se obtiene la siguiente expresión para q

$$q = \frac{T_h - T_c}{\frac{1}{h_h A} + \frac{L_1}{k_1 A} + \frac{L_2}{k_2 A} + \frac{1}{h_c A}} \quad (1-13)$$

que solamente involucra la diferencia global o total de temperatura entre los gases caliente y frío.

Se puede considerar que la ecuación (1-13) relaciona la cantidad que se va a transferir (calor) con la razón de la fuerza motriz (la diferencia de la temperatura) al efecto combinado de cada parte del paso de flujo del calor. Estos últimos efectos constituyen individualmente las resistencias que ofrece cada parte a la trayectoria del flujo de calor. Este concepto es análogo a la ley de Ohm, en donde la contraparte de la transferencia de calor es sencillamente

$$q = \frac{\Delta T}{\sum R_t} \quad (1-14)$$

siendo $\sum R_t$ una suma apropiada (en serie, en paralelo o una combinación) de las distintas resistencias térmicas involucradas.

La resistencia térmica de una película convectiva es $1/hA$; la de conducción a través de una pared plana es L/kA ; y para un cilindro hueco la resistencia térmica es $[\ln(r_o/r_i)]/2\pi kL$. Estos términos son los recíprocos de las conductancias térmicas mencionadas en la sección 1.2.

Otra forma común de expresar la rapidez de la transferencia de calor cuando están involucrados modos combinados es

$$q = UA\Delta T \quad (1-15)$$

en donde U es el *coeficiente global de transferencia de calor*, que tiene unidades de Btu/hr-ft²-°F, al igual que h . Obviamente, el coeficiente de transferencia global de calor y la resistencia térmica combinada están relacionados de acuerdo con la expresión

$$U = \frac{1}{A \sum R_t} \quad (1-16)$$

No es raro que la porción de la expresión de flujo de calor que involucra la geometría del sistema esté separada de los otros términos y se le denomine el *factor de forma*. La expresión

$$q = kS\Delta T \quad (1-17)$$

define el factor de forma. Finalmente, el factor de forma, el coeficiente de transferencia global de calor y la resistencia combinada térmica se pueden relacionar en la siguiente forma

$$kS = UA = \frac{1}{\sum R_t} \quad (1-18)$$

En el siguiente ejemplo se ilustra el tratamiento de mecanismos combinados de transferencia de calor.

Ejemplo 1.4

Un tubo de acero de 1 in de diámetro nominal cuya superficie exterior a 400°F se coloca en aire inmóvil a 90°F con el coeficiente de transferencia convectiva de calor entre la superficie del tubo y el aire igual a 1.5 Btu/hr-ft²-°F se sugiere agregar aislante de magnesio de 85% a la superficie exterior del tubo para reducir la pérdida de calor. ¿Qué espesor de aislante se requiere para reducir la pérdida de calor a la mitad si la temperatura de la superficie del tubo y el coeficiente de transferencia convectiva de calor permanecen constantes?

Para tubería de acero de 1-in, el diámetro exterior D.E. = 1.315 in. = 0.1095 ft. Para el tubo descubierto o desnudo,

$$\begin{aligned} q_o &= hA\Delta T = (1.5 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^\circ\text{F})(\pi)(0.1095 \text{ ft})(400 - 90)^\circ\text{F} \\ &= 160 \text{ Btu/hr} \quad (\text{por ft}) \end{aligned}$$

Para el tubo aislado, con D_2 igual al diámetro exterior del aislante,

$$q = \frac{q_o}{2} = \frac{T_{\text{vapor}} - T_{\text{aire}}}{\ln \frac{D_2}{D_1} + \frac{1}{2\pi k} + \frac{1}{\pi D_2 h}}$$

Pasando a un lado de la ecuación todos los términos que involucran D_2 y simplificando al máximo se tiene

$$\begin{aligned} \frac{h}{2k} \ln \frac{D_2}{D_1} + \frac{1}{D_2} &= \frac{2}{q_o} \Delta T \pi h \\ 18.3 \ln \frac{D_2}{0.1095} + \frac{1}{D_2} &= 18.25 \end{aligned}$$

El valor de D_2 que satisface esta igualdad es 0.235 ft; en consecuencia, el diámetro exterior del tubo aislado es de 2.82 in, y el espesor del aislante que se requiere es ligeramente mayor que 0.75 in.

1.5 RESUMEN

En este capítulo introductorio relativo a los conceptos básicos y ecuaciones de razón relativas al análisis de transferencia de calor se han discutido los modos básicos de transferencia de calor que son conducción, convección y radiación. Las ecuaciones básicas de la razón para cada modo son

$$\text{conducción: } q_x = -k_x A \frac{dT}{dx} \quad (1-1)$$

$$\text{convección: } q_x = hA(T_{\text{super}} - T_{\text{fluido}}) \quad (1-8)$$

$$\text{radiación: } q_x = \sigma AT^4 \quad (1-9)$$

Se ha presentado una amplia discusión y se ha proporcionado información útil relativa a los valores de conductividad térmica para materiales gaseosos, líquidos y sólidos.

Se discutieron los conceptos y técnicas de solución asociadas con los modos combinados de transferencia de calor. Con relación a este tema, son términos útiles la resistencia térmica total $\sum R_t$ de un paso de transferencia de calor representada por

$$q_x = \frac{\Delta T}{\sum R_t} \quad (1-14)$$

el coeficiente de transferencia global de calor U , definido según la ecuación

$$q_x = UA\Delta T \quad (1-15)$$

y el factor S de forma, que define la siguiente relación

$$q_x = kS\Delta T \quad (1-17)$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

En el presente trabajo se ha tratado de dar una idea general de la importancia de la matemática en la vida cotidiana. Se ha visto que la matemática no es solo una ciencia abstracta, sino que también tiene aplicaciones prácticas en muchos campos de la vida. La matemática es una herramienta poderosa que nos ayuda a entender el mundo que nos rodea y a resolver problemas cotidianos. Por lo tanto, es importante que todos los estudiantes aprendan matemática desde temprana edad y que se les enseñe a aplicar lo que aprenden en la vida real.

$$\frac{1}{2}$$

En conclusión, la matemática es una ciencia fascinante que nos ayuda a entender el mundo que nos rodea. Es importante que todos los estudiantes aprendan matemática desde temprana edad y que se les enseñe a aplicar lo que aprenden en la vida real. La matemática es una herramienta poderosa que nos ayuda a resolver problemas cotidianos y a tomar decisiones informadas.

$$\frac{1}{2}$$

En el presente trabajo se ha tratado de dar una idea general de la importancia de la matemática en la vida cotidiana. Se ha visto que la matemática no es solo una ciencia abstracta, sino que también tiene aplicaciones prácticas en muchos campos de la vida. La matemática es una herramienta poderosa que nos ayuda a entender el mundo que nos rodea y a resolver problemas cotidianos. Por lo tanto, es importante que todos los estudiantes aprendan matemática desde temprana edad y que se les enseñe a aplicar lo que aprenden en la vida real.

$$\frac{1}{2}$$

Las ecuaciones de la transferencia de calor

En este capítulo se desarrolla la mayoría de las ecuaciones que son básicas para el análisis de la transferencia de calor. La primera ley de la termodinámica, o ecuación de la energía, es fundamental a todos los análisis; este es el punto de partida para la solución de cualquier problema. En los problemas de la convección, también se debe usar la ley de la conservación de la masa y la segunda ley de movimiento de Newton (el teorema del momento) para evaluar adecuadamente una situación dada.

Las ecuaciones de la relación básica estudiadas en el capítulo anterior, usadas con las leyes fundamentales, permiten determinar las cantidades de transferencia de calor necesarias. Por lo general se tiene interés en encontrar la temperatura en un punto dado, la distribución de temperatura a lo largo de una frontera o a través de una región o la razón de transferencia de calor.

La forma de expresar las leyes básicas y las ecuaciones asociadas en la relación conducen a diferentes clases de soluciones. El tipo de información deseada o la disponibilidad de un computador grande de alta velocidad hará deseable buscar una solución numérica de tipo lógico y que las ecuaciones que enuncian las relaciones se escriban más adecuadamente en forma de diferencias. En circunstancias diferentes, se preferirán otras opciones.

2.1 LEYES BASICAS DEL ANALISIS DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR

Las leyes físicas básicas a todos los análisis de transferencia de calor son

1. Primera ley de la termodinámica.
2. Conservación de la masa.
3. Segunda ley del movimiento de Newton.

Ahora se consideran las formulaciones de mosaico, integral y diferencial de estas leyes. En los capítulos siguientes se desarrollan y resuelven algunas formas especiales de diferencia que no se consideran en este capítulo.

2.1-1 Formulación de mosaico de las leyes básicas

Una ley expresada en "forma de mosaico" es sencillamente una expresión cuyos términos son independientes de las variables espaciales, lo que puede ser válido totalmente en el caso de la placa de una plancha, que se puede considerar que está a una temperatura constante en cualquier momento; o en forma parcial, como en el caso de una aleta que se extiende desde una pared caliente rodeada por un gas más frío. Para tal aleta, que es muy delgada, es usual considerar constante la temperatura a cualquier distancia dada de la pared, o "de mosaico" en la dirección transversal al eje de las aletas.

Una formulación de mosaico tiene la característica de reducir el número de variables independientes necesarias a una ecuación diferencial. En esta forma es posible reducir una ecuación diferencial de tres variables independientes a una en dos variables, una ecuación diferencial parcial de dos variables independientes se transforma en una ecuación diferencial ordinaria y una ecuación diferencial ordinaria se convierte en una ecuación algebraica simple.

Considere el sistema y volumen de control mostrado en la figura 2.1. El *volumen de control*, o región fija en el espacio, está representado por la línea sólida al tiempo t y $t + \Delta t$. El sistema aparece representado por las líneas punteadas en los mismos dos tiempos. En la forma en que se considera el término, un *sistema* es una colección fija de partículas que tienen masa constante. Note que al tiempo $t + \Delta t$ el sistema está completamente dentro del volumen de control. Al tiempo t , en una posición i , una porción del sistema, Δm_i , que tiene el volumen ΔV_i , y un valor específico —esto es, en base a una masa unitaria $-\Delta p_i$, de la propiedad \mathcal{P} está fuera del volumen de control. Esta cantidad del sistema cruza la frontera del volumen de control en el intervalo Δt .

El cambio en el valor de la propiedad \mathcal{P} durante el intervalo Δt es

$$\Delta \mathcal{P} = \mathcal{P}|_{t+\Delta t} - \mathcal{P}|_t \quad (2-1)$$

Para cada tiempo, el valor de propiedad total incluye la contribución de las porciones que están dentro y fuera del volumen de control. En

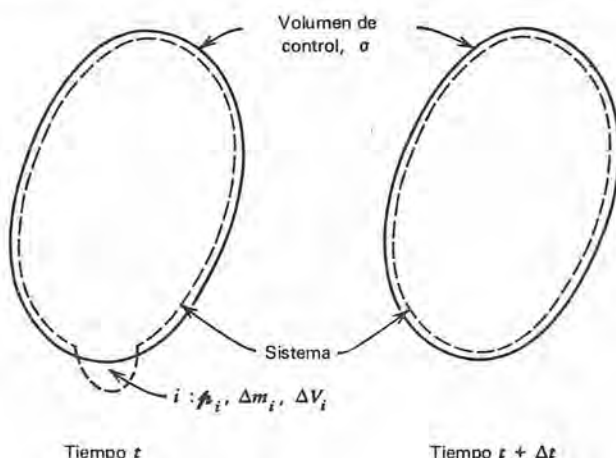


Figura 2.1 Sistema y volumen de control para la formulación de mosaico de las leyes básicas.

un instante dado se puede escribir

$$\mathcal{P}|_{t+\Delta t} = \mathcal{P}_\sigma|_{t+\Delta t} \quad (2-2)$$

$$\mathcal{P}|_t = \mathcal{P}_\sigma|_t + \phi_i \Delta m_i \quad (2-3)$$

Substituyendo estas relaciones en la ecuación (2.1) y denotando por $\Delta \mathcal{P}_\sigma$ los cambios dentro del volumen de control, se tiene

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{P} &= \mathcal{P}_\sigma|_{t+\Delta t} - \mathcal{P}_\sigma|_t - \phi_i \Delta m_i \\ &= \Delta \mathcal{P}_\sigma - \phi_i \Delta m_i \end{aligned} \quad (2-4)$$

Si hay porciones del sistema que crucen la superficie de control en más de un lugar, se obtiene la relación más generalizada

$$\Delta \mathcal{P} = \Delta \mathcal{P}_\sigma - \sum_{i=1}^N \phi_i \Delta m_i \quad (2-5)$$

en donde N es el número de cruces.

Finalmente, si en el denominador de la ecuación (2.5) se introduce el intervalo Δt entre las evaluaciones de propiedades, la expresión resultante involucra la razón de cambio. Efectuando esta operación en la ecuación (2.5), se tiene

$$\frac{\mathcal{P}|_{t+\Delta t} - \mathcal{P}|_t}{\Delta t} = \frac{\mathcal{P}_\sigma|_{t+\Delta t} - \mathcal{P}_\sigma|_t}{\Delta t} - \sum_{i=1}^N \phi_i \frac{\Delta m_i}{\Delta t}$$

Evaluando en el límite, cuando $\Delta t \rightarrow 0$, se obtiene

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} = \frac{d\mathcal{P}_\sigma}{dt} - \sum_{i=1}^N \phi_i \frac{dm_i}{dt} \quad (2-6)$$

La ecuación (2-6) es una expresión general de la razón de cambio de una propiedad del sistema igualándola a la razón de cambio de la propiedad para el volumen de control menos la razón neta a la que se cambia la propiedad por efecto del flujo de masa a través de la superficie de control. La razón de flujo de masa dm_i/dt es positiva para un flujo dirigido hacia el volumen de control.

2.1-1.1 Forma de mosaico de la ley de conservación de la masa

En el caso de la ley de la conservación de la masa, la propiedad que se considera es la masa m ; y la forma específica es 1. Por lo tanto, usando la terminología de la ecuación (2-6), $\mathcal{P} = m$, $\phi_i = 1$, y sustituyendo en esta ecuación se obtiene

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm_\sigma}{dt} - \sum_{i=1}^N \frac{dm_i}{dt}$$

Dado que un sistema tiene masa fija por definición, la derivada

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

tenemos que la forma de mosaico de la ley de la conservación de la masa se escribe finalmente

$$\frac{dm_\sigma}{dt} - \sum_{i=1}^N \frac{dm_i}{dt} = 0 \quad (2-7)$$

2.1-1.2 Forma de mosaico de la primera ley de la termodinámica

Para cualquier sistema, la primera ley expresada como una diferencia es

$$\delta Q - \delta W = \Delta E \quad (2-8)$$

y en forma de razón esta expresión queda

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W}{dt} = \frac{dE}{dt} \quad (2-9)$$

En el orden de aparición, estos términos representan la razón de adición de calor a un sistema, la razón de trabajo efectuado por un sistema en su medio ambiente y la razón de acumulación de energía dentro del sistema. Se debe tener cuidado en el empleo de las convenciones de signos usadas en cada término para discusiones subsecuentes y soluciones de problemas.

La propiedad más importante en este caso es la energía total E . Este término incluye todas las formas de energía relacionada con el

sistema, incluyendo la potencial, cinética, interna, nuclear, química y algunas otras. A menos que claramente se indique lo contrario, en E solamente se incluyen las componentes cinética, potencial e interna de la energía. En forma más detallada, se puede escribir E como

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgY + U \quad (2-10)$$

en donde $mv^2/2$ es la energía cinética total, mgY es la energía potencial total y U es la energía interna total del sistema.

Si se divide cada término de la ecuación (2.10) entre m , se obtiene la forma específica de la energía total

$$e = \frac{v^2}{2} + gY + u \quad (2-11)$$

en donde cada término es la forma específica de su contraparte en la relación anterior.

Usando la energía total y sustituyendo en la ecuación (2-6) en donde $\mathcal{P} = E$, y $\mu_i = e_i$, se obtiene

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE_\sigma}{dt} - \sum_{i=1}^N e_i \frac{dm_i}{dt} \quad (2-12)$$

Con esta expresión para dE/dt , la forma de mosaico para la primera ley de la termodinámica se escribe

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W}{dt} = \frac{dE_\sigma}{dt} - \sum_{i=1}^N e_i \frac{dm_i}{dt} \quad (2-13)$$

Se debe modificar la ecuación (2-13) para que sea de mayor utilidad. El problema es definir adecuadamente el término de la razón de trabajo, $\delta W/dt$. Sin entrar en gran detalle, se considera que el trabajo hecho está formado por (1) trabajo de flecha, el cual se efectúa para producir un efecto externo al sistema, que se puede hacer para girar una flecha o elevar un peso a cierta altura; (2) trabajo de flujo, el desarrollado para vencer los efectos de presión en cualquier lugar de la frontera en que ocurre un flujo de masa; y (3) trabajo viscoso, el efectuado para vencer los efectos de la fricción fluida en los lugares en que puede ocurrir el flujo de masa en la frontera.

La razón de trabajo de flecha se denota mediante el subíndice s y se escribe como $\delta W_s/dt$. En forma análoga se escribe la razón de trabajo viscoso como $\delta W_\mu/dt$, en donde el subíndice μ simboliza la naturaleza viscosa de esta componente de la razón de trabajo.

La razón de trabajo de flujo se escribe como $d(PV)/dt$, o, considerando que la presión es constante, $P dV/dt$. Introduciendo la razón de flujo de masa en el lugar de la razón de flujo de volumen, este término queda finalmente como

$$\frac{P}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho V) = \frac{P}{\rho} \frac{dm}{dt}$$

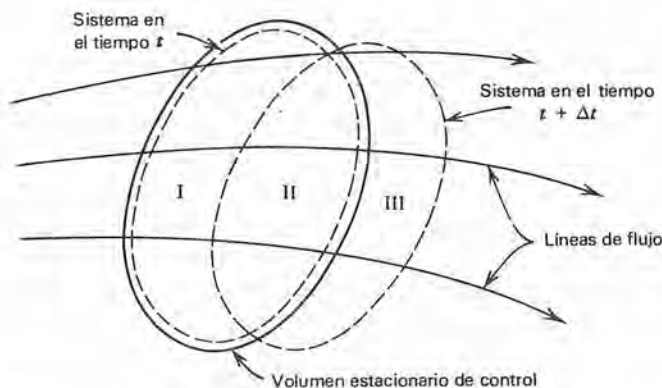


Figura 2.2 Sistema y volumen de control para la formulación integral de las leyes básicas.

Introduciendo estas componentes de razón de trabajo en la ecuación (2-13), se tiene la forma útil de mosaico de la primera ley de la termodinámica.

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W_s}{dt} - \frac{\delta W_\mu}{dt} = \frac{dE_s}{dt} - \sum_{i=1}^N \left(e_i + \frac{P}{\rho} \right) \frac{dm_i}{dt} \quad (2-14)$$

2.1-2 Formulación integral de las leyes básicas

En forma análoga al caso de mosaico, se considera una relación general o fórmula de transformación que involucra el transporte de una propiedad general \mathcal{P} , y luego se emplea esta fórmula para expresar cada una de las leyes básicas en forma integral.

Considere el campo de flujo ilustrado en la figura 2.2. El volumen de control, o región fija, que se debe considerar, se muestra con una línea continua. El sistema se indica con líneas punteadas y se muestra al tiempo t , cuando coinciden las fronteras del sistema y de control, y a $t + \Delta t$, cuando una porción del sistema se ha movido fuera del volumen de control. De acuerdo a la figura, se ve que

- la región I está ocupada por el sistema solamente al tiempo t ,
- la región II es común al sistema tanto en t como en $t + \Delta t$,
- la región III está ocupada por el sistema solamente en $t + \Delta t$

Si nuevamente se considera la disposición de la propiedad \mathcal{P} , cuyo valor específico es \mathcal{P}_i , se tiene que

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{P}|_{t+\Delta t} - \mathcal{P}|_t}{\Delta t} \quad (2-15)$$

y en función de las regiones I, II y III,

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{P}_{II}|_{t+\Delta t} + \mathcal{P}_{III}|_{t+\Delta t} - \mathcal{P}_I|_t - \mathcal{P}_{II}|_t}{\Delta t} \quad (2-16)$$

Rearreglando la ecuación (2.16) en la forma

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{\mathcal{P}_{II}|_{t+\Delta t} - \mathcal{P}_{II}|_t}{\Delta t} + \frac{\mathcal{P}_{III}|_{t+\Delta t}}{\Delta t} - \frac{\mathcal{P}_I|_t}{\Delta t} \right] \quad (2-17)$$

y pasando el primer término al lado derecho de la ecuación (2-17) se tiene que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{P}_{II}|_{t+\Delta t} - \mathcal{P}_{II}|_t}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \mathcal{P}_{II}$$

que es la razón de cambio de la propiedad \mathcal{P} dentro del propio volumen de control, ya que en $\Delta t \rightarrow 0$, la región II coincide con el volumen de control. En forma integral, este término es

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{P}_{II}|_{t+\Delta t} - \mathcal{P}_{II}|_t}{\Delta t} = \left(\frac{d}{dt} \mathcal{P} \right)_{cv} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho \mathcal{P} dV \quad (2-18)$$

en donde dV es un elemento de volumen, ρ es la densidad de masa y \mathcal{P} es la forma específica de \mathcal{P} .

El segundo y tercer términos del lado derecho de la ecuación (2-17) representan las cantidades de \mathcal{P} que salen y entran debidas al flujo de masa a través de la frontera del volumen de control. Se obtiene una forma más compacta de estos términos de flujo si se considera primeramente el volumen de control como se muestra en la figura 2.3.

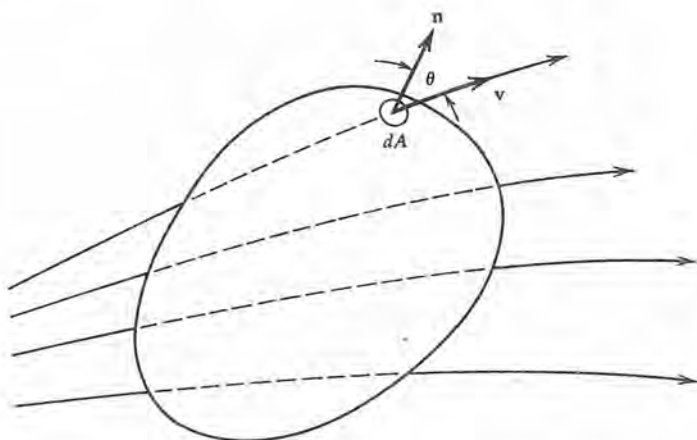


Figura 2.3 Volumen de control para el análisis integral.

Para el área pequeña dA sobre la frontera del volumen de control, se puede escribir la razón de movimiento de la propiedad \mathcal{P} en la forma

$$\text{flujo de } \mathcal{P} = \rho(\rho v)(dA \cos \theta)$$

Note que el producto $\rho v dA \cos \theta$ es la razón de flujo de masa a través de dA , en donde el vector de velocidad \mathbf{v} y el vector normal \mathbf{n} dirigido hacia afuera de dA están separados por un ángulo θ . Del álgebra vectorial se puede escribir el producto de los términos en la forma

$$\rho(\rho v)(dA \cos \theta) = \rho(\rho dA)[|\mathbf{v}||\mathbf{n}| \cos \theta]$$

El término dentro de los corchetes es el producto punto o escalar $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$, con lo que el término del flujo de la propiedad queda

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Integrado en toda la superficie de control, el flujo de la propiedad debido al flujo de la masa es

$$\int_{cs} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Se debe notar que esta integral es positiva cuando se evalúa en toda la porción de la superficie de control en donde el flujo de la masa está dirigida hacia afuera, ya que el ángulo θ en todos casos es menor que 90° . En todos los casos en que el flujo de la masa es dirigido hacia el volumen de control, el ángulo θ es mayor de 90° , con lo que el producto punto $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ es negativo. En consecuencia, esta única integral tomada en toda la superficie de control incluye el flujo fuera de y hacia el volumen de control; equivale a los dos últimos términos a la derecha de la ecuación (2.17). Finalmente se puede escribir la fórmula de transformación como

$$\left. \frac{d\mathcal{P}}{dt} \right|_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA \quad (2-19)$$

Expresado con palabras, la ecuación (2-19) indica que la razón de cambio de una propiedad \mathcal{P} para un sistema equivale a la razón de cambio de \mathcal{P} para un volumen de control más la razón neta de eflujo de \mathcal{P} por efecto del flujo de masa a través de las fronteras del volumen de control.

A continuación se establecen las leyes básicas en forma integral, usando la relación de transformación, ecuación (2-19).

2.1-2.1 Conservación de la masa; formulación integral

En el caso de la conservación de la masa, las formas general y específica de propiedad son $\mathcal{P} = m$, $\beta = 1$. Aplicando la ecuación (2-19), se obtiene

$$\left. \frac{dm}{dt} \right|_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA \quad (2-20)$$

Nuevamente se nota que la masa de un sistema es constante por definición, lo que requiere que $(dm/dt)_{\text{sistema}} = 0$. La fórmula resultante para la conservación de la masa queda entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = 0 \quad (2-21)$$

2.1-2.2 Primera ley de la termodinámica; formulación integral

Anteriormente se hizo notar que la primera ley de la termodinámica enunciada en forma de razón para un sistema de acuerdo con la ecuación (2-9) es

$$\left. \frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W}{dt} = \frac{dE}{dt} \right|_{\text{sistema}} \quad (2-9)$$

Para poder usar la relación de la transformación integral, en primer lugar se debe expresar la propiedad \mathcal{P} en la forma apropiada. Para este caso,

$$\mathcal{P} = E, \quad \beta = e$$

y, empleando la ecuación (2-19), se obtiene

$$\left. \frac{dE}{dt} \right|_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} e\rho dV + \int_{cs} e\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA \quad (2-22)$$

En consecuencia, se puede escribir una forma integral de la primera ley en la forma

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} e\rho dV + \int_{cs} e\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA \quad (2-23)$$

Como se mencionó en la sección 2.1-1.2, el término de la razón de trabajo incluye componentes de la razón de trabajo de la flecha, la razón de trabajo viscoso y la razón de trabajo de flujo. Nuevamente se escriben las razones de trabajo de flecha y viscosa en las formas $\delta W_s/dt$ y $\delta W_\mu/dt$, respectivamente. Para la presión estable, la razón de trabajo de flujo se escribe

$$P \frac{dV}{dt} = \frac{P}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho V) = \frac{P}{\rho} \frac{dm}{dt} \quad (2-24)$$

en donde dm/dt es la razón de flujo de masa que cruza la superficie de control. Usando la forma integral para el eflujo de masa neta a través de la superficie de control, el término de la razón de trabajo de flujo queda

$$\frac{P}{\rho} \frac{dm}{dt} = \int_{cs} \frac{P}{\rho} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA \quad (2-25)$$

Finalmente, todas las componentes de trabajo de flujo se pueden incluir en la ecuación (2-23), lo que da la forma integral de la primera ley de la termodinámica.

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W_s}{dt} - \frac{\delta W_u}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} e \rho dV + \int_{cs} \left(e + \frac{P}{\rho} \right) \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA \quad (2-26)$$

Nuevamente se recuerda al lector que la razón de flujo de calor es positiva cuando se dirige hacia el volumen de control y que es positiva la razón de trabajo cuando se hace por el volumen de control sobre su medio ambiente.

Expresada en palabras, la ecuación (2-26) dice que el calor neto agregado a un volumen de control menos la razón de trabajo de flecha y de corte, es igual a la razón de aumento de energía dentro del volumen de control más la razón neta de eflujo de energía a través de la frontera del volumen de control debido al flujo de masa.

2.1-2.3 Segunda ley del movimiento de Newton; formulación integral

La segunda ley del movimiento de Newton se escribe

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) \quad (2-27)$$

que se puede enunciar como "la fuerza ejercida en un sistema es igual a la razón del cambio de impulso del sistema." Se debe notar que esta ecuación involucra cantidades vectoriales en contraste con las ecuaciones escalares que se han considerado hasta este momento.

Aplicando la ecuación (2-19), los valores aplicables de \mathcal{P} y \mathcal{P}_e son

$$\mathcal{P} = m\mathbf{v}, \quad \mathcal{P}_e = \mathbf{v}$$

y se obtiene la forma integral de la segunda ley de Newton

$$\sum \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \mathbf{v} \rho dV + \int_{cs} \mathbf{v} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA \quad (2-28)$$

La ecuación (2-28) establece que la fuerza neta en un volumen de control equivale a la razón de tiempo del cambio en impulso del volumen de control, más la razón neta de eflujo de impulso del volumen de control por efecto del flujo de masa.

Las ecuaciones (2-21), (2-26) y (2-28) son las fórmulas integrales a las que se hará referencia y que se aplicarán en capítulos posteriores.

2.1-3 Formulación diferencial de las leyes básicas

Habiendo generado las formas integrales de las leyes básicas en la sección anterior, ahora es posible obtener las formas diferenciales rápidamente aplicando el teorema de la divergencia del cálculo vectorial. Este enfoque es matemáticamente sólido, aunque proporciona una comprensión física limitada relativa a las ecuaciones diferenciales resultantes. El lector que esté interesado en otro desarrollo de las formas diferenciales de las leyes básicas puede consultar la obra de Welty, Wicks y Wilson.¹

Para una cantidad vectorial general \mathbf{A} , que es continua y diferenciable, y para un volumen V encerrado por una superficie lisa S en sentido de los incrementos, el teorema de la divergencia establece que

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV \quad (2-29)$$

Ahora se aplica esta relación a las formas integrales de las leyes básicas para dar las ecuaciones diferenciales deseadas.

2.1-3.1 Conservación de la masa; formulación diferencial

En la sección 2.1-2.1 se estableció que la forma integral de la ley de la conservación de la masa es

$$\int_{cv} \frac{\partial}{\partial t} \rho \, dV + \int_{cs} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dA = 0 \quad (2-21)$$

Aplicando la ecuación (2-29) se puede convertir la integral de superficie a integral de volumen en la siguiente forma:

$$\int_{cs} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dA = \int_{cv} \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \, dV \quad (2-30)$$

Incluyendo el primer miembro de la ecuación (2-21) en una sola integral de volumen se puede escribir

$$\int_{cv} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \right) dV = 0 \quad (2-31)$$

Para que la ecuación (2-31) sea verdadera, en general el integrando debe ser igual a cero, con lo que la ecuación resultante es

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \quad (2-32)$$

¹J. R. Welty, C. E. Wicks, y R. E. Wilson *Fundamentals of Momentum, Heat and Mass Transfer*. (Nueva York: John Wiley and Sons, Inc., 1969), caps. 9, 15, 25.

que es la forma diferencial de la ley de la conservación de la masa. Si se separa el término de la divergencia, se obtiene una forma equivalente de esta ecuación como sigue:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2-33)$$

Los términos que involucran derivadas parciales de la densidad están expresados en una forma que se encuentra con tal frecuencia que se ha reservado un nombre y símbolos especiales para esta agrupación. El nombre es la *derivada sustancial* y el símbolo para el operador de la derivada sustancial es D/Dt . Por definición, esta operación es

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (2-34)$$

de manera que también se puede escribir la ecuación de continuidad, ecuación (2-32), en forma diferencial como

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2-35)$$

En este punto es necesario discutir brevemente el significado físico de la derivada sustancial. Primero considere la presión atmosférica P , considerada en general como una función de la posición y el tiempo, expresada como $P = P(x, y, z, t)$. Para evaluar el cambio en la presión atmosférica, se puede escribir la diferencial de P , en coordenadas cartesianas como

$$dP = \frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz$$

en donde dx , dy y dz son desplazamientos arbitrarios en las direcciones x , y y z respectivamente. Si se dividen todos los términos entre dt , se obtiene la razón del cambio de la presión como

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (2-36)$$

Considere tres enfoques para la evaluación de dP/dt . En primer lugar, el instrumento para medir la presión está localizado en una estación climatológica, que naturalmente está fija en la superficie terrestre. En este caso los coeficientes dx/dt , dy/dt y dz/dt son cero, y para un punto fijo de observación la derivada total dP/dt es igual a la derivada local en el tiempo $\partial P/\partial t$.

Un segundo enfoque implica que el instrumento para la medición de la presión se encuentre en una aeronave que pueda volar en cualquier dirección elegida, además de elevarse o descender conforme

quiera el piloto. En tal caso, las derivadas dx/dt , dy/dt , y dz/dt son las componentes x , y y z de la velocidad del avión, respectivamente. Se escogen arbitrariamente estas componentes y sólo tienen relación casual con las corrientes de aires.

Una tercera situación es una en que el instrumento de medición de la presión está en un globo que deriva, cae o se eleva con el aire en que está suspendido el globo. Aquí las derivadas dx/dt , dy/dt y dz/dt son las componentes de la velocidad del propio medio, v_x , v_y , y v_z , respectivamente. Esta tercera situación corresponde a la definición de la derivada sustancial y se pueden agrupar los términos de la ecuación (2-36) en la siguiente forma:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{DP}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial P}{\partial t}}_{\text{razón local del cambio de presión}} + \underbrace{v_x \frac{\partial P}{\partial x} + v_y \frac{\partial P}{\partial y} + v_z \frac{\partial P}{\partial z}}_{\text{razón del cambio de presión debido al movimiento del fluido}} \quad (2-37)$$

Es más sencillo demostrar que la ecuación (2-37) es la forma de las coordenadas cartesianas del operador de la derivada sustancial más generalizado dado en la ecuación (2-34). Por tanto se ve que la derivada sustancial es *la derivada que sigue el flujo del fluido*. Se puede interpretar al operador D/Dt como la razón de tiempo de cambio de una variable dada evaluada a lo largo de la trayectoria del elemento fluido en el campo de flujo. Se puede aplicar este operador tanto a cantidades escalares como vectoriales, como se encontrará y usará más adelante.

Una observación final con relación a la ecuación de continuidad dada por las ecuaciones (2-32) y (2-35) es la forma muy sencilla que resulta para el caso de flujo incompresible. En este caso, la ecuación queda

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2-38)$$

2.1-3.2 Primera ley de la termodinámica; enfoque diferencial

El punto de partida para la generación de la forma diferencial para la primera ley de la termodinámica es la ecuación (2-26) que se repite a continuación para posteriores referencias.

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W_s}{dt} - \frac{\delta W_\mu}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} e \rho dV + \int_{cs} \left(e + \frac{P}{\rho} \right) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA \quad (2-26)$$

Trabajando primero con el segundo miembro de la ecuación (2-26), se intercambia el orden de la diferenciación e integración para la in-

tegral de volumen y se rescribe la integral de superficie como una integral de volumen. El resultado de estos cambios es

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W_s}{dt} - \frac{\delta W_v}{dt} = \int_{cv} \left[\frac{\partial}{\partial t} (e\rho) + \nabla \cdot (e\rho \mathbf{v} + P\mathbf{v}) \right] dV \quad (2-39)$$

Considerando luego los términos del primer miembro de estas ecuaciones, primero se encuentra la razón de flujo de calor $\delta Q/dt$. Se considera que el flujo de calor es debido a la conducción a través de la frontera del volumen de control o a la generación interna por los efectos de calentamiento de resistencia eléctrica, reacción química u otros semejantes. Incluyendo ambos efectos, se puede escribir el término de razón de flujo de calor en la forma

$$\frac{\delta Q}{dt} = \int_{cs} -\frac{\mathbf{q}}{A} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{cv} \dot{q} dV \quad (2-40)$$

El primer término, que involucra la integral de superficie, expresa la transferencia de calor conductivo a través de la frontera en función del vector \mathbf{q} de flujo de calor, expresado en la ecuación (1-2) como una función de la conductividad térmica y el gradiente de temperatura. El signo menos en este término en la ecuación (2-40) se debe a que el flujo de calor está definido como positivo *hacia* el volumen de control. El segundo término involucra la razón total de calor generado dentro del volumen de control.

Se puede modificar la ecuación (2-40) escribiendo el vector de flujo de calor en función del gradiente de temperatura en la ecuación (1-2). Ahora la ecuación (2-40) queda

$$\frac{\delta Q}{dt} = \int_{cs} k \nabla T \cdot \mathbf{n} dA + \int_{cv} \dot{q} dV \quad (2-41)$$

y, aplicando el teorema de la divergencia al término de la integral de superficie se tiene

$$\frac{\delta Q}{dt} = \int_{cv} (\nabla \cdot k \nabla T + \dot{q}) dV \quad (2-42)$$

Después se deben tomar en cuenta los dos términos de la razón de trabajo. Para un elemento diferencial, se toma como cero la razón de trabajo de flecha (el desarrollado por algún efecto dentro del volumen de control); en consecuencia

$$\frac{\delta W_s}{dt} = 0 \quad (2-43)$$

La razón de trabajo viscoso se evalúa tomando el producto escalar de la velocidad y el esfuerzo viscoso en toda la superficie de control.

Para simplificar la evaluación de esta cantidad, se define el término Λ como la razón de trabajo viscoso por volumen unitario y se escribe el término de la ecuación de energía como

$$\frac{\delta W_\mu}{dt} = \int_{cv} \Lambda dV \quad (2-44)$$

Efectuando las sustituciones indicadas por las ecuaciones (2-42), (2-43) y (2-44), la ecuación de la energía queda como

$$\int_{cv} \left[\frac{\partial}{\partial t} (e\rho) + \nabla \cdot (e\rho\mathbf{v} + P\mathbf{v}) - \nabla \cdot k\nabla T - \dot{q} + \Lambda \right] dV = 0 \quad (2-45)$$

Nuevamente se usa el argumento de que para que en general sea verdadera la ecuación (2-45), el integrando debe ser cero. El resultado es la forma diferencial general de la primera ley de la termodinámica

$$\frac{\partial}{\partial t} (e\rho) + \nabla \cdot (e\rho\mathbf{v}) + \nabla \cdot P\mathbf{v} - \nabla \cdot k\nabla T - \dot{q} + \Lambda = 0 \quad (2-46)$$

Se puede lograr otra forma de la ecuación (2-46) escribiéndola como

$$e \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho\mathbf{v} \right] + \rho \left[\frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla e \right] + \nabla \cdot P\mathbf{v} - \nabla \cdot k\nabla T - \dot{q} + \Lambda = 0 \quad (2-47)$$

El primer término entre corchetes en la ecuación (2-47) es cero de acuerdo con la ecuación de continuidad (ecuación (2-32)). Es posible escribir el segundo término en corchetes en forma más sencilla en la forma de la derivada sustancial. Entonces la ecuación queda

$$\rho \frac{De}{Dt} + \nabla \cdot P\mathbf{v} - \nabla \cdot k\nabla T - \dot{q} + \Lambda = 0 \quad (2-48)$$

La ecuación (2-48) es bastante general, e incluye efectos convectivos y conductivos. Para un sistema estacionario, la conducción es el único modo significativo de transferencia de calor, lo que reduce la ecuación (2-48) a

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} - \nabla \cdot k\nabla T - \dot{q} = 0 \quad (2-49)$$

En este caso, la única forma significativa de energía en e es la energía interna, que se puede escribir como cT ,² en donde c es el calor específico. Entonces, la ecuación (2-49) queda

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot k\nabla T - \dot{q} = 0 \quad (2-50)$$

² Hablando con rigor, la relación $e = cT$ supone un comportamiento físico simple, como que todos los gases son ideales, los sólidos son incompresibles y demás. Aunque esta expresión no es verdadera en un sentido absoluto, es una aproximación que es válida prácticamente en todos los casos de interés para la ingeniería.

Para un medio isotrópico con propiedades materiales que se suponen independientes de la temperatura se puede escribir

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{k}{\rho c} \nabla^2 T - \frac{\dot{q}}{\rho c} = 0 \quad (2-51)$$

El cociente de las propiedades físicas $k/\rho c$, es en sí una propiedad física designada por la *difusividad térmica* α . En el apéndice A se tabulan valores de α , contra la temperatura para distintos materiales.

Para un sistema sin fuentes de calor, la ecuación (2-51) queda

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T \quad (2-52)$$

que se llama la segunda "ley" de Fourier de la conducción de calor, ecuación de campo de Fourier o sencillamente la ecuación de calor.

Para un sistema de estado estable con fuentes de calor, la ecuación (2-51) se reduce a la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (2-53)$$

En el caso sencillo de un medio conductor sin fuentes de calor y sin dependencia en el tiempo, la relación que resulta es la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 T = 0 \quad (2-54)$$

La ecuación de Laplace escrita en coordenadas cartesianas es

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (2-55)$$

en coordenadas cilíndricas es

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (2-56)$$

y en coordenadas esféricas es

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} = 0 \quad (2-57)$$

2.1-3.3 Segunda ley del movimiento de Newton; formulación diferencial

Como en los casos anteriores, el punto de partida para generar la forma diferencial de la segunda ley del movimiento de Newton será

la forma integral que se consideró antes. A continuación se repite la ecuación (2-28) como referencia

$$\sum \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \mathbf{v} \rho \, dV + \int_{cs} \mathbf{v} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dA \quad (2-28)$$

El primer miembro de la ecuación (2-28), la fuerza neta ejercida en el volumen de control, es la resultante de fuerzas superficiales y de cuerpo. Actuando en la superficie de un volumen de control fluido está el tensor de esfuerzo, que incluye efectos tanto de presión como viscosos. La única fuerza de cuerpo que se considera es la gravedad. La fuerza neta, incluyendo estos efectos, se puede escribir como

$$\sum \mathbf{F} = \int_{cs} \underline{\underline{\tau}} \cdot \mathbf{n} \, dA + \int_{cv} \rho \mathbf{g} \, dV \quad (2-58)$$

o, aplicando el teorema de la divergencia al término de la integral de superficie,

$$\sum \mathbf{F} = \int_{cv} (\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} + \rho \mathbf{g}) \, dV \quad (2-59)$$

También se puede modificar el segundo miembro de la ecuación (2-28) usando el teorema de la divergencia para remodelar el término de la integral de superficie, lo que da

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \mathbf{v} \rho \, dV + \int_{cs} \mathbf{v} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dA = \int_{cv} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v} \rho) + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \right] \, dV \quad (2-60)$$

Usando las ecuaciones (2-59) y (2-60), se puede escribir toda la ecuación como una integral de volumen

$$\int_{cv} \left[\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} + \rho \mathbf{g} - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v} \rho) - \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \right] \, dV = 0 \quad (2-61)$$

Y, usando los argumentos usuales, haciendo el integrando igual a cero, se obtiene la forma diferencial deseada

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} + \rho \mathbf{g} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v} \rho) + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \quad (2-62)$$

El segundo miembro de la ecuación (2-62), se puede modificar dando

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} + \rho \mathbf{g} = \mathbf{v} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \right] + \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] \quad (2-63)$$

El primer término entre corchetes a la derecha desaparece según se requiere por continuidad, ecuación (2-32), y se puede escribir el

segundo término entre corchetes en forma más compacta en función de la derivada sustancial, lo que resulta

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} \quad (2-64)$$

Las formas escalares cartesianas componentes de la ecuación (2-64) son

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = \rho g_x + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} \quad (2-65a)$$

$$\rho \frac{Dv_y}{Dt} = \rho g_y + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zy} \quad (2-65b)$$

$$\rho \frac{Dv_z}{Dt} = \rho g_z + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz} \quad (2-65c)$$

Las ecuaciones anteriores son válidas para todo tipo de fluido para cualquier clase de comportamiento de esfuerzo-razón de deformación. Para el caso de un fluido newtoniano (uno con viscosidad constante) en flujo laminar, incompresible, la forma vectorial resultante de la ecuación (2-64) es la forma incompresible de la ecuación de *Navier-Stokes*

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2-66)$$

Para un flujo en que los efectos viscosos son despreciables, la relación controladora es la ecuación de Euler

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla P \quad (2-67)$$

Estas ecuaciones, relativas al flujo de fluidos, permiten considerar con más detalle la forma general de la ecuación de la energía, ecuación (2-48), lo cual se hace en la sección de transferencia convectiva de calor en el capítulo 5.

2.2 CONCLUSION

En este capítulo se desarrollaron las ecuaciones necesarias para el análisis de la transferencia de calor en la forma de mosaico, integral y diferencial.

Las ecuaciones, que serán básicas a todos los análisis subsecuentes, son las siguientes:

Ley de la conservación de la masa
forma de mosaico

$$\frac{dm_{\sigma}}{dt} - \sum_{i=1}^N \frac{dm_i}{dt} = 0 \quad (2-7)$$

forma integral

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho \, dV + \int_{cs} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dA = 0 \quad (2-21)$$

forma diferencial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \quad (2-32)$$

Primera ley de la termodinámica
forma de mosaico

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W_s}{dt} - \frac{\delta W_{\mu}}{dt} = \frac{dE_{\sigma}}{dt} - \sum_{i=1}^N \left(e_i + \frac{P}{\rho} \right) \frac{dm_i}{dt} \quad (2-14)$$

forma integral

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W_s}{dt} - \frac{\delta W_{\mu}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} e \rho \, dV + \int_{cs} \left(e + \frac{P}{\rho} \right) \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dA \quad (2-26)$$

forma diferencial

$$\rho \frac{De}{Dt} + \nabla \cdot P \mathbf{v} - \nabla \cdot k \nabla T - \dot{q} + \Lambda = 0 \quad (2-48)$$

Segunda ley del movimiento de Newton
forma integral

$$\Sigma \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \mathbf{v} \rho \, dV + \int_{cs} \mathbf{v} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dA \quad (2-28)$$

forma diferencial

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} \quad (2-64)$$

Let $f(x) = x^2 + 1$ and $g(x) = x^2 - 1$. Then $f(x) + g(x) = 2x^2$ and $f(x) - g(x) = 2$.

Let $f(x) = x^2 + 1$ and $g(x) = x^2 - 1$. Then $f(x) + g(x) = 2x^2$ and $f(x) - g(x) = 2$.

Let $f(x) = x^2 + 1$ and $g(x) = x^2 - 1$. Then $f(x) + g(x) = 2x^2$ and $f(x) - g(x) = 2$.

Let $f(x) = x^2 + 1$ and $g(x) = x^2 - 1$. Then $f(x) + g(x) = 2x^2$ and $f(x) - g(x) = 2$.

Let $f(x) = x^2 + 1$ and $g(x) = x^2 - 1$. Then $f(x) + g(x) = 2x^2$ and $f(x) - g(x) = 2$.

Let $f(x) = x^2 + 1$ and $g(x) = x^2 - 1$. Then $f(x) + g(x) = 2x^2$ and $f(x) - g(x) = 2$.

Let $f(x) = x^2 + 1$ and $g(x) = x^2 - 1$. Then $f(x) + g(x) = 2x^2$ and $f(x) - g(x) = 2$.

Let $f(x) = x^2 + 1$ and $g(x) = x^2 - 1$. Then $f(x) + g(x) = 2x^2$ and $f(x) - g(x) = 2$.

Let $f(x) = x^2 + 1$ and $g(x) = x^2 - 1$. Then $f(x) + g(x) = 2x^2$ and $f(x) - g(x) = 2$.

Let $f(x) = x^2 + 1$ and $g(x) = x^2 - 1$. Then $f(x) + g(x) = 2x^2$ and $f(x) - g(x) = 2$.

Let $f(x) = x^2 + 1$ and $g(x) = x^2 - 1$. Then $f(x) + g(x) = 2x^2$ and $f(x) - g(x) = 2$.

Let $f(x) = x^2 + 1$ and $g(x) = x^2 - 1$. Then $f(x) + g(x) = 2x^2$ and $f(x) - g(x) = 2$.

Let $f(x) = x^2 + 1$ and $g(x) = x^2 - 1$. Then $f(x) + g(x) = 2x^2$ and $f(x) - g(x) = 2$.

Let $f(x) = x^2 + 1$ and $g(x) = x^2 - 1$. Then $f(x) + g(x) = 2x^2$ and $f(x) - g(x) = 2$.

Formulación numérica de las ecuaciones de transferencia de calor

En el capítulo anterior se presentaron las formulaciones características de los problemas de transferencia de calor en las formas de mosaico, diferencial e integral. Aunque los resultados de estos tipos de formulaciones son de gran importancia, rápidamente toman un papel secundario en la jerarquía de la transferencia de calor conforme se dispone cada vez más fácilmente de métodos como las computadoras digitales y conforme los analistas de la transferencia de calor adquieren mayor habilidad para la programación de computadoras y análisis numérico. Este capítulo está totalmente dedicado a aplicar el análisis numérico a la solución de los problemas de transferencia de calor, poniendo especial atención a las consideraciones necesarias para su uso en computadoras.

No se pretende que este estudio de la formulación numérica y el análisis sean exhaustivos o completos en cuanto a rigor matemático. Se presentarán técnicas en base a su utilidad práctica. Se explicará el vocabulario especial cuando se encuentren determinadas palabras por primera vez; por otra parte se supone que el lector tiene algo de experiencia previa en la programación FORTRAN.

3.1 CONSIDERACIONES FUNDAMENTALES DE LA FORMULACION NUMERICA

La introducción de este capítulo se centra principalmente en la conducción del calor; en los capítulos 5 y 6 se dan algunas soluciones a problemas de convección y radiación por métodos numéricos.

Las ecuaciones diferenciales de mayor interés en la transferencia de calor por conducción son la ecuación de calor, la ecuación de Poisson y la ecuación de Laplace, que se desarrollaron en el capítulo

2 y se presentaron como las ecuaciones (2-52), (2-53) y (2-54) respectivamente. A continuación se repiten y reenumeran las expresiones para referencia en este capítulo.

$$\text{Ecuación del calor} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T \quad (3-1)$$

$$\text{Ecuación de Poisson} \quad \nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (3-2)$$

$$\text{Ecuación de Laplace} \quad \nabla^2 T = 0 \quad (3-3)$$

Se puede considerar que cada una de estas tres ecuaciones son un caso especial de la ecuación (2-51), cuyo desarrollo se repite abajo para futuras referencias. La figura 3.1 muestra el elemento bidimensional de volumen y la nomenclatura para el desarrollo que sigue. Al volumen de material se llama "nodo i " y es uno de muchos volúmenes o "nodos" de esa clase que forman el volumen total del material en que se tiene interés. El balance de calor (la aplicación de la primera ley de la termodinámica) en el nodo i da la siguiente expresión:

$$\left[\frac{\rho c T|_{t+\Delta t} - \rho c T|_t}{\Delta t} \right] \Delta V = k_x \Delta y \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x+\Delta x, t=\xi} - k_x \Delta y \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x, t=\xi} + k_y \Delta x \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y+\Delta y, t=\xi} - k_y \Delta x \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y, t=\xi} + \dot{q}(x, y, t) \Delta V \quad (3-4)$$

en donde k_x y k_y representan los valores de la conductividad térmica en las direcciones x y y respectivamente; el tiempo ξ en el que se aplican estos términos está en el intervalo $t \leq \xi \leq t + \Delta t$; y el volumen nodal está dado por $\Delta V = \Delta x \Delta y (1)$.

Conforme Δx , Δy , y Δt se aproximan a cero en el límite se obtiene una ecuación diferencial general para un medio conductor,

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \dot{q}$$

con la posibilidad de que ρ , c , k_x , y k_y dependan de la posición y \dot{q} pueda variar tanto con la posición como con el tiempo. Para un medio isotrópico, se puede considerar que ρ , c y k son constantes, con lo que la expresión se reduce a una forma más conocida

$$\nabla^2 T + \frac{q}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3-5)$$

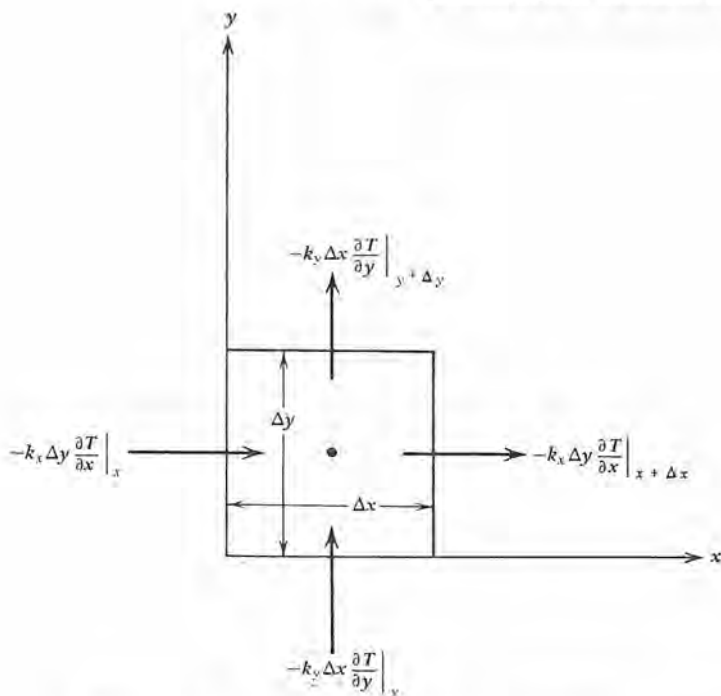


Figura 3.1 Elemento de volumen en un medio conductor.

Se ve que la ecuación (3-5) es el equivalente de la ecuación (2-51) que se obtuvo en el capítulo anterior.

En este punto hay dos enfoques posibles para la formulación de un problema de conducción transitoria de calor en la forma diferencial; son:

1. La aplicación de métodos de diferencias finitas a la ecuación (3-5).
2. El uso directo de la ecuación (3-4).

Al primero de estos enfoques se le llamará el "método de diferencias" y al segundo el "método de balance de calor".

Aunque son diferentes, los dos enfoques para el desarrollo de ecuaciones de diferencias dan resultados equivalentes. Las técnicas de diferencias aplicadas a una ecuación diferencial conocida son compactas y útiles para estudiar consideraciones teóricas tales como la estabilidad numérica. Sin embargo, es posible tener mayor flexibilidad con el método del balance de calor; también es posible tener mayor comprensión o percepción física. Estos métodos se estudian por separado en las secciones siguientes.

3.1-1 Representación de las derivadas por diferencias finitas

La sustitución de las derivadas del espacio y tiempo por diferencias finitas significa expresar las derivadas en función de un desarrollo truncado de serie de Taylor. En el espacio unidimensional, T desarrollado alrededor del punto x_i está dado por

$$T(x_i + h) = T(x_i) + h \left(\frac{dT}{dx} \right)_i + \frac{h^2}{2} \left(\frac{d^2T}{dx^2} \right)_i + \frac{h^3}{6} \left(\frac{d^3T}{dx^3} \right)_i + \cdots \quad (3-6)$$

y en forma análoga,

$$T(x_i - h) = T(x_i) - h \left(\frac{dT}{dx} \right)_i + \frac{h^2}{2} \left(\frac{d^2T}{dx^2} \right)_i - \frac{h^3}{6} \left(\frac{d^3T}{dx^3} \right)_i + \cdots \quad (3-7)$$

Sumando las ecuaciones (3-6) y (3-7) en los términos que contienen h^3 se obtiene

$$\left. \frac{d^2T}{dx^2} \right|_i = \frac{[T(x_i + h) + T(x_i - h) - 2T(x_i)]}{h^2} + O(h^2) \quad (3-8)$$

El término aditivo al final de la ecuación (3-8), $O(h^2)$, indica que los términos truncados provocan que el "error" en esta representación de la segunda derivada sea *del orden de* h^2 .

El resultado dado por la ecuación (3-8) se llama una operación de *diferencia central de 3 puntos*. Para 3 puntos igualmente espaciados, en que se designa por el índice i al del centro, se puede escribir la representación de la diferencia central para la segunda derivada como

$$\left. \frac{d^2T}{dx^2} \right|_i = \frac{T_{i+1} + T_{i-1} - 2T_i}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (3-9)$$

Si se trunca la ecuación (3-6) después del término lineal en h , el resultado es

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_i = \frac{T(x_i + h) - T(x_i)}{h} + O(h) = \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3-10)$$

que se llama la representación de la *primera diferencia hacia adelante* para la primera derivada. La forma de la *primera diferencia hacia atrás* viene de la ecuación (3-7), que cuando se trunca después del término lineal en h da

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_i = \frac{T(x_i) - T(x_i - h)}{h} + O(h) = \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3-11)$$

Otra forma de lograr las primeras derivadas es restar la ecuación (3-6) de la ecuación (3-7) y despreciar los términos que involucran h^3 y de orden mayor. La expresión resultante para dT/dx es

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_i = \frac{T(x_i + h) - T(x_i - h)}{2h} + O(h^2) = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (3-12)$$

que es la representación de la *diferencia central* de la primera derivada, dT/dx .

En estas representaciones sencillas y unidimensionales para las derivadas se debe observar que cada una tiene algún error, que es conveniente y fácil de usar y comprender la notación de los índices para los espaciados iguales de los nodos, y que es posible obtener una extensión sencilla a dos y tres dimensiones.

3.1-2 Formulación de la ecuación de diferencia usando métodos de diferencias

Tomando en cuenta una vez más la ecuación (3-5), se pueden emplear distintos métodos de diferenciación para remplazar las derivadas del tiempo y espacio. Como un enfoque inicial se escribe el término $\nabla^2 T$ en forma de diferencia central de manera que en dos dimensiones se tiene

$$\frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{\Delta y^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T_{i,j}}{\partial t} \quad (3-13)$$

La temperatura del nodo i, j , designada $T_{i,j}$, se relaciona con el rectángulo mostrado en la figura 3.2. El rectángulo, delineado con líneas punteadas, para el que i, j es el centro, está caracterizado por propiedades en su centro tales como $T_{i,j}$, $\rho_{i,j}$, y $c_{i,j}$. Las áreas rectangulares mostradas comprenden una malla rectangular en la cual se subdivide un medio conductor total. Los puntos centrales de esos rectángulos o subvolúmenes también forman una malla rectangular con puntos de intersección designados como *nodos*. Se supone que los valores de propiedad en el punto nodal son representativos del subvolumen que tiene ese nodo como punto central; en esa forma se "discretizan" las propiedades como valores aislados para cada nodo en un arreglo.

La figura 3.2 muestra un arreglo en que los espaciados en la dirección de las x son iguales y con valor de Δx , y Δy es el espaciado constante en la dirección de las y ; sin embargo, $\Delta x \neq \Delta y$. Se puede tener una simplificación adicional en la ecuación (3-13) si el arreglo es cuadrado, o sea que $\Delta x = \Delta y$, en cuyo caso la ecuación (3-13) se convierte en

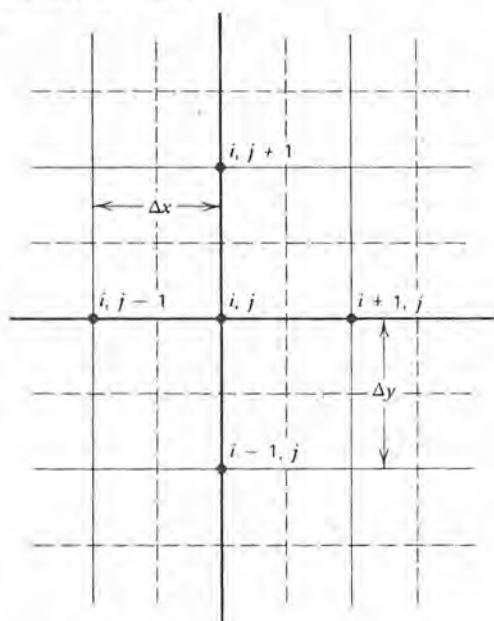


Figura 3.2 Malla de diferencias finitas para el nodo i, j en un medio conductor.

$$T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1} + \frac{\dot{q}}{k} \Delta x^2 = \frac{\Delta x^2}{\alpha} \frac{\partial T_{i,j}}{\partial t} \quad (3-14)$$

Se completa la formulación de diferencia cuando se expresa la primera derivada en el tiempo en forma de diferencia hacia adelante, hacia atrás o central como lo indican las ecuaciones (3-10), (3-11) y (3-12) respectivamente. La forma de la diferencia central dada por la ecuación (3-12) conduce a problemas con inestabilidad numérica, por lo que no se considera en lo sucesivo. Las otras dos formas se emplean en el siguiente tema.

3.1-2.1 El método explícito

Un sistema numérico *explícito* es aquel mediante el cual se puede obtener directamente la cantidad desconocida.

Cuando se escribe la derivada del tiempo de la ecuación (3-14) en forma de primera diferencia hacia adelante se obtiene

$$\begin{aligned} T_{i-1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i+1,j}^n + T_{i,j-1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j+1}^n + \frac{\dot{q}}{k} \Delta x^2 \\ = \frac{\Delta x^2}{\alpha \Delta t} (T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n) \end{aligned} \quad (3-15)$$

en donde el exponente n indica el n ésimo paso en el tiempo.

La ecuación (3-15) es la representación explícita clásica de la expresión bidimensional de la conducción transitoria con generación interna de calor. La incógnita $T_{i,j}^{n+1}$ aparece solamente una vez, por lo que recibe el nombre de "explícito". Una solución para $T_{i,j}^{n+1}$ requiere inicialmente de una distribución conocida de temperatura, donde $n = 0$. Esta distribución inicial puede ser conocida en alguna forma, o se puede resolver la distribución de estado estable con condiciones conocidas de frontera, haciendo igual a cero la derivada del tiempo en la ecuación (3-14). Esta operación da la forma de la diferencia finita bidimensional de la ecuación de Poisson.

$$T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1} + \frac{\dot{q}}{k} \Delta x^2 = 0 \quad (3-16)$$

Se puede usar la solución de la ecuación (3-16) para $T_{i,j}$ como valores iniciales para un problema que involucre el uso de la ecuación (3.15). Puede ser más difícil resolver la ecuación (3-16) que el caso transitorio. La parte más tardada de la solución a un problema de conducción transitorio puede ser llegar a las condiciones iniciales válidas.

Para la mayoría de los problemas se conocen las condiciones iniciales o son obvias. Una técnica para resolver un problema de estado estable es el de suponer una distribución inicial arbitraria de temperatura y desarrollar una solución transitoria hasta que $T_{i,j}^{n+1} \rightarrow T_{i,j}^n$.

Siempre que sea posible en los siguientes desarrollos se escriben las ecuaciones de diferencias en una dimensión espacial en vez de en las formas más complejas bi y tridimensionales. En una dimensión, las ecuaciones (3.14) y (3-15) quedan

$$T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1} + \frac{\dot{q}}{k} \Delta x^2 = \frac{\Delta x^2}{\alpha} \frac{\partial T_i}{\partial t} \quad (3-17)$$

y

$$T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n + \frac{\dot{q}}{k} \Delta x^2 = \frac{\Delta x^2}{\alpha \Delta t} (T_i^{n+1} - T_i^n) \quad (3-18)$$

Despejando el valor de T_i^{n+1} de la ecuación (3-18) se tiene

$$T_i^{n+1} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \left[T_{i-1}^n + T_{i+1}^n + \frac{\dot{q} \Delta x^2}{k} + \left(\frac{\Delta x^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_i^n \right] \quad (3-19)$$

3.1-2.2 El método implícito

En una formulación *implícita* la incógnita aparece en una serie de ecuaciones que se deben resolver simultáneamente.

Ahora se escribe la ecuación (3-14) con la derivada del tiempo

en forma de primera diferencia hacia atrás, con lo que se obtiene la expresión

$$T_{i-1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1} + \frac{\dot{q}}{k} \Delta x^2 = \frac{\Delta x^2}{\alpha \Delta t} (T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n) \quad (3-20)$$

No se puede despejar directamente la incógnita $T_{i,j}^{n+1}$ de la ecuación (3-20), de donde proviene el nombre de "implícito". La solución se obtiene resolviendo simultáneamente el conjunto de ecuaciones algebraicas que producen un incremento $n + 1$. de tiempo.

La ecuación (3-20) es una forma "totalmente implícita" para resolver el problema de conducción transitorio de calor con generación. Ahora se estudiará un artificio "mixto".

3.2-2.2 Método mixto, o de promedio ponderado

También se pueden combinar los métodos explícitos e implícitos por una técnica de *promedio ponderado*, o *mixta*. El procedimiento consiste en multiplicar la ecuación (3-20) por un factor F , en donde F tiene un valor entre 0 y 1; multiplicar la ecuación (3-15) por $(1 - F)$; y sumar. Efectuando estos pasos se obtiene

$$F[T_{i-1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}] + (1 - F)[T_{i-1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i+1,j}^n + T_{i,j-1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j+1}^n] + \frac{\dot{q}}{k} \Delta x^2 = \frac{\Delta x^2}{\alpha \Delta t} (T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n) \quad (3-21)$$

Se obtienen formas explícitas e implícitas para $F = 0$ y $F = 1$, respectivamente. Si se hace $F = 1/2$, se obtiene el promedio aritmético de los artificios explícito e implícito; este valor de F está asociado con el método de Crank-Nicholson.¹

Hasta ahora el examen de los artificios de diferenciación ha incluido dos niveles de tiempo, t y $t + \Delta t$ (δn y $n + 1$), y derivadas espaciales cuando más con 3 ($\delta 5$ en tres dimensiones) puntos espaciales. Los tres métodos utilizados en considerar la derivada de tiempo han sido la primera diferencia hacia adelante (explícita), primera diferencia hacia atrás (implícita), y el promedio ponderado de ambas (implícita). Estos son los enfoques básicos para expresar la ecuación general de conducción de calor en forma de diferencias. Sin embargo, es posible que existan variaciones a estos enfoques, algunos de los cuales se estudian posteriormente en este capítulo.

¹ J. Crank y P. Nicholson, Proc. Cambridge Phil. Soc. 43 (1947): 50-64.

3.1-3 Formulación de la ecuación de diferencias usando el método de balance de calor

Es muy directa y fácil la diferenciación de las ecuaciones diferenciales en la forma descrita en la sección anterior. Cuando se presentan determinados tipos de complicaciones, este método puede resultar muy torpe. Las complicaciones comunes pueden ser

1. Los efectos adicionales de la radiación y convección.
2. Propiedades térmicas que varían espacialmente.
3. La generación de calor que puede variar con el tiempo y la posición.
4. Tamaños desiguales de nodos.
5. Formas variables del nodo.
6. Cambios en fase.

Usando el método del *balance de calor*, se consideran estos factores en forma mucho más sencilla y con una mejor percepción física.

La ecuación (3-4) comprende la herramienta principal para la formulación numérica, empleando el enfoque del balance del calor. La figura 3.3 muestra el nodo i rodeado por sus cuatro nodos vecinos inmediatos. Las cantidades designadas por δ_{ij} son los semiespesores de cada nodo en la dirección mostrada; cada uno puede tener un valor distinto. Los subíndices i, j designan el nodo de referencia, i , y el nodo adyacente j . El sistema de subíndices es aparente de la figura.

El flujo de calor en la frontera del nodo i se puede expresar ahora como

$$q_{1 \rightarrow i} = \frac{1}{R_{1i} + R_{i1}} (T_1 - T_i) = K_{1i}(T_1 - T_i)$$

$$q_{2 \rightarrow i} = \frac{1}{R_{2i} + R_{i2}} (T_2 - T_i) = K_{2i}(T_2 - T_i)$$

$$q_{3 \rightarrow i} = \frac{1}{R_{3i} + R_{i3}} (T_3 - T_i) = K_{3i}(T_3 - T_i)$$

$$q_{4 \rightarrow i} = \frac{1}{R_{4i} + R_{i4}} (T_4 - T_i) = K_{4i}(T_4 - T_i)$$

Las cantidades designadas R_{ij} son las resistencias térmicas entre el nodo i y la frontera con el nodo j ; $R_{ij} = \delta_{ij}/k_i A_{ij}$. Las cantidades designadas K_{ij} son las conductancias térmicas entre los nodos i y j ; note que $K_{ij} = K_{ji} = 1/(R_{ij} + R_{ji})$. Las cantidades escritas como $q_{j \rightarrow i}$ son los flujos de calor a través de las fronteras entre los nodos j y el nodo i .

Ahora se aplica la ecuación (3-4) al nodo i , usando la nomenclatura recién desarrollada para obtener

$$V_i \left[\frac{\rho c T_i|_{t+\Delta t} - \rho c T_i|_t}{\Delta t} \right] = \sum_{j=1}^N K_{ij}^{\xi} T_j^{\xi} - T_i^{\xi} \sum_{j=1}^N K_{ij}^{\xi} + \dot{q}_i^{\xi} V_i \quad (3-22)$$

en donde las sumatorias son sobre j desde 1 a N , en donde N representa el número total de nodos en la comunicación térmica con el nodo i . El superíndice ξ designa el nivel de tiempo cuando se evalúan todos los términos.

Como anteriormente se hizo, en este caso hay que hacer elecciones acerca de los niveles de tiempo que hacen explícitas o implícitas las ecuaciones resultantes de las diferencias.

Haciendo el superíndice $\xi = t$, la ecuación (3.22) se reduce a la forma *explícita*

$$T_i^{n+1} = T_i \left[1 - \sum_{j=1}^N \frac{K_{ij}}{C_i} \right] + \sum_{j=1}^N \frac{K_{ij}}{C_i} T_j + \dot{q}_i \frac{V_i}{C_i} \quad (3-23)$$

La cantidad C_i incluye una combinación de términos; está definida como $C_i \equiv \rho_i c_i V_i / \Delta t$. Las cantidades sin índices están evaluadas al nivel t de tiempo. Esta formulación, al hacer $\xi = t$, equivale a un artificio de primera diferenciación hacia adelante para la derivada de tiempo en el desarrollo anterior y la ecuación (3-23) es explícita en T_i^{n+1} .

Haciendo el superíndice $\xi = t + \Delta t$ en la ecuación (3-22), se obtiene una forma *implícita*

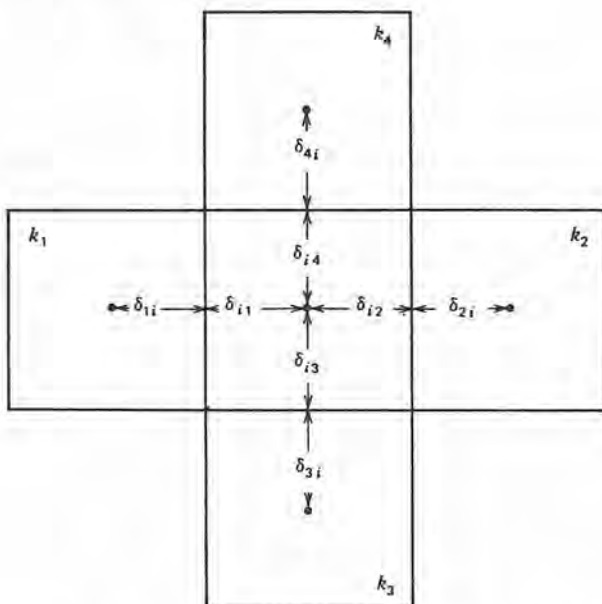


Figura 3.3 El nodo i y los puntos de nodos vecinos para el análisis de balance de calor.

$$T_i^{n+1} = \frac{1}{\left[1 + \sum_{j=1}^N \frac{K_{ij}}{C_i}\right]^{n+1}} \left[T_i^n + \left(\frac{\dot{q}_i V_i}{C_i} \right)^{n+1} + \sum_{j=1}^N \left(\frac{K_{ij}}{C_i} T_j \right)^{n+1} \right] \quad (3-24)$$

Esta forma equivale a la que se obtuvo por primera diferencia hacia atrás para la derivada en el tiempo en la formulación anterior. Todas las propiedades físicas de la ecuación (3-24) están evaluadas al tiempo $n + 1$. Con frecuencia se hace una corrección, cuando las propiedades cambian rápidamente con el tiempo, para evaluar las propiedades físicas a la temperatura promedio durante el intervalo Δt , donde se designa $T_i^{n+1/2}$ a esta temperatura la cual se calcula de acuerdo con la expresión

$$T_i^{n+1/2} = \frac{T_i^n + T_i^{n+1}}{2} \quad (3-25)$$

Nuevamente se obtiene un promedio de las formas explícita e implícita introduciendo el factor ponderante F . La forma resultante, que es implícita, es

$$T_i^{n+1} = \frac{F}{\left[1 + \sum_{j=1}^N \frac{K_{ij}}{C_i}\right]^{n+1}} \left[T_i^n + \left(\dot{q}_i \frac{V_i}{C_i} \right)^{n+1} + \sum_{j=1}^N \left(\frac{K_{ij}}{C_i} T_j \right)^{n+1} \right] \\ + (1 - F) \left[T_i^n \left(1 - \sum_{j=1}^N K_{ij} \right) + \sum_{j=1}^N \left(\frac{K_{ij}}{C_i} T_j \right)^n + \left(\frac{\dot{q}_i V_i}{C_i} \right)^n \right] \quad (3-26)$$

Las propiedades térmicas de la ecuación (3-26) se pueden evaluar nuevamente a la temperatura promedio $T^{n+1/2}$, dada por la ecuación (3-25), si así se desea. Con $F = 1/2$, o sea dando igual ponderación a la forma explícita que a la implícita, se logra la formulación Crank-Nicholson.

3.1-3.1 Condiciones de frontera y conductancia internodo

Como se vio en el capítulo 2, la formulación completa de cualquier problema requiere determinar las condiciones iniciales y de frontera al igual que expresar la ecuación que gobierna. Este requerimiento sigue presente en el caso de las ecuaciones de las diferencias. Las condiciones de frontera en los problemas de conducción de calor están en la forma de temperaturas especificadas o flujos de calor en las fronteras del sistema. La temperatura de la frontera o la temperatura del medio fluido adyacente es una especificación común; también se pueden encontrar flujos de calor radiante en las fronteras.

Las soluciones numéricas a las ecuaciones de diferencias son más adecuadas para resolver problemas con condiciones complejas de frontera que las soluciones analíticas. El enfoque más directo para manejar condiciones de frontera es el de definir nodos de frontera e incorporar las condiciones de frontera a las conductancias internodales. En la tabla 3.1 se ilustran algunos ejemplos de estos procedimientos para algunos casos importantes.

Los ejemplos mostrados en la tabla 3.1 son algunos de los casos más comunes; hay otros posibles. Con el método del balance de calor no hay mayor problema para manejar condiciones de frontera que el de la tediosa contabilidad.

3.2 PROCESOS DE COMPUTACION PARA PROBLEMAS FORMULADOS NUMERICAMENTE

El desarrollo que se ha seguido hasta este momento ha indicado algunas formas básicas de reducir la distribución de la temperatura en un medio conductor a un conjunto de ecuaciones algebraicas, una para cada nodo del sistema. Las soluciones del conjunto de ecuaciones dan la temperatura en cada nodo.

Para un proceso de solución *explícita*, cada ecuación del conjunto es independiente del resto, y la solución no presenta problema.

Por otra parte, los procesos *implícitos* requieren que las ecuaciones se resuelvan simultáneamente. Para un conjunto N de ecuaciones que involucran la incógnita T_i^{n+1} implícitamente, la forma matricial del conjunto se puede representar como

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{n+1} \\ \\ T_2^{n+1} \\ \\ T_N^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ \\ B_2 \\ \\ B_N \end{pmatrix} \quad (3-27)$$

o en notación matricial más sencilla,

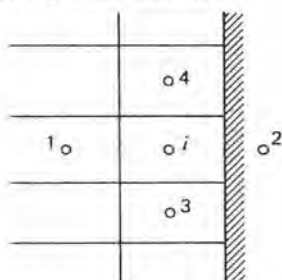
$$AT = B \quad (3-28)$$

Tabla 3.1 Conducciones internodales para algunas condiciones importantes de frontera.

Caso

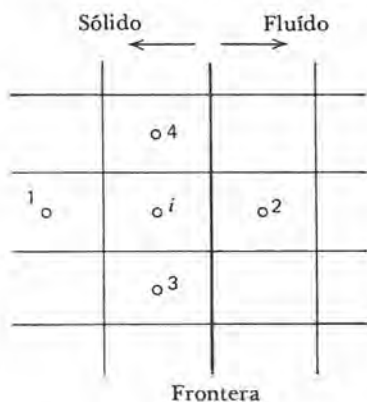
Conductancia internodal

1. Superficie adiabática



$$K_{i2} = 0$$

2. Convección en una superficie



$$K_{i2} = \frac{1}{\frac{\delta_{i2}}{k_i A_{i2}} + \frac{1}{h_i A_{i2}}}$$

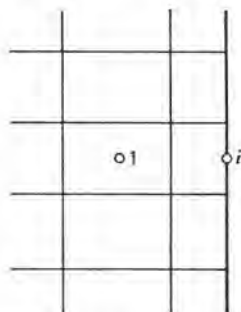
Casos: a) $T_{\text{pared}} = T_{\infty} : h_i \simeq \infty$

b) $h_i = \text{constante}$

c) $h_i = h_i(T)$

Ejemplo, ecuación (5-166)

3. Radiación en una superficie



$$K_{is} = A_{is} F_{is} \sigma \frac{T_i^4 - T_s^4}{T_i - T_s}$$

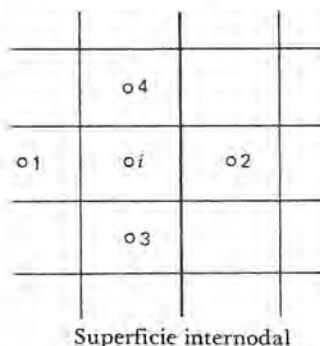
s = medio ambiente a la temperatura T_s

F_{is} = Factor de forma

Para una condición de radiación en una superficie, son útiles los nodos centrados en la superficie

Tabla 3.1 (continúa)

Caso	Conductancia internodal
4. Una resistencia conocida de contacto R_c entre nodos	



$$K_{i2} = \frac{1}{\frac{\delta_{i2}}{k_i A_{i2}} + \frac{\delta_{2i}}{k_2 A_{2i}} + R_c}$$

5. Un flujo específico de calor

$$Q_{2-i} = q_2 A_{2i}$$

donde q_2 es el flujo de calor en la frontera

Los términos en la matriz de coeficientes, las A_{ij} , incluyen valores de temperaturas determinadas en incrementos anteriores del tiempo. El número de nodos N puede ser considerablemente grande, haciendo la solución para T virtualmente imposible sin la ayuda de una computadora digital.

Comúnmente se emplean dos técnicas de soluciones para conjuntos de ecuaciones algebraicas como lo da la ecuación (3-27); a éstas se les denomina la eliminación de Gauss y la iteración de Gauss-Seidel, que se estudian brevemente en las secciones siguientes.

3.2-1 La técnica de eliminación de Gauss

Formulando un problema de conducción de calor en forma de diferencia finita se generan conjuntos de ecuaciones algebraicas. La técnica de *eliminación de Gauss* es un método para resolver conjuntos de ecuaciones algebraicas; es una técnica directa en que se obtiene cada valor en la solución evaluando solamente una vez y se usa subsecuentemente para resolver las incógnitas restantes. La eliminación de Gauss es particularmente atractiva si el conjunto de ecuaciones es lineal; este es el caso cuando en la ecuación (3-27), las A_{ij} y B_i son constantes (o sea que no dependen de la temperatura).

El concepto básico en el artificio de eliminación de Gauss es la solución de un conjunto de ecuaciones algebraicas por sustitución. Se examina el siguiente conjunto general de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$A_{11}T_1 + A_{12}T_2 + A_{13}T_3 = B_1$$

$$A_{21}T_1 + A_{22}T_2 + A_{23}T_3 = B_2$$

$$A_{31}T_1 + A_{32}T_2 + A_{33}T_3 = B_3$$

Un requerimiento inicial es que A_{11} sea distinto de cero. Cualquier arreglo que involucre un coeficiente cero para el primer término de la primera ecuación debe alterarse intercambiando dos renglones.

Con $A_{11} \neq 0$, se define un multiplicador m_2 como

$$m_2 = \frac{A_{21}}{A_{11}}$$

La primera ecuación se multiplica por m_2 y se resta de la segunda, con lo que se obtiene

$$(A_{21} - m_2 A_{11})T_1 + (A_{22} - m_2 A_{12})T_2 + (A_{23} - m_2 A_{13})T_3 = B_2 - m_2 B_1$$

Se definen los siguientes coeficientes:

$$A_{21}' = A_{21} - m_2 A_{11} \equiv 0$$

$$A_{22}' = A_{22} - m_2 A_{12}$$

$$A_{23}' = A_{23} - m_2 A_{13}$$

$$B_2' = B_2 - m_2 B_1$$

Ya que $A_{21}' = 0$, el nuevo conjunto de ecuaciones queda

$$A_{11}T_1 + A_{12}T_2 + A_{13}T_3 = B_1$$

$$A_{22}'T_2 + A_{23}'T_3 = B_2'$$

$$A_{31}T_1 + A_{32}T_2 + A_{33}T_3 = B_3$$

Ahora se opera sobre la tercera ecuación de la misma forma que en la segunda; cada término de la primera ecuación se multiplica por el factor m_3 , definido como

$$m_3 = \frac{A_{31}}{A_{11}}$$

y se resta de la tercera ecuación, lo que da

$$A_{32}'T_2 + A_{33}'T_3 = B_3'$$

donde

$$A_{31}' = A_{31} - m_3 A_{11} \equiv 0$$

$$A_{32}' = A_{32} - m_3 A_{12}$$

$$A_{33}' = A_{33} - m_3 A_{13}$$

$$B_3' = B_3 - m_3 B_1$$

Ahora se ha reducido el conjunto original de tres ecuaciones a

$$A_{11}T_1 + A_{12}T_2 + A_{13}T_3 = B_1$$

$$A_{22}'T_2 + A_{23}'T_3 = B_2'$$

$$A_{32}'T_2 + A_{33}'T_3 = B_3'$$

Se opera en las dos últimas ecuaciones en forma análoga, por lo cual se define el multiplicador m_3' como

$$m_3' \equiv \frac{A_{32}'}{A_{22}'}$$

La segunda ecuación es el conjunto modificado multiplicado por m_3' y restado de la tercera ecuación, lo que da

$$A_{33}''T_3 = B_3''$$

donde

$$A_{32}'' = A_{32}' - m_3' A_{22}' \equiv 0$$

$$A_{33}'' = A_{33}' - m_3' A_{23}'$$

$$B_3'' = B_3' - m_3' B_2'$$

El conjunto final de ecuaciones algebraicas queda

$$A_{11}T_1 + A_{12}T_2 + A_{13}T_3 = B_1$$

$$A_{22}'T_2 + A_{23}'T_3 = B_2'$$

$$A_{33}''T_3 = B_3''$$

en donde T_1 tiene un coeficiente distinto de cero en la primera ecuación solamente; cada una de las ecuaciones subsiguientes tiene un término menos que su predecesora.

Se obtienen los valores de T_1 , T_2 , y T_3 resolviendo la tercera ecuación para T_3 ; sustituyendo T_3 en la segunda ecuación y despejando el valor de T_2 ; y finalmente, sustituyendo los valores de T_3 y T_2 en la primera ecuación y despejando el valor de T_1 . Las expresiones para T_1 , T_2 , y T_3 son

$$T_3 = B_3''/A_{33}''$$

$$T_2 = (B_2' - A_{23}'T_3)/A_{22}'$$

$$T_1 = (B_1 - A_{12}T_2 - A_{13}T_3)/A_{11}$$

En caso de que A_{11} , A_{22}' , ó A_{33}'' sean cero, el sistema original de ecuaciones es singular y no tiene solución.

El procedimiento de eliminación de Gauss normalmente se aplica dándole un enfoque intuitivo. Es una forma sistemática de usar los procesos de sustitución para resolver un conjunto de ecuaciones algebraicas simultáneas.

El siguiente problema de ejemplo, aunque es breve, debe ayudar a comprender el procedimiento de eliminación de Gauss.

Ejemplo 3.1

Resolver el siguiente conjunto de ecuaciones para las incógnitas T_1 , T_2 , y T_3 :

$$2T_1 + 3T_2 + T_3 = 5$$

$$2T_1 - T_2 + 4T_3 = 3$$

$$T_1 + 4T_2 + 2T_3 = 6$$

Conviene usar una tabla para llevar registro de los términos.

Coeficientes			Constantes
2	3	1	5
2	-1	4	3
1	4	2	6
	-4	3	-2
	5/2	3/2	7/2
		27/8	18/8

Se tienen las siguientes ecuaciones:

$$2T_1 + 3T_2 + T_3 = 5$$

$$-4T_2 + 3T_3 = -2$$

$$27T_3 = 18$$

El cálculo correspondiente da, para T_i , los valores

$$T_3 = 18/27 = 2/3$$

$$T_2 = \frac{-2 - 2}{-4} = 1$$

$$T_1 = \frac{5 - 3 - 2/3}{2} = 2/3$$

La utilidad de cualquier proceso de solución numérica está en su adaptabilidad a la computadora digital para resolver grandes conjuntos de ecuaciones. La técnica de solución de eliminación de Gauss es una herramienta útil y ahora se enuncia en una forma más general.

Teniendo N ecuaciones lineales en N incógnitas, se puede escribir, en general,

$$A_{11}T_1 + A_{12}T_2 + \cdots + A_{1j}T_j + \cdots + A_{1N}T_N = B_1$$

$$A_{21}T_1 + A_{22}T_2 + \cdots + A_{2j}T_j + \cdots + A_{2N}T_N = B_2$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$A_{i1}T_1 + A_{i2}T_2 + \cdots + A_{ij}T_j + \cdots + A_{iN}T_N = B_i$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$A_{N1}T_1 + A_{N2}T_2 + \cdots + A_{Nj}T_j + \cdots + A_{NN}T_N = B_N$$

Ahora se definen los multiplicadores $m_i \equiv A_{i1}/A_{11}$, y se resta m_i multiplicado por la primera ecuación de la i -ésima ecuación para obtener

$$A_{11}T_1 + A_{12}T_2 + \cdots + A_{1j}T_j + \cdots + A_{1N}T_N = B_1$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$0 + A_{i2}'T_2 + \cdots + A_{ij}'T_j + \cdots + A_{iN}'T_N = B_i'$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$0 + A_{N2}'T_2 + \cdots + A_{Nj}'T_j + \cdots + A_{NN}'T_N = B_N'$$

Este proceso se sigue; cada operación sucesiva reduce el número de términos en las ecuaciones sucesivas en 1. El resultado de todas las operaciones de este tipo es el conjunto modificado

$$A_{11}T_1 + A_{12}T_2 + \cdots + A_{1j}T_j + \cdots + A_{1N}T_N = B_1$$

$$A_{22}'T_2 + \cdots + A_{2j}'T_j + \cdots + A_{2N}'T_N = B_2$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$A_{jj}^{(i-1)}T_j + \cdots + A_{jN}^{(i-1)}T_N = B_j^{(i-1)}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$A_{NN}^{(N-1)}T_N = B_N^{(N-1)}$$

Como antes, la solución para T se obtiene resolviendo el valor de T_N y trabajando en forma regresiva hasta que se obtiene el valor de T_1 .

En la figura 3.4 se muestran los diagramas de flujo asociados con la eliminación de Gauss. En el siguiente capítulo se da un problema de ejemplo usando una solución de computadora con una eliminación de Gauss.

Hay algo de dificultad cuando existen no linealidades. Si las A_{ij} y B_i dependen de la temperatura, entonces se estiman inicialmente para resolver los valores de T_i . Luego se determinan nuevos valores para los coeficientes y se vuelven a calcular las temperaturas, usando la eliminación de Gauss. Se sigue este proceso hasta que las propiedades y las T_i obtenidas de los cálculos sucesivos difieran en menos que una cantidad prescrita.

Al aumentar el número de incógnitas y cuando hay no linealidades, puede ser más atractivo usar una solución iterativa o indirecta que la técnica directa que se acaba de considerar.

3.2-2 La técnica de iteración de Gauss-Seidel

Frecuentemente se usa una técnica indirecta o iterativa para resolver conjuntos de ecuaciones algebraicas simultáneas cuando las técnicas directas son muy imprácticas. Un método común es el llamado *iteración de Gauss-Seidel*.

El enfoque empleado en la iteración de Gauss-Seidel se ilustra considerando el conjunto general de estas ecuaciones algebraicas:

$$A_{11}T_1 + A_{12}T_2 + A_{13}T_3 = B_1$$

$$A_{21}T_1 + A_{22}T_2 + A_{23}T_3 = B_2$$

$$A_{31}T_1 + A_{32}T_2 + A_{33}T_3 = B_3$$

Para $A_{11} \neq 0, A_{22} \neq 0, A_{33} \neq 0$, o en general, $A_{ii} \neq 0$, cada una de las T_i se obtiene con

$$T_1 = \frac{1}{A_{11}} (B_1 - A_{12}T_2 - A_{13}T_3) \quad (i)$$

$$T_2 = \frac{1}{A_{22}} (B_2 - A_{21}T_1 - A_{23}T_3) \quad (ii)$$

$$T_3 = \frac{1}{A_{33}} (B_3 - A_{31}T_1 - A_{32}T_2) \quad (iii)$$

Ahora el procedimiento es suponer valores iniciales de las variables dependientes y actualizar estas estimaciones resolviendo las ecuaciones anteriores en el orden mostrado, usando siempre la infor-

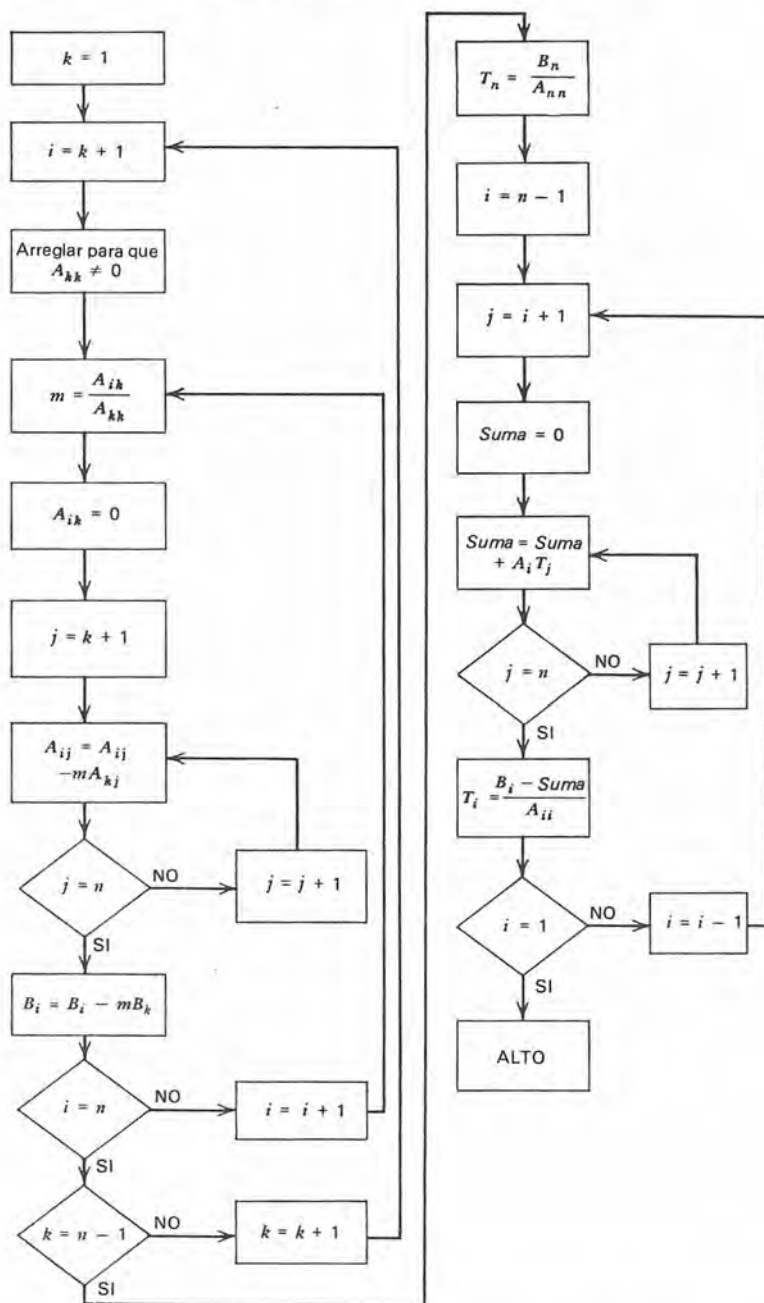


Figura 3.4 Diagrama de flujo para la técnica de eliminación de Gauss.

mación más reciente. El procedimiento, usando las tres ecuaciones anteriores, es como sigue:

1. Suponga valores aproximados para T_1^0, T_2^0, T_3^0
2. Con T_2^0 y T_3^0 resuelva la ecuación (i) para T_1^1
3. Con T_1^1 y T_3^0 resuelva la ecuación (ii) para T_2^1
4. Con T_1^1 y T_2^1 resuelva la ecuación (iii) para T_3^1
5. Con T_2^1 y T_3^1 resuelva la ecuación (i) para T_1^2

.
.
.
etc.

Se puede expresar la k -ésima aproximación para T_i en términos generales como

$$T_1^{(k)} = \frac{1}{A_{11}} [B_1 - A_{12}T_2^{(k-1)} - A_{13}T_3^{(k-1)}]$$

$$T_2^{(k)} = \frac{1}{A_{22}} [B_2 - A_{21}T_1^{(k)} - A_{23}T_3^{(k-1)}]$$

$$T_3^{(k)} = \frac{1}{A_{33}} [B_3 - A_{31}T_1^{(k)} - A_{32}T_2^{(k)}]$$

En el ejemplo 3.2 se da un ejemplo numérico de esta técnica.

Ejemplo 3.2

Resolver el siguiente conjunto de tres ecuaciones algebraicas simultáneas para T_1, T_2 , y T_3 :

$$5T_1 + T_2 + 2T_3 = 32$$

$$2T_1 + 8T_2 + T_3 = 29$$

$$T_1 + 2T_2 + 4T_3 = 28$$

Rescribiendo y despejando los valores de T_1, T_2 , y T_3 en la forma prescrita se tiene

$$T_1 = (1/5)(32 - T_2 - 2T_3)$$

$$T_2 = (1/8)(29 - 2T_1 - T_3)$$

$$T_3 = (1/4)(28 - T_1 - 2T_2)$$

Suponiendo que $T_2^0 = T_3^0 = 0$, se obtiene

$$T_1 = (1/5)(32 - 0 - 0) = 6.40$$

$$T_2 = (1/8)(29 - 12.8 - 0) = 2.025$$

$$T_3 = (1/4)(28 - 6.4 - 4.05) = 4.388$$

La segunda iteración da

$$T_1 = (1/5)(32 - 2.025 - 8.776) = 4.240$$

$$T_2 = (1/8)(29 - 8.48 - 4.388) = 2.017$$

$$T_3 = (1/4)(28 - 4.24 - 4.034) = 4.932$$

A continuación se da un registro tabular de estos resultados y de dos iteraciones adicionales, hasta cuatro decimales:

Iteración No.	T_1	T_2	T_3
0	0	0	0
1	6.400	2.025	4.388
2	4.240	2.017	4.932
3	4.024	2.003	4.993
4	4.002	2.000	5.000
5	4.000	2.000	5.000

Obviamente, la respuesta exacta al problema de ejemplo es $T_1 = 4$, $T_2 = 2$, $T_3 = 5$.

Se puede lograr cualquier grado de exactitud por la técnica de Gauss-Seidel, con la condición que exista una solución, si se itera el número suficiente de veces. Para propósitos de la programación de computadora, generalmente se usa uno de dos métodos para detener el proceso. Los dos métodos son

1. Establecer algún límite a la máxima diferencia entre dos valores sucesivos de T_i , por ejemplo

$$\max |T_i^{(k)} - T_i^{(k-1)}| < \varepsilon \quad (3-29)$$

para toda i .

2. Establecer algún límite ε a la diferencia relativa entre valores sucesivos de T_i

$$\max \left| \frac{T_i^{(k)} - T_i^{(k-1)}}{T_i^{(k)}} \right| < \varepsilon \quad (3-30)$$

En la figura 3.5 se muestra el diagrama de flujo para un proceso de computación iterativo de Gauss-Seidel.

En este punto, una preocupación lógica es la convergencia de la técnica de Gauss-Seidel. En el ejemplo 3.2 se tiene exactitud hasta cuatro decimales en cinco iteraciones, comenzando desde cero. Se puede preguntar: ¿qué haría que el conjunto convergiera en forma más rápida? ¿más lenta? ¿Cuáles son las condiciones que hacen imposible la convergencia?

En base intuitiva parece útil tener valores relativamente grandes para las A_{ii} , o sea dividir entre grandes números cada vez, lo que se

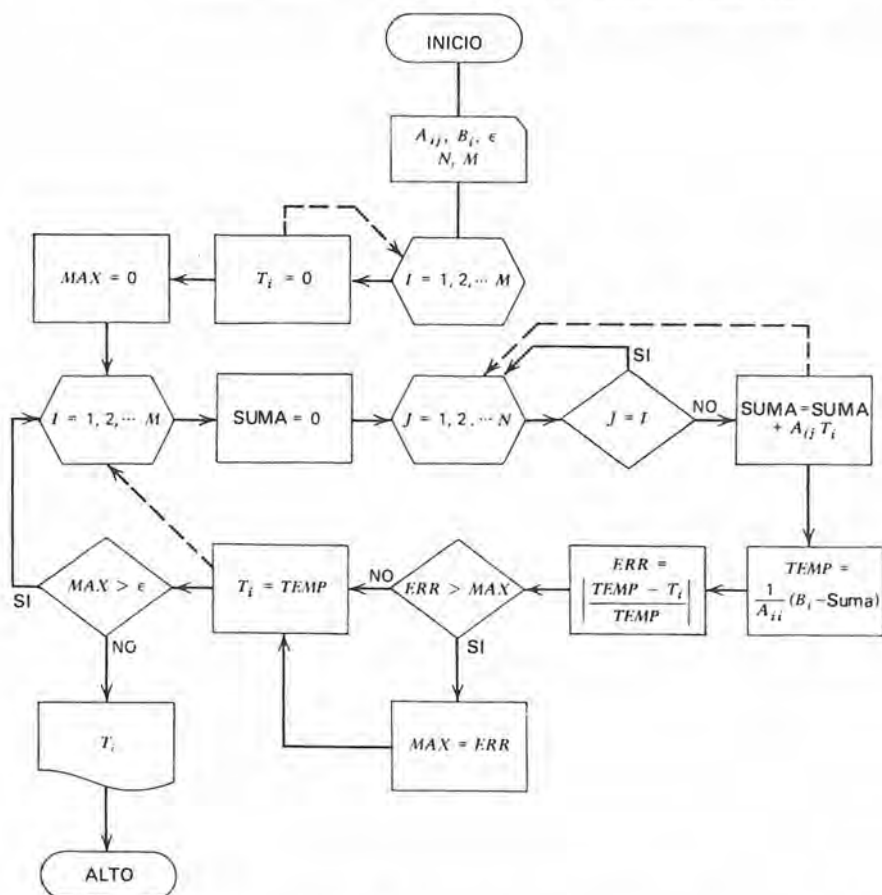


Figura 3.5 Diagrama de flujo para la iteración de Gauss-Seidel.

puede demostrar más formalmente si se considera el caso más sencillo posible, el de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$A_{11}T_1 + A_{12}T_2 = B_1$$

$$A_{21}T_1 + A_{22}T_2 = B_2$$

Para la k -ésima iteración, se encuentran los valores de $T_1^{(k)}$ y $T_2^{(k)}$ de

$$T_1^{(k)} = \frac{1}{A_{11}} [B_1 - A_{12}T_2^{(k-1)}]$$

$$T_2^{(k)} = \frac{1}{A_{22}} [B_2 - A_{21}T_1^{(k)}]$$

Después de la k -ésima iteración, los errores en T_1 y T_2 , denotados por ΔT_1 y ΔT_2 , se expresan como

$$\Delta T_1^{(k)} = T_1 - T_1^{(k)}$$

$$\Delta T_2^{(k)} = T_2 - T_2^{(k)}$$

Haciendo las sustituciones para T_i y $T_i^{(k)}$ de las ecuaciones originales y de las expresiones de iteraciones, se puede escribir $\Delta T_i^{(k)}$ como

$$\begin{aligned}\Delta T_1^{(k)} &= \frac{1}{A_{11}} [B_1 - A_{12}T_2 - B_1 + A_{12}T_2^{(k-1)}] \\ &= -\frac{A_{12}}{A_{11}} \Delta T_2^{(k-1)}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\Delta T_2^{(k)} &= \frac{1}{A_{22}} [B_2 - A_{21}T_1 - B_2 + A_{21}T_1^{(k)}] \\ &= -\frac{A_{21}}{A_{22}} \Delta T_1^{(k)}\end{aligned}$$

Se pueden combinar estos resultados para obtener

$$\begin{aligned}\Delta T_1^{(k)} &= \frac{A_{12}A_{21}}{A_{11}A_{22}} \Delta T_1^{(k-1)} \\ \Delta T_1^{(k-1)} &= \frac{A_{12}A_{21}}{A_{11}A_{22}} \Delta T_1^{(k-2)} \\ &\vdots \\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

o, en general,

$$\Delta T_1^{(k)} = \left(\frac{A_{12}A_{21}}{A_{11}A_{22}} \right)^k \Delta T_1^{(0)}$$

y

$$\Delta T_2^{(k)} = \left(\frac{A_{12}A_{21}}{A_{11}A_{22}} \right)^k \Delta T_2^{(0)}$$

Para que ocurra la convergencia, es claro que conforme k se hace grande, $\Delta T_1^{(k)} \rightarrow 0$, y $\Delta T_2^{(k)} \rightarrow 0$; lo que hace necesario que

$$\left(\frac{A_{12}A_{21}}{A_{11}A_{22}} \right) < 1$$

Esta condición se cumple bajo las siguientes condiciones: ya sea

$$\left\{ \begin{array}{l} |A_{11}| > |A_{12}| \\ |A_{22}| \geq |A_{21}| \end{array} \right\} \quad \text{ó} \quad \left\{ \begin{array}{l} |A_{11}| \geq |A_{12}| \\ |A_{22}| > |A_{21}| \end{array} \right\}$$

o sea que los términos de las diagonales deben ser al menos tan grandes como los términos fuera de las diagonales y mayores en al menos un caso. La terminología usada es cuando la matriz de coeficientes, A_{ij} , sea *dominante diagonalmente*. Naturalmente, la convergencia es más rápida para valores cada vez mayores de los términos de la diagonal.

Aquí conviene mencionar algo con relación a la selección que se debe hacer entre las soluciones directa e interativa. Cuando ambas son posibles, los artificios iterativos frecuentemente dan resultados aceptables con menor trabajo. Los procesos iterativos se prefieren definitivamente cuando están involucradas propiedades variables del medio en los coeficientes y constantes, las A_{ij} y B_i ; se pueden actualizar estos términos conforme se encuentran valores más nuevos para $T_i^{(k)}$. Sin embargo, puede ser necesaria la eliminación de Gauss si no se satisfacen las condiciones requeridas para la convergencia de la iteración de Gauss-Seidel, o sea si la matriz de los coeficientes no es dominante diagonalmente.

En capítulos posteriores se incluyen soluciones a problemas que involucran tanto la eliminación de Gauss como la iteración de Gauss-Seidel.

3.3 CONSIDERACIONES ADICIONALES QUE COMPRENDEN SOLUCIONES NUMERICAS

Un aspecto negativo de los resultados obtenidos en la maquinaria moderna de computación es que la solución obtenida puede no ser correcta, si es que se llega a obtener una solución. En este contexto, lo que se debe considerar se refiere a la *estabilidad*, *exactitud* y *convergencia* de la solución. Ahora se estudian brevemente estos conceptos.

3.3-1 Errores en las soluciones numéricas

El error en una solución numérica generalmente se considera de dos tipos: *error numérico* o de *redondeo* y *error de discretización* o de *truncado*.

El error de redondeo ocurre cuando no se utiliza un número adecuado de cifras significativas para el cálculo. El redondeo en el decimal octavo o 12o. es insignificante cuando se considera un solo término; sin embargo, después de realizar millares o millones de cálculos, el error acumulado debido al redondeo puede ser intolerable. Afortunadamente, la maquinaria moderna de computación tiene suficiente capacidad para hacer que este tipo de error sea de poco cuidado en un proceso de solución numérica cuidadosamente programado.

Los errores de truncado o discretización son el resultado de reemplazar derivadas por diferencias finitas. Las cantidades designadas por $O(\Delta x)$ y $O(\Delta x^2)$ en las ecuaciones (3-11) y (3-12) son de este tipo. Esta clase de error es inherente a la diferenciación, y por tanto es inevitable. Sin embargo, se puede reducir disminuyendo el tamaño de los incrementos de tiempo y espacio en alguna forma prescrita.

Si los errores se acumulan conforme avanza la solución y este crecimiento no es acotado, se dice que la solución es *inestable*. La inestabilidad también es el resultado de que los errores crezcan a una razón más rápida que la razón a la que se aproxima a la convergencia. La figura 3.6 ilustra algunos de los conceptos que se han estudiado.

La solución inestable, mostrada con la línea punteada, es un patrón típico para el caso de un crecimiento no acotado de error.

Las dos líneas que muestran soluciones estables dan resultados inexactos: uno es aceptable en tanto que el otro obviamente no lo es.

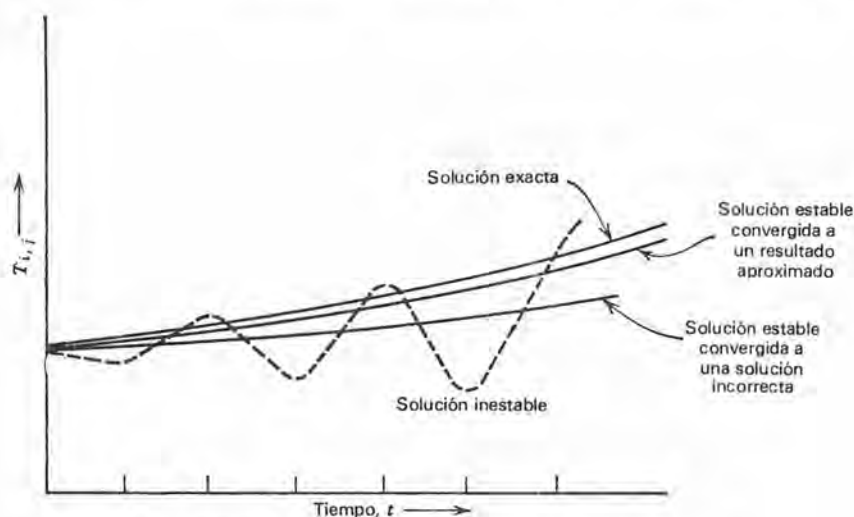


Figura 3.6 Tipos de posibles resultados en las soluciones numéricas.

La curva superior de solución es suficientemente cercana a la solución exacta para ser aceptable; el error se debe a la discretización.

La línea inferior para la solución numérica convergida es inaceptable debido a que tiene un gran error, aunque la solución es estable. Las causas posibles para este comportamiento son:

1. La ecuación diferencial dominante no está representada en forma adecuada por la ecuación de diferencias.
2. Se interrumpió la iteración en cada incremento de tiempo antes que se lograra la convergencia a los valores correctos.
3. Se satisficieron todos los criterios de convergencia, aunque se logró la convergencia a la solución errónea. Con frecuencia se desconocen las razones para que ello ocurra.

Esta última categoría no se encuentra con frecuencia; dichos resultados pueden ocurrir al resolver conjuntos de ecuaciones altamente no lineales.

Los criterios de convergencia en problemas de conducción de calor deben hacerse en base a un balance global de calor, por ejemplo calor de entrada — calor de salida debe ser menor que alguna pequeña cantidad ϵ . No bastan los criterios basados en el cambio de temperatura entre iteraciones sucesivas como las especificadas por las ecuaciones (3-29) y (3-30).

3.3-1.1 Criterios para la estabilidad

En la ecuación (3.19) se dió el método explícito para resolver la ecuación de calor, usando una representación de primera diferencia hacia adelante para la derivada del tiempo. Hablando en términos de computadora, este enfoque es deseable; sin embargo, puede no ser utilizable en determinados casos.

La ecuación (3-19) es estable cuando

$$\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \leq 1/2 \quad (3-31)$$

o, en dos dimensiones, cuando

$$\alpha \Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \leq 1/2 \quad (3-32)$$

El criterio para la estabilidad de la expresión de balance de calor explícito, ecuación (3-23), no es tan directo debido a la influencia de las propiedades dependientes de la temperatura. Bray y MacCracken² sugieren como el criterio en este caso la relación

² A. P. Bray y S. J. MacCracken, Knolls Atomic Power Laboratory Report, KAPL 2044 (AEC), mayo 1959.

$$\Delta t_i < \frac{C_i}{\sum_{j=1}^N K_{ij}} \quad (3-33)$$

Cada una de las tres ecuaciones anteriores indica que se debe acompañar una disminución en el tamaño de un incremento de espacio con una disminución asociada en el tamaño del incremento de tiempo, lo que frecuentemente produce incrementos considerablemente pequeños de tiempo.

Los procesos implícitos de solución son incondicionalmente estables en su mayor parte. La forma implícita para resolver la ecuación del calor, dada como la ecuación (3-20), y el método de Crank-Nicholson, ecuación (3-21) con $F = 1/2$, son inherentemente estables.

Una conclusión de esta discusión es que los procesos implícitos pueden ser más deseables que los explícitos, ya que los problemas de estabilidad no son causa de dificultades, lo cual es cierto incluso aunque grandes conjuntos de ecuaciones simultáneas puedan requerir una solución. Un efecto es útil que se pueden emplear mayores incrementos de tiempo en los procesos implícitos; por tanto, el tiempo para lograr una solución puede no ser tan grande comparado con un método explícito como se puede suponer inicialmente. Todavía se debe tener cuidado con relación a los errores de discretización cuando se emplean los métodos implícitos para que no se sacrifique la exactitud al usar incrementos demasiado grandes en el espacio y tiempo.

Se han logrado determinados desarrollos en los procesos numéricos que incorporan la facilidad de cálculo de los métodos explícitos con la exactitud y estabilidad numérica de los procesos implícitos. Se llaman procedimientos multiniveles y de dirección alterante a algunos de los enfoques más exitosos, cuya discusión está más allá del alcance de este tratado. El lector interesado puede consultar a Carnahan, Luther y Wilkes³ o a Trent y Welty⁴ para obtener detalles acerca de estos procesos más avanzados.

3.4 CONCLUSION

Este capítulo se ha dedicado completamente a los aspectos de la formulación numérica de las ecuaciones de transferencia de calor. En los próximos años los cálculos de transferencia de calor se harán cada vez con mayor frecuencia por medio de computadores, por lo que se le da importancia a este tema en este texto.

³ B. Carnahan, H. A. Luther, y J. O. Wilkes, *Applied Numerical Methods* (Nueva York: John Wiley and Sons, Inc., 1969).

⁴ D. S. Trent y J. R. Welty, *A Summary of Numerical Methods for Solving Transient Heat Conduction Problems*, Oregon State Univ. Engr. Expt. Station Bulletin (en prensa).

Se estudiaron las formulaciones fundamentales basadas en las diferencias de las ecuaciones diferenciales que dominan y en la generación de las ecuaciones de diferencias a partir de un balance de calor en un pequeño elemento; se recomendó en forma general el método de balance de calor debido, en parte, a su mayor flexibilidad para aceptar condiciones complejas de frontera.

Se discutieron técnicas de soluciones que involucran métodos explícitos e implícitos. Se discutieron las técnicas de eliminación de Gauss y la iteración de Gauss-Seidel en forma detallada y se presentaron los diagramas de flujo correspondientes.

Se presentó una breve discusión de los problemas de error, convergencia y estabilidad asociados con las soluciones numéricas. Los procesos implícitos por lo general son numéricamente estables, y con frecuencia más deseables que los explícitos, que deben satisfacer determinados criterios para asegurar la estabilidad.

En los siguientes capítulos se incluyen problemas de ejemplo que incorporan soluciones numéricas.

Transferencia de calor por conducción

En el capítulo 1 se dió una introducción de la transferencia de calor por conducción. Ya se han discutido algunos términos y conceptos básicos. En este capítulo se considera con más detalle la transferencia de calor por conducción y se desarrollan bastantes problemas de ejemplo, incluyendo algunos por métodos numéricos.

Primeramente se consideran los sistemas estables, comenzando con los casos unidimensionales y luego pasando a sistemas bi y tridimensionales. Se consideran casos especiales de interés práctico en los momentos apropiados, tales como la sección de transferencia de calor desde álabes o aletas y superficies extendidas. Se emplearán técnicas de soluciones analíticas y numéricas. Luego se consideran las situaciones de estado inestable casi en el mismo orden que para los sistemas de estado estable. En los casos inestables, se emplean las técnicas de solución gráfica al igual que los enfoques analítico y numérico para las soluciones a los problemas.

4.1 CONDUCCION DE ESTADO ESTABLE

Se llama *estado estable* al caso de transferencia de calor en que el tiempo no es un factor. Considerar la transferencia de calor en donde no interviene el tiempo permite simplificar el análisis en cierta medida. Como se discutió en el capítulo 2, la ecuación principal para la conducción de estado estable con generación interna es

$$\nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (2-53)$$

que se conoce como la ecuación de Poisson; la ecuación de Laplace se aplica para la conducción de estado estable sin generación interna de calor:

$$\nabla^2 T = 0 \quad (2-54)$$

Las dos ecuaciones anteriores se aplican a un medio isótropo, o sea el medio cuyas propiedades no varían con la dirección; se supone que las propiedades físicas también son independientes de la temperatura.

La consideración inicial será la conducción de estado estable unidimensional sin generación interna de energía.

4.1-1 Sistemas unidimensionales sin generación

Tal como se acaba de mencionar, se aplica a este caso la ecuación de Laplace. Una forma general de la ecuación de Laplace en una dimensión es

$$\frac{d}{dx} \left(x^i \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (4-1)$$

en donde $i = 0, 1$, ó 2 en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas, respectivamente.

4.1-1.1 Paredes planas

En el caso de una pared plana como la mostrada en la figura 4.1, se aplica la ecuación (4-1) con $i = 0$.

La ecuación y condiciones de frontera que se deben satisfacer son

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (4-2)$$

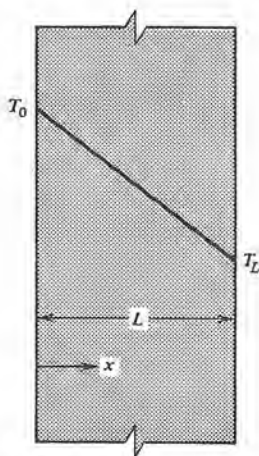


Figura 4.1 Conducción de estado estable en una pared plana.

$$T(x) = T(0) = T_0 \quad \text{en } x = 0$$

$$T(x) = T(L) = T_L \quad \text{en } x = L$$

La ecuación (4-2) se puede separar e integrar dos veces para obtener

$$T(x) = c_1 x + c_2 \quad (4-3)$$

y se pueden evaluar las constantes de integración c_1 y c_2 , aplicando las ecuaciones de frontera, con lo que se obtiene

$$c_1 = \frac{T_L - T_0}{L} \quad \text{y} \quad c_2 = T_0$$

Cuando se sustituyen c_1 y c_2 en la ecuación (4-3), la expresión final para el perfil de la temperatura queda

$$T(x) = \frac{T_L - T_0}{L} x + T_0$$

ó

$$T(x) = T_0 - \frac{T_0 - T_L}{L} x \quad (4-4)$$

De acuerdo con la ecuación (4-4), la variación de la temperatura es lineal en una pared plana bajo las condiciones especificadas como se muestra en la figura 4.1

Se puede usar la ecuación de la razón de Fourier para determinar el flujo de calor o la razón de flujo de calor en este caso. Para referencia, a continuación se repite la ecuación de la razón, presentada en el capítulo 1 en forma escalar.

$$q_x = -kA \frac{dT}{dx} \quad (1-1)$$

Dado que en el caso de estado estable q_x es constante, se puede separar e integrar directamente esta ecuación como

$$q_x \int_0^L dx = -kA \int_{T_0}^{T_L} dT$$

lo que da

$$q_x = \frac{kA}{L} (T_0 - T_L) \quad (4-5)$$

En otra forma, se puede haber evaluado el gradiente de temperatura dT/dx de la ecuación (4-4) y sustituido en la ecuación (1-1) para lograr un resultado idéntico. En los siguientes capítulos se emplean estas dos formas alternas de evaluar el flujo de calor, ya sea por integración directa de la ecuación de la razón de Fourier o resolviendo

do el perfil de la temperatura y sustituyendo la expresión del gradiente de temperatura en la ecuación de la razón. En determinados casos un enfoque puede ser más sencillo que el otro, aunque no se puede establecer un enunciado general en este sentido.

La cantidad kA/L , en la ecuación (4-5) se denomina la *conductancia térmica* para una placa o pared plana. Se llama *resistencia térmica* al recíproco de esta cantidad, L/kA .

Los dos ejemplos siguientes ilustran el uso de las ecuaciones (4-4) y (4-5) al igual que el concepto de la resistencia térmica.

Ejemplo 4.1

Se desea transportar agua a presión por un tubo empotrado en una pared de 4ft de espesor. Se desea colocar el tubo en la pared en donde la temperatura es de 250°F. Se mantiene una de las superficies de la pared a 425°F y la otra a 160°F como se muestra en la figura 4.2. Si el material de la pared tiene una conductividad térmica que varía con la temperatura de acuerdo con

$$k = 0.5(1 + 0.06T)$$

en donde T está en °F y k está en Btu/hr-ft-°F, ¿a qué distancia de la pared se debe colocar el tubo?

En este problema no es válido el perfil lineal de la temperatura debido a la dependencia de k en la temperatura. Con k definida como una función lineal de T en la forma $k(T) = \alpha(1 + \beta T)$, la ecuación de la razón queda

$$q_x = -\alpha(1 + \beta T)A \frac{dT}{dx}$$

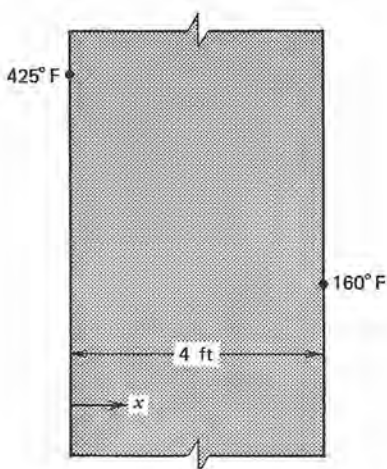


Figura 4.2 Sistema de pared plana para el ejemplo 4.1.

Separando las variables e integrando se obtiene

$$\frac{q_x}{A} \int_0^x dx = -\alpha \int_{T_0}^x (1 + \beta T) dT$$

6

$$\frac{q_x}{A} x = \alpha \left[T_0 - T_x + \frac{\beta}{2} (T_0^2 - T_x^2) \right]$$

cuando se integra desde $x = 0$ hasta una posición general x . Si se integra desde $x = L$, se llega a la relación

$$\frac{q_x}{A} (L - x) = \alpha \left[T_x - T_L + \frac{\beta}{2} (T_x^2 - T_L^2) \right]$$

Para el problema que se está considerando, q_x/A es constante, $L = 4$ ft, $T = 250^\circ\text{F}$, $T_0 = 425^\circ\text{F}$, $T_L = 160^\circ\text{F}$ y α y β son los coeficientes en la expresión para k . Igualando las expresiones para q_x/A , se tiene

$$T_0 - T_x + \frac{\beta}{2} (T_0^2 - T_x^2) = \frac{x}{L - x} \left[T_x - T_L + \frac{\beta}{2} (T_x^2 - T_L^2) \right]$$

y sustituyendo los valores conocidos para T_x , T_0 , T_L , y β , se tiene que $x = 2.88$ ft. Es interesante hacer notar que si se hubiera ignorado la dependencia de la temperatura en la conductividad térmica y se supusiera la variación lineal de la temperatura, se hubiera colocado al tubo a 2.64 ft de la pared caliente. A esta distancia la temperatura real es de 294°F . La presión de saturación del agua a 250°F es de 29.82 psi y a 294°F el valor es de 61.201 psi, un factor de más de 2 a 1. Obviamente, fue conveniente en este caso incluir la dependencia de la conductividad térmica en la temperatura.

Ejemplo 4.2

Se construye una pared de horno con ladrillo de arcilla refractaria de 3 in ($k = 0.65$ Btu/hr-ft- $^\circ\text{F}$) próximo a una caja de fuego o fogón y acero suave de 1/4 in ($k = 24$ Btu/hr-ft- $^\circ\text{F}$) en el exterior. La superficie interior del tabique está a $1\,200^\circ\text{F}$ y el acero está rodeado por aire a 80°F con un coeficiente de superficie exterior de 12 Btu/hr-ft 2 - $^\circ\text{F}$. Encontrar

- el flujo de calor a través de cada metro cuadrado de acero
- la temperatura de la superficie exterior del acero
- el porcentaje de incremento en el flujo del calor, si además de las condiciones especificadas, hay dos pernos de acero de 1.9 cm de diámetro que se extienden a través de la pared compuesta por 3/4 in 2 de área de la pared.

Para la pared compuesta, el circuito eléctrico análogo es



y el flujo se puede evaluar usando la ecuación (1-14):

$$q = \frac{\Delta T}{\sum R_t} \quad (1-14)$$

A su vez, las resistencias térmicas son

$$R_{\text{tabique}} = \frac{L}{kA} \Big|_{\text{tabique}} = \frac{3/12 \text{ ft}}{(0.65 \text{ Btu/hr-ft-}^\circ\text{F})(A, \text{ ft}^2)} = \frac{0.385 \text{ hr-}^\circ\text{F}}{A \text{ Btu}}$$

$$R_{\text{acero}} = \frac{L}{kA} \Big|_{\text{acero}} = \frac{0.25/12 \text{ ft}}{(24 \text{ Btu/hr-ft-}^\circ\text{F})(A, \text{ ft}^2)} = \frac{0.00087 \text{ hr-}^\circ\text{F}}{A \text{ Btu}}$$

$$R_{\text{conv}} = \frac{1}{hA} = \frac{1}{(12 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^\circ\text{F})(A, \text{ ft}^2)} = \frac{0.0833 \text{ hr-}^\circ\text{F}}{A \text{ Btu}}$$

La resistencia térmica combinada es

$$R = \frac{1}{A} (0.385 + 0.00087 + 0.0833) = \frac{0.469 \text{ hr-}^\circ\text{F}}{A \text{ Btu}}$$

y el flujo de calor es

$$\frac{q}{A} = \frac{1200 - 80}{0.469} = \frac{1120}{0.469} = 2390 \text{ Btu/hr-ft}^2$$

Conocido el flujo de calor, se puede encontrar la temperatura de la superficie de acero, usando cualquiera de las siguientes ecuaciones:

$$1200 - T_3 = q(R_{\text{tabique}} + R_{\text{acero}})$$

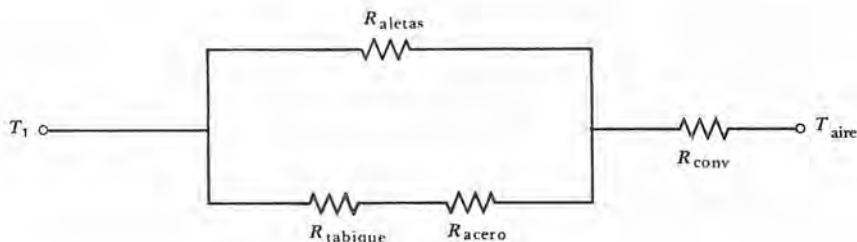
$$T_3 - 80 = qR_{\text{conv}}$$

El valor resultante para T_3 es

$$T_3 = 1200 - (2390 \text{ Btu/hr-ft}^2)(0.386 \text{ hr-}^\circ\text{F/Btu})$$

$$= 80 + (2390 \text{ Btu/hr-ft}^2)(0.0833 \text{ hr-}^\circ\text{F/Btu}) = 278^\circ\text{F}$$

En el caso de pernos adicionales de acero a través de la pared, existen dos caminos por los que puede fluir el calor desde el interior de la pared del horno al aire exterior. Abajo se muestra el circuito eléctrico equivalente en este caso.



Se conocen R_{tabique} , R_{acero} , R_{conv} . Se calcula la resistencia térmica para los pernos de acero igual a

$$R_{\text{pernos}} = \frac{L}{kA} = \frac{3.25/12 \text{ ft}}{(24 \text{ Btu/hr-ft-}^\circ\text{F})} \bigg/ \left[2 \times \frac{\pi}{4} \left(\frac{0.75}{12} \right)^2 \right] \frac{\text{ft}^2}{\text{ft}^2} A$$

$$= \frac{1.84 \text{ hr-}^\circ\text{F}}{A \text{ Btu}}$$

La resistencia equivalente a la parte del circuito conectada en paralelo es

$$R_{\text{equiv}} = \frac{1}{\frac{1}{R_{\text{pernos}}} + \frac{1}{R_{\text{tabique}} + R_{\text{acero}}}}$$

$$= \frac{1}{(0.543 + 2.59)A} = \frac{0.319 \text{ hr-}^\circ\text{F}}{A \text{ Btu}}$$

La resistencia térmica total para la pared y pernos es

$$R_{\text{total}} = R_{\text{equiv}} + R_{\text{conv}}$$

$$= \frac{0.319}{A} + \frac{0.0833}{A} = \frac{0.402}{A}$$

y el flujo térmico resultante es

$$\frac{q}{A} = \frac{\Delta T}{R} = \frac{1200 - 80}{0.402} = \frac{1120}{0.402} = 2790 \text{ Btu/hr-ft}^2$$

que significa un aumento de 400 Btu/hr-ft² o sea 16.7% sobre la pared sin pernos.

4.1-1.2 Cilindros huecos

Para la conducción de calor de estado estable a través de una pared cilíndrica en la dirección radial, la ecuación de Laplace toma la forma

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (4-6)$$

Separando las variables e integrando se obtiene

$$\frac{dT}{dr} = \frac{c_1}{r} \quad (4-7)$$

y nuevamente

$$T = c_1 \ln r + c_2 \quad (4-8)$$

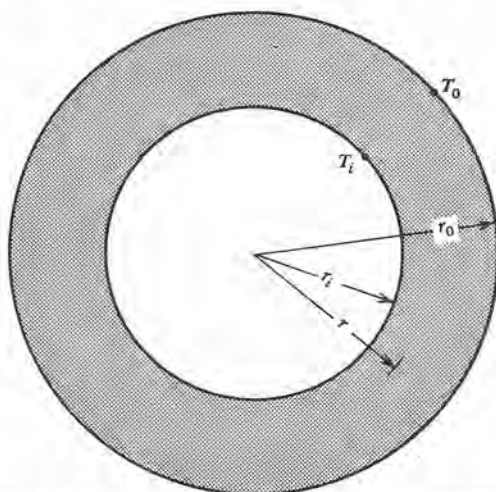


Figura 4.3 Conducción de estado estable en una pared cilíndrica.

Si el sistema y las condiciones de frontera son como se indica en la figura 4.3, o sea que $T(r_i) = T_i$ y $T(r_o) = T_o$, entonces las constantes de integración c_1 y c_2 quedan

$$c_1 = - \frac{T_i - T_o}{\ln \frac{r_o}{r_i}}$$

$$c_2 = T_i - c_1 \ln r_i$$

con lo que la expresión para $T(r)$ queda

$$T_i - T = \frac{\ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{r_o}{r_i}} (T_i - T_o) \quad (4-9)$$

Al determinar la razón de flujo de calor se aplica la ecuación de la razón de Fourier en su forma cilíndrica

$$q_r = -kA \frac{dT}{dr}$$

El área en este caso es $2\pi rL$, y el gradiente de temperatura dT/dr está dado por la ecuación (4-7). Sustituyendo estos términos en la expresión de la razón del flujo de calor se tiene

$$q_r = \frac{2\pi kL}{\ln \frac{r_0}{r_i}} (T_i - T_0) \quad (4-10)$$

que es equivalente a la ecuación (1-5) que se obtuvo de distinta forma. En el ejemplo 1.1 se demostró la aplicación de la ecuación (1-5).

4.1-1.2 Esferas huecas

En el caso esférico, la forma unidimensional de la ecuación de Laplace para el caso del flujo de calor radial es

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (4-11)$$

Separando las variables e integrando dos veces se obtiene

$$\frac{dT}{dr} = \frac{c_1}{r^2} \quad (4-12)$$

$$T = -\frac{c_1}{r} + c_2 \quad (4-13)$$

Las condiciones aplicables de frontera para este caso esférico son $T(r_i) = T_i$ y $T(r_0) = T_0$. Aplicando estas condiciones de frontera se obtiene, para las constantes de integración.

$$c_1 = -\frac{T_i - T_0}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_0}}$$

$$c_2 = \frac{c_1}{r_i} + T_i$$

y, finalmente, para $T(r)$,

$$T(r) - T_i = \frac{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_0}} (T_i - T_0) \quad (4-14)$$

La expresión para el flujo radial de calor en una capa esférica es

$$q_r = -kA \frac{dT}{dr}$$

en donde $A = 4\pi r^2$ y dT/dr está dada por la ecuación (4-12). Cuando se efectúan estas sustituciones, q_r queda

$$q_r = \frac{4\pi k}{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}} (T_i - T_0) \quad (4-15)$$

o, en forma equivalente,

$$q_r = \frac{4\pi k r_i r_0}{r_0 - r_i} (T_i - T_0) \quad (4-16)$$

De la ecuación (4-16) se ve que la resistencia térmica para una esfera hueca es

$$R_t = \frac{r_0 - r_i}{4\pi k r_i r_0} \quad (4-17)$$

y el factor de forma es

$$S = \frac{4\pi r_i r_0}{r_0 - r_i} \quad (4-18)$$

Por ser de utilidad, en la tabla 4.1 se resumen las expresiones para la razón de flujo de calor, la resistencia térmica y el factor de forma para los tres casos unidimensionales de estado estable que se han considerado hasta ahora.

Tabla 4.1 Un resumen de resultados para la conducción unidimensional de estado estable de calor

Configuración	Razón de flujo de calor q_x	Resistencia térmica R_t	Factor de forma S S
Pared plana	$q_x = \frac{kA}{L} \Delta T$	$\frac{L}{kA}$	$\frac{A}{L}$
Cilindro hueco	$q_r = \frac{2\pi k L}{\ln \frac{r_0}{r_i}} \Delta T$	$\frac{\ln \frac{r_0}{r_i}}{2\pi k L}$	$\frac{2\pi L}{\ln \frac{r_0}{r_i}}$
Esfera hueca	$q_r = \frac{4\pi k r_0 r_i}{r_0 - r_i} \Delta T$	$\frac{r_0 - r_i}{4\pi k r_i r_0}$	$\frac{4\pi r_0 r_i}{r_0 - r_i}$

4.1-2 Conducción de calor unidimensional de estado estable con generación interna

En esta sección se dan dos ejemplos que involucran sistemas con generación interna de energía térmica. Los efectos más obvios de esta consideración adicional, en sentido analítico, son las distintas formas de las ecuaciones gobernantes y los resultados provenientes de aquellos encontrados en la sección anterior.

La energía agregada en un medio como generación interna se denomina una fuente *homogénea* en tanto que la agregada en una frontera o localización específica en el medio, es una fuente *heterogénea*. Una adición homogénea de energía altera la forma de la ecuación gobernante. La adición heterogénea de energía no cambia la ecuación gobernante, aunque se muestra a cambio como una condición de frontera con lo que afecta el resultado en forma distinta. En esta sección se considera la adición de energía del tipo homogéneo.

Ejemplo 4.3

Para la pared plana mostrada en la figura 4.4, comparar las expresiones para $T(x)$ que se aplican a los casos de

- a) una razón de generación volumétrica uniforme \dot{q} .
- b) una razón de generación que varía linealmente con la temperatura en la forma

$$\dot{q} = \dot{q}_0[1 + \beta(T - T_0)]$$

En ambos casos, se puede tomar la temperatura de la superficie como una constante.

Se aplica la forma unidimensional de la ecuación de Poisson. La ecuación (2-54), escrita para la dirección de las x es

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (4-19)$$

La primera separación de variables e integración da

$$\frac{dT}{dx} + \frac{\dot{q}}{k}x = c_1$$

Se evalúa la constante de integración c_1 aplicando la condición de simetría en la frontera $dT/dx = 0$ en $x = 0$. Por tanto, se encuentra que la constante c_1 es cero.

Mediante una segunda separación de variables e integración obtenemos

$$T + \frac{\dot{q}x^2}{2k} = c_2$$

En este caso la condición aplicable de frontera es $T(\pm L) = T_L$, por lo que c_2 se evalúa como

$$c_2 = T_L + \frac{\dot{q}L^2}{2k}$$

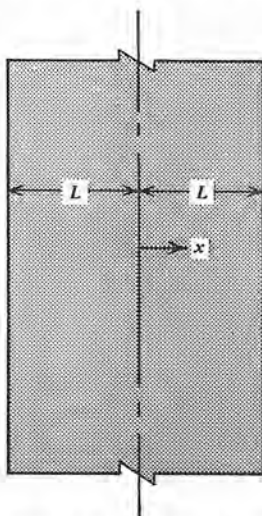


Figura 4.4 Configuración de pared plana con generación interna de energía térmica.

La expresión que resulta para $T(x)$ es

$$T(x) = T_L + \frac{\dot{q}_0}{2k} (L^2 - x^2) \quad (4-20)$$

Para el caso b), la ecuación aplicable es

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{q}_0}{k} [1 + \beta(T - T_0)] = 0$$

Se puede poner esta expresión en forma más conveniente mediante un ligero cambio en la variable si $\theta = T - T_0$. La temperatura T_0 es un valor constante de referencia. Ahora la ecuación en θ es

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{\dot{q}_0}{k} (1 + \beta \theta) = 0$$

Las condiciones de frontera aplicables son

$$\frac{d\theta}{dx} = 0 \quad \text{en } x = 0 \quad (\text{simetría})$$

$$\theta = \theta_L = T_L - T_0 \quad \text{en } x = L$$

Introduciendo las constantes A y B , definidas como

$$A^2 = \frac{\dot{q}_0}{k} \beta$$

$$B = \frac{\dot{q}_0}{k}$$

se tiene una forma todavía más sencilla para la ecuación gobernante

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + A^2\theta + B = 0$$

La solución general a esta ecuación diferencial de segundo orden es

$$\theta = c_1 \cos Ax + c_2 \sin Ax - B/A^2$$

Aplicando las condiciones de frontera se obtiene

$$c_1 = \frac{\theta_L + \frac{B}{A^2}}{\cos AL}$$

$$c_2 = 0$$

Por lo que se puede escribir la expresión final para θ en la forma

$$\theta = \left(\theta_L + \frac{B}{A^2} \right) \frac{\cos Ax}{\cos AL} - \frac{B}{A^2} \quad (4-21)$$

La consideración adicional de la generación variable con la temperatura tiene el resultado obvio de matemáticas más complicadas para llegar al resultado final.

Ejemplo 4.4

Se tiene una columna cilíndrica de concreto 3 ft empleada para la construcción de un puente. La longitud de la columna es suficiente para que se pueda despreciar la variación de la temperatura a lo largo de su longitud. Tratando la columna como concreto sólido con una conductividad térmica promedio igual a 0.54 Btu/hr-ft-°F, determinar la temperatura al centro del cilindro al tiempo en que se encuentra que la temperatura de la superficie exterior es de 180°F. Se puede considerar que el calor de hidratación del concreto es igual a 1.1 Btu/lb_mhr, y se puede suponer una densidad promedio de 150 lb/ft³ para el mismo.

La ecuación dominante es la ecuación unidimensional de Poisson en las coordenadas cilíndricas

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

Las condiciones de frontera son

$$\frac{dT}{dr} = 0 \quad \text{en } r = 0 \text{ (simetría)}$$

y

$$T = T_L \quad \text{en } r = R.$$

Separando las variables e integrando una vez, se obtiene

$$\frac{dT}{dr} + \frac{\dot{q}}{k} \frac{r}{2} = \frac{c_1}{r}$$

De la condición de simetría se tiene que la constante c_1 es 0. Mediante una segunda separación de las variables e integración se obtiene para T ,

$$\int_{T_0}^{T_L} dT + \frac{\dot{q}}{k} \int_0^R \frac{r}{2} dr = 0$$

$$T_L - T_0 + \frac{\dot{q}}{k} \frac{R^2}{4} = 0$$

o

$$T_0 = T_L + \frac{\dot{q}}{k} \frac{R^2}{4} \quad (4-22)$$

Sustituyendo los valores numéricos apropiados para T_L , \dot{q} , k , y R se obtiene

$$\begin{aligned} T_0 &= 180^\circ\text{F} + \frac{(1.1 \text{ Btu/lb}_m\text{hr})(150 \text{ lb}_m/\text{ft}^3)(1.5 \text{ ft})^2}{0.54 \text{ Btu/hr-ft-}^\circ\text{F}} \frac{1}{4} \\ &= 180 + 172 = 352^\circ\text{F} \end{aligned}$$

4.1-3 Transferencia de calor desde superficies extendidas

Un método para aumentar la transferencia de calor entre una superficie y un fluido adyacente es aumentando el área superficial en contacto con el fluido. Este aumento en el área puede ser de la forma de puntas, álabes y otros tipos de superficies extendidas con distintas configuraciones.

La figura 4.5 ilustra una situación general que se empleará para formular los análisis de las superficies extendidas.

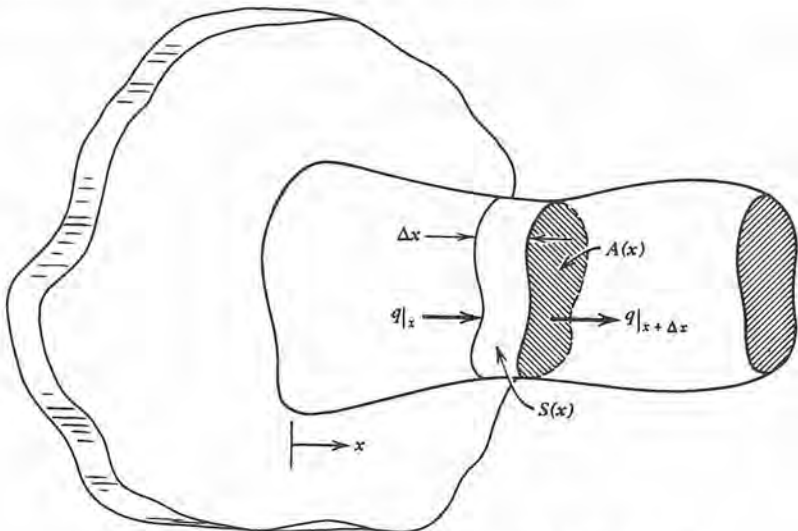


Figura 4.5 Una superficie extendida de configuración general.

Bajo las condiciones de estado estable, un análisis de la primera ley del volumen de control de espesor Δx , área transversal $A(x)$, y área superficial $S(x)$, se reduce a

$$\frac{\delta Q}{dt} = 0$$

Suponiendo que la conducción del calor está en la dirección positiva de las x (o sea que la aleta está a mayor temperatura que el fluido adyacente), se puede escribir la relación de la primera ley como

$$q_x|_x - q_x|_{x+\Delta x} - q_{\text{conv}} = 0$$

o, expresado en palabras, la energía de entrada por conducción en x es igual a la energía de salida por conducción en $x + \Delta x$ más la energía de salida por convección.

Si se sustituye la expresión adecuada de la razón para cada una de las q , suponiendo una forma de mosaico en todas, excepto en la dirección de las x , se tiene

$$kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x+\Delta x} - kA \frac{dT}{dx} \Big|_x - hS(T - T_\infty) = 0$$

Ahora se expresa $S(x)$ como el producto del perímetro $P(x)$ por Δx , y se divide entre Δx para obtener

$$\frac{kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x+\Delta x} - kA \frac{dT}{dx} \Big|_x}{\Delta x} - hP(T - T_\infty) = 0$$

Tomando el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, se obtiene la ecuación diferencial general

$$\frac{d}{dx} \left[kA(x) \frac{dT}{dx} \right] - hP(x)[T - T_\infty] = 0 \quad (4-23)$$

La ecuación (4.23) da muchas formas distintas cuando se aplica a distintas geometrías. En las secciones siguientes se consideran tres configuraciones representativas.

4.1-3.1 Aletas o agujas de sección transversal uniforme

En la figura 4.6 se muestran dos configuraciones posibles, en donde $P(x) = P$ y $A(x) = A$, son constantes. Considerando también constantes a k y h , la expresión general dada en la ecuación (4-23) se reduce a

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{kA}(T - T_\infty) = 0 \quad (4-24)$$

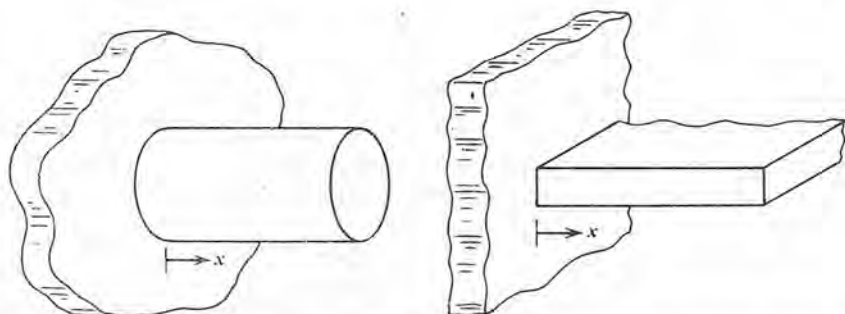


Figura 4.6 Dos configuraciones de superficies extendidas con secciones transversales uniformes.

4.1-3.2 Superficies rectas con sección transversal uniformemente variable

La figura 4.7 muestra una aleta de sección transversal rectangular con espesor variable linealmente. Para los valores de A y P designados por A_0 y P_0 en la raíz y A_L y P_L en el extremo, se puede expresar la variación en $A(x)$ y $P(x)$ en forma lineal como

$$A = A_0 - (A_0 - A_L) \frac{x}{L}$$

$$P = P_0 - (P_0 - P_L) \frac{x}{L}$$

Denotando el semiespesor de la aleta por t_0 y t_L en $x = 0$ y $x = L$, respectivamente, las expresiones para A_0 , A_L , P_0 y P_L por longitud unitaria de aleta son

$$A_0 = 2t_0 \quad P_0 = 2(2t_0 + 1)$$

$$A_L = 2t_L \quad P_L = 2(2t_L + 1)$$

La ecuación diferencial dominante aplicable en este caso, con k y h constantes es

$$\frac{d}{dx} \left[\left(A_0 - (A_0 - A_L) \frac{x}{L} \right) \frac{dT}{dx} \right] - \frac{h}{k} \left[P_0 - (P_0 - P_L) \frac{x}{L} \right] (T - T_\infty) = 0 \quad (4-25)$$

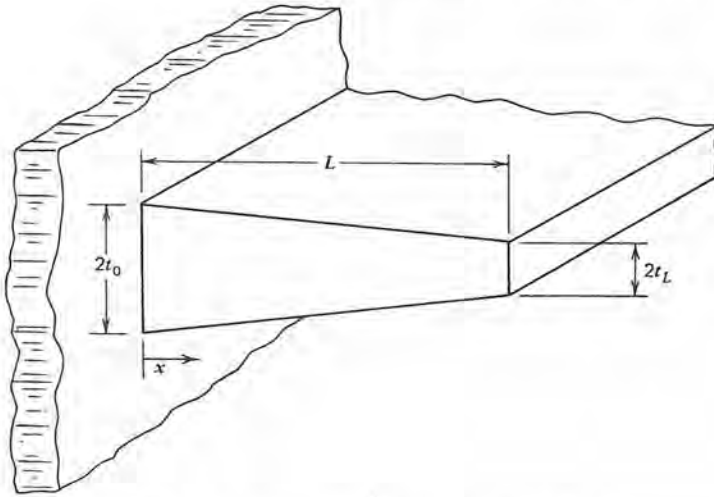


Figura 4.7 Una aleta rectangular de espesor variable linealmente.

4.1-3.3 Superficies curvadas con espesor uniforme

La aleta circular de espesor constante, como se muestra en la figura 4.8, es un tipo común de superficie extendida. Para esta configuración, se pueden escribir $A(r)$ y $P(r)$ en la forma

$$\begin{aligned} A(r) &= 4\pi r t \\ P(r) &= 4\pi r \end{aligned} \quad r_0 < r < r_L$$

La sustitución de estas cantidades en la ecuación (4-23) da la expresión aplicable para este caso. Con k y h constantes, se tiene

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) - \frac{hr}{kt} (T - T_\infty) = 0 \quad (4-26)$$

Además de las complejidades obvias introducidas para geometrías más complejas, la consideración de k y h variables haría mucho más difícil el análisis.

Las soluciones a cada una de las ecuaciones desarrolladas son de gran interés. Solamente se entra en detalle con relación a la primera de las tres configuraciones que se consideraron, o sea con relación a la aleta recta de sección transversal constante.

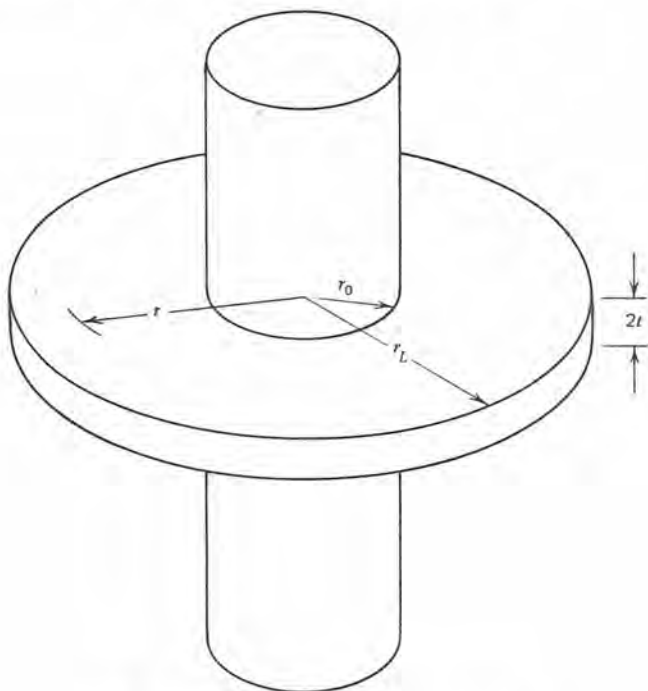


Figura 4.8 Una aleta circular con espesor constante.

4.1-3.4 Soluciones para aletas rectas de sección transversal constante

La relación por resolver es la ecuación (4-24). Combinando términos en el coeficiente, se escribe $hP/kA = m^2$, y transformando la variable dependiente como $\theta = T - T_\infty$, se obtiene, para la relación dominante,

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0 \quad (4-27)$$

La solución general de la ecuación (4-27) es de la forma

$$\theta = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx} \quad (4-28)$$

o

$$\theta = A \cosh mx + B \sinh mx \quad (4-29)$$

Cualquiera de las formas para la solución general es correcta; una de ellas puede ser preferible para un caso dado.

Se necesitan dos condiciones de frontera para evaluar las constantes en la ecuación (4-28) y o (4-29). Se consideran cuatro conjuntos:

1. Una aleta muy larga

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_0 \text{ en } x = 0 \\ \theta &= 0 \text{ en } x \rightarrow \infty\end{aligned}$$

2. Una temperatura conocida en $x = L$

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_0 \text{ en } x = 0 \\ \theta &= \theta_L \text{ en } x = L\end{aligned}$$

3. Un caso con aislamiento en el extremo

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_0 \text{ en } x = 0 \\ \frac{d\theta}{dx} &= 0 \text{ en } x = L\end{aligned}$$

4. Conducción al extremo igual a la convección desde el extremo

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_0 \text{ en } x = 0 \\ k \frac{d\theta}{dx} &= h\theta \text{ en } x = L\end{aligned}$$

La primera condición de frontera en cada uno de estos conjuntos es igual, e indica que la temperatura en la base del álabe es la misma que la de la superficie primaria a la que está unido. La segunda condición en cada conjunto representa la condición en el otro extremo, en $x = L$.

Usando el primer conjunto de condiciones de frontera con la ecuación (4-27), se obtiene, para el perfil de la temperatura,

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-mx} \quad (4-30)$$

Para el conjunto (2) de las condiciones de frontera la expresión resultante para θ es

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \left(\frac{\theta_L}{\theta_0} - e^{-mL} \right) \left(\frac{e^{mx} - e^{-mx}}{e^{mL} - e^{-mL}} \right) + e^{-mx} \quad (4-31)$$

Observe que conforme $L \rightarrow \infty$, la ecuación (4-31) se aproxima a la ecuación (4-30). Para el conjunto (3), la expresión resultante del perfil de la temperatura es

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{e^{mx}}{1 + e^{2mL}} + \frac{e^{-mx}}{1 + e^{-2mL}} \quad (4-32)$$

ô

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{\cosh [m(L - x)]}{\cosh mL} \quad (4-33)$$

Nuevamente se notará que ambas expresiones se reducen a la ecuación (4-30) conforme $L \rightarrow \infty$.

La solución para θ usando el conjunto (4) de condiciones de frontera es

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{\cosh [m(L - x)] + (h/mk)\sinh[m(L - x)]}{\cosh mL + (h/mk)\sinh mL} \quad (4-34)$$

La ecuación (4-34) también se reduce a la ecuación (4-30) conforme $L \rightarrow \infty$.

Para evaluar la transferencia de calor desde una aleta cuyo perfil de temperatura está dado por una de las ecuaciones anteriores, se pueden tomar uno de dos enfoques. Un método posible es integrar sobre la superficie de la aleta de acuerdo con

$$q = \int_s h[T(x) - T_\infty] dS = \int_s h\theta dS \quad (4-35)$$

Un segundo método es evaluar la razón de transferencia de calor al álabe por conducción en la raíz. La ecuación que se aplica en este caso es

$$q = -kA \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = -kA \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0} \quad (4-36)$$

Normalmente, la ecuación (4-36) es la más fácil de usar de las dos.

La tabla 4.2 relaciona los perfiles de temperatura y las razones de transferencia de calor de aletas rectas que se aplican a cada uno de los cuatro conjuntos de condiciones de frontera que se consideraron antes.

Para geometrías más complicadas, se hacen más complejas las expresiones para la variación de la temperatura y el flujo de calor, que las dadas en la tabla 4.2. Algunos de estos casos quedan como ejercicios para el lector.

Es claro que un álabe sería más efectivo si la temperatura fuera la misma en todas partes al igual que en la superficie primaria a la que está unido. Para un álabe 100% efectivo, la transferencia de calor a un fluido adyacente está dado por

$$q = hS(T_0 - T_\infty) \quad (4-37)$$

Para un álabe con $T(x) < T_0$ para $x > 0$, la transferencia de calor es menor que la dada por la ecuación (4-37). La razón de transferencia real de calor desde una superficie extendida al máximo posible, según lo expresa la ecuación (4-37), se denomina la *efectividad del álabe* y se representa por η_f .

$$\eta_f = \frac{q_{\text{real}}}{q_{\text{máxima}}} \quad (4-38)$$

En la figura 4.9 se muestra una gráfica de la efectividad del álabe en función de parámetros significativos para un álabe recto y para un álabe circular de tres longitudes distintas.

Para una superficie alabeada, la transferencia total de calor está dada por

$$\begin{aligned} q_{\text{total}} &= q_{\text{superficie primaria}} + q_{\text{aletas}} \\ &= hA_0(T_0 - T_\infty) + \int_s h(T - T_\infty) dS \end{aligned} \quad (4-39)$$

Expresando el segundo término o sea la transferencia de calor desde los álabes en función de la efectividad del álabe, se tiene

$$q_{\text{total}} = hA_0(T_0 - T_\infty) + hA_f\eta_f(T_0 - T_\infty)$$

ó

$$q_{\text{total}} = h(A_0 + A_f\eta_f)(T_0 - T_\infty) \quad (4-40)$$

En la ecuación (4-40), A_0 representa el área de la superficie primaria que está en contacto con el fluido ambiente, y A_f es el área superficial total del álabe. La diferencia de la temperatura $T_0 - T_\infty$ y el coeficiente de la superficie h se suponen constantes.

En el ejemplo 4.5 se ilustra una aplicación de la ecuación (4-40).

Ejemplo 4.5

Se separan aire y agua mediante una pared plana hecha de acero dulce. Se propone aumentar la razón de transferencia de calor entre estos dos fluidos agregando álabes rectangulares rectos de acero dulce de 0.05 in de espesor, 1 in de longitud y espaciados a 0.5 in entre los centros, a la pared. ¿Cuál es el porcentaje de aumento en la transferencia de calor que se puede lograr agregando álabes a a) el aire exterior, b) al lado del agua, c) a ambos lados, de la pared plana? Se pueden tomar los coeficientes del lado del aire y del agua iguales a 2 y 45 Btu/hr-ft²-°F, respectivamente.

Para 1 in² de área original de pared, las áreas de las superficies primaria y alabeada son

$$\begin{aligned} A_0 &= 1 \text{ ft}^2 - (24 \text{ fins})(1 \text{ ft}) \left(\frac{0.05/12 \text{ ft}}{\text{fin}} \right) \\ &= 0.9 \text{ ft}^2 \\ A_f &= (24 \text{ fins})(1 \text{ ft})(2 \times 1/12 \text{ ft}) + 0.1 \text{ ft}^2 \\ &= 4.1 \text{ ft}^2 \end{aligned}$$

Tabla 4.2 Perfiles de temperatura y transferencia de calor para aletas rectas con área constante

Condiciones de frontera	$\theta(x) = \frac{T(x) - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}}$	$q(x)$
1. $\theta(0) = \theta_0$ $\theta(\infty) = 0$	$\frac{\theta}{\theta_0} = e^{-mx}$	$q_x = kAm\theta_0$
2. $\theta(0) = \theta_0$ $\theta(L) = \theta_L$	$\frac{\theta}{\theta_0} = \left(\frac{\theta_L}{\theta_0} - e^{-mL}\right) \left(\frac{e^{mx} - e^{-mx}}{e^{mL} - e^{-mL}}\right) + e^{-mx}$	$q_x = kAm\theta_0 \left[1 - \frac{2(\theta_L - \theta_0 e^{-mL})}{e^{mL} - e^{-mL}} \right]$
3. $\theta(0) = \theta_0$ $\frac{dx}{dx}(L) = 0$	$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{\cosh[m(L - x)]}{\cosh mL}$	$q_x = kAm\theta_0 \tanh mL$
4. $\theta(0) = \theta_0$ $-k \frac{d\theta}{dx}(L) = h\theta(L)$	$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{\cosh[m(L - x)] + (h/mk) \sinh[m(L - x)]}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL}$	$q_x = kAm\theta_0 \frac{\sinh mL + (h/mk) \cosh mL}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL}$

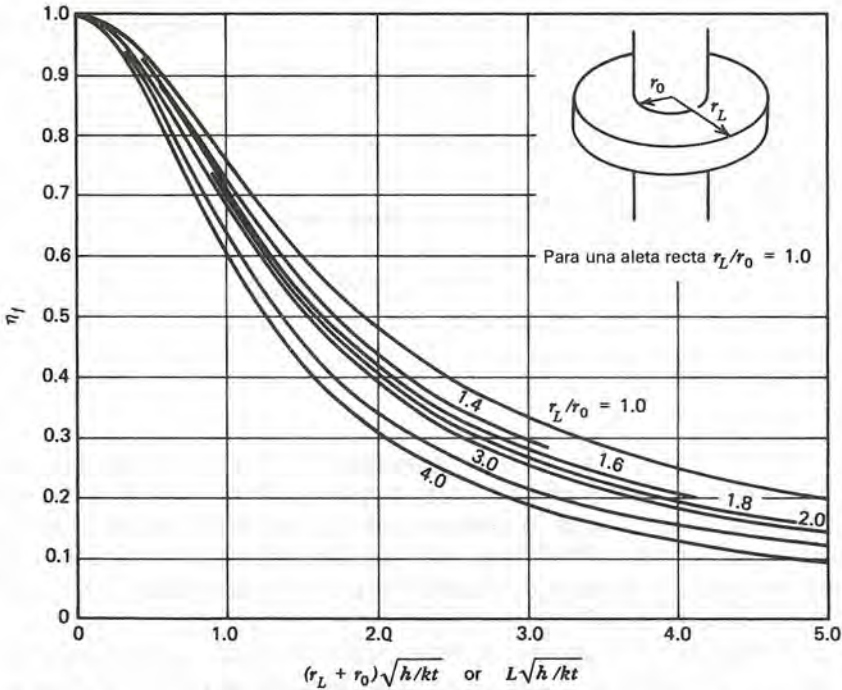


Figura 4.9 Efectividad de una aleta para aletas rectas y circulares de espesor constante.

De la figura 4.9 se tiene que los valores de η_f para los casos del lado del aire y del agua son 0.92 y 0.39 respectivamente. Las razones correspondientes de transferencia de calor para álabes a cada lado son

$$\begin{aligned} q &= h_A \Delta T_A [A_0 + A_f \eta_f] \\ &= 2 \Delta T_A [0.9 + (4.1)(0.92)] = 9.34 \Delta T_A \end{aligned}$$

para el lado del aire y

$$q = 45 \Delta T_w [0.9 + (4.1)(0.39)] = 112.5 \Delta T_w$$

para el lado del agua.

La razón total de transferencia de calor por 924 cm² de superficie sin álabes, sin considerar la resistencia conductiva de la pared de acero es

$$q_{w/o \text{ aletas}} = \frac{\Delta T_{\text{total}}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{45}} = 1.915 \Delta T_{\text{total}}$$

Con los álabes solamente del lado del aire se tiene

$$= \frac{\Delta T_{\text{total}}}{\frac{1}{9.34} + \frac{1}{45}} = 7.74 \Delta T_{\text{total}}$$

un aumento del 304%

Con los álabes solamente del lado del agua, la razón de transferencia de calor es

$$q = \frac{\Delta T_{total}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{112.5}} = 1.965 \Delta T_{total}$$

un aumento del 2.6%

La razón de transferencia de calor con álabes a ambos lados es

$$q = \frac{\Delta T_{total}}{\frac{1}{9.34} + \frac{1}{112.5}} = 8.63 \Delta T_{total}$$

un aumento de 350%

Como se ve, el mayor efecto al agregar álabes ocurre del lado del aire, en donde h tiene el valor más pequeño. Esto se debe, en el caso de la pared plana, a que la resistencia está controlada, y todo cambio que altere la parte del camino de transferencia de calor que la controla, tendrá un efecto muy significativo en la capacidad de la transferencia de calor total.

En general es cierto que se deben agregar álabes a las superficies en donde h es bajo. Si el aire en convección natural está en el exterior de un tubo, con frecuencia se agregan álabes para aumentar la transferencia de calor debido al bajo valor de h asociado a menudo con esta situación.

4.1-4 Conducción de calor de estado estable en dos y tres dimensiones

Con más de una variable espacial significativa involucrada, la solución a la ecuación de Laplace o de Poisson se hace mucho más complicada. En esta sección se hace énfasis en las técnicas para resolver la ecuación bidimensional y tridimensional de Laplace. Las técnicas se consideran en el siguiente orden: analíticas, gráficas, integrales y numéricas.

4.1-4.1 *Conducción de calor bi y tridimensional de estado estable: soluciones analíticas*

En esta sección se consideran ejemplos de soluciones analíticas a problemas de transferencia de calor multidimensional de estado estable. Para mayor brevedad, se consideran sistemas bidimensionales; la extensión de dos a tres dimensiones es bastante directa y no hay pérdida de generalidad involucrada al restringir las consideraciones al caso bidimensional.

Ejemplo 4.6

Encontrar la distribución de temperatura de estado estable en el álabe bidimensional mostrado en la figura 4.10. En su base, la temperatura del álabe está dada por $F(y)$. Se puede considerar que el coeficiente h de la superficie es muy grande. El álabe tiene longitud infinita y espesor igual a $2l$.

La formulación diferencial de este problema requiere un enunciado de la ecuación diferencial dominante

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (4-41)$$

y condiciones de frontera

$$T(0, y) = F(y)$$

$$T(x, \pm l) = T_\infty$$

$$T(\infty, y) = T_\infty$$

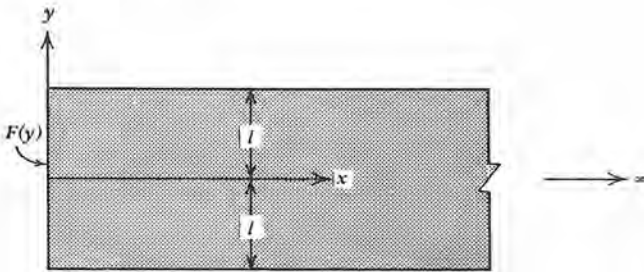


Figura 4.10 Conducción de estado estable en una aleta bidimensional.

El primer paso para la solución del problema es la transformación de la variable dependiente, haciendo $\theta = T - T_\infty$, que no cambia la ecuación dominante aunque reduce tres de las condiciones de frontera a una forma homogénea. Ahora el nuevo problema en función de θ es

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad (4-42)$$

$$\theta(0, y) = f(y) \quad (4-43)$$

$$\theta(x, \pm l) = 0 \quad (4-44)$$

$$\theta(\infty, y) = 0 \quad (4-45)$$

Para resolver la ecuación (4-42) se emplea una técnica de separación de variables. Suponiendo que existe una solución de producto de la forma

$$\theta(x, y) = X(x)Y(y) \quad (4-46)$$

entonces se sustituye este producto en la ecuación (4-42) y la división subsecuente de cada término entre XY da

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \pm \lambda^2 \quad (4-47)$$

en donde λ^2 es una constante cuyo signo está determinado por los requerimientos físicos de simetría de la función $Y(y)$ alrededor de $y = 0$ y de homogeneidad de $Y(\pm l)$. En este caso el signo apropiado de λ^2 es positivo.

Ahora se reduce el problema original bidimensional para resolver dos ecuaciones diferenciales ordinarias. Se pueden escribir los problemas en la dirección x y en la dirección y como

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \lambda^2 X = 0 \quad X(\infty) = 0 \quad (4-48)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \lambda^2 Y = 0 \quad Y(\pm l) = 0, \frac{dY}{dy}(0) = 0 \quad (4-49)$$

La condición de frontera no homogénea en $X = 0$ no es separable y queda de lado hasta la etapa final de la solución.

Resolviendo primero el problema en la dirección de las y , ecuación (4-49), se tiene, para la solución general,

$$Y = A \cos \lambda y + B \sin \lambda y$$

e introduciendo las condiciones de frontera se tiene

$$Y(y) = A_n \cos \lambda_n y \quad (4-50)$$

en donde A_n es una constante arbitraria asociada con los valores característicos λ_n dados por

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{2l} \quad \text{for } n = 1, 3, 5, \dots$$

En la dirección de las x la solución a la ecuación (4-48) es

$$X = C e^{\lambda_n x} + D e^{-\lambda_n x}$$

que, al aplicarle las condiciones de frontera en $x = \infty$ queda

$$X(x) = D_n e^{-\lambda_n x} \quad (4-51)$$

Ahora la solución de producto supuesta en la ecuación (4-46) es

$$\theta(x, y) = X(x)Y(y) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x} \cos \lambda_n y \quad (4-52)$$

en donde $a_n = A_n D_n$.

Ahora se puede determinar la constante restante a_n partiendo de la condición no homogénea de frontera en $x = 0$. Al hacerlo se obtiene

$$f(y) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} a_n \cos \lambda_n y$$

Multiplicando ambos lados de esta ecuación por $\cos \lambda_m y$ y dy y observando que

$$\int_0^l \cos \lambda_n y \cos \lambda_m y dy = 0 \quad \text{para } m \neq n$$

se obtiene, para a_n , la expresión

$$a_n = \frac{\int_0^l f(y) \cos \lambda_n y \, dy}{\int_0^l \cos^2 \lambda_n y \, dy} \quad (4-53)$$

El denominador de la ecuación (4-53) es igual a $l/2$ para todos los valores enteros positivos de n . En consecuencia, la constante a_n se expresa como

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(y) \cos \lambda_n y \, dy \quad (4-54)$$

y la solución completa para $\theta(x, y)$ queda

$$\theta(x, y) = \frac{2}{l} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left[\int_0^l f(\xi) \cos \lambda_n \xi \, d\xi \right] e^{-\lambda_n x} \cos \lambda_n y \quad (4-55)$$

Hay determinadas formas de la función $f(y)$ que son más viables que otras. Considere el caso de una temperatura base uniforme

$$f(y) = \theta(0, y) = \theta_0 \quad (\text{una constante})$$

La constante a_n queda

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \theta_0 \cos \lambda_n y \, dy = (-1)^{(n-1)/2} \frac{4\theta_0}{n\pi}$$

para $n = 1, 3, 5, \dots$. Entonces, la solución para (x, y) es

$$\theta(x, y) = \frac{4\theta_0}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{(n-1)/2} e^{-\lambda_n x} \cos \lambda_n y \quad (4-56)$$

Ejemplo 4.7

Encontrar la distribución de temperatura de estado estable en el álabe bidimensional descrito en el ejemplo 4.6, para el caso de transferencia de calor por convección en las superficies superior e inferior con un valor finito para el coeficiente h de transferencia convectiva de calor.

En la figura 4.11 se muestra el problema mediante un diagrama. Usando la misma definición para θ que en el ejemplo anterior, ahora se puede enunciar el problema como

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad (4-57)$$

$$\theta(0, y) = F(y) \quad (4-58)$$

$$\theta(\infty, y) = 0 \quad (4-59)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y}(x, 0) = 0 \quad (\text{simetría}) \quad (4-60)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y}(x, \pm l) = h\theta(x, \pm l) \quad (4-61)$$

La técnica de separación de variables, suponiendo una solución de producto como la dada por la ecuación (4-46) permite enunciar el problema original en función de componentes en las direcciones de x y y en la forma

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \lambda^2 X = 0 \quad X(\infty) = 0 \quad (4-62)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \lambda^2 Y &= 0 & \frac{dY(0)}{dy} &= 0 \\ -k \frac{dY}{dy}(\pm l) &= hY(\pm l) \end{aligned} \quad (4-63)$$

Se considera otra vez la dirección de las y en primer término. El problema dado por la ecuación (4-63) con las condiciones asociadas de frontera lleva a la solución

$$Y_n(y) = A_n \cos \lambda_n y \quad (4-64)$$

en donde los valores característicos λ_n son los que satisfacen la ecuación trascendental

$$k\lambda_n \text{ en } \lambda_n l = h \cos \lambda_n l \quad (4-65)$$

La solución en la dirección de las x es idéntica a la del ejemplo 4.6; específicamente,

$$X(x) = D_n e^{-\lambda_n x} \quad (4-66)$$

y $\theta(x, y)$ está dado por el producto

$$\theta(x, y) = X(x) Y(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x} \cos \lambda_n y \quad (4-67)$$

La constante a_n , que es el producto de $A_n D_n$, se evalúa precisamente en la forma dada en la ecuación (4-54), y la expresión general para $\theta(x, y)$ enunciada en la ecuación (4-55) también se aplica para este caso.

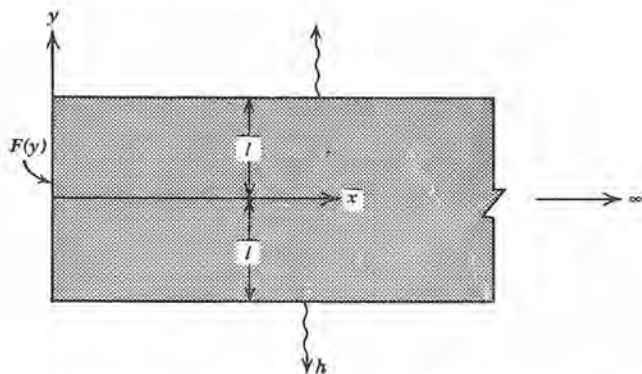


Figura 4.11 Conducción de estado estable en una aleta bidimensional con convección al fluido que le rodea.

Para el caso de una temperatura constante, de base $F(y) = \theta(0, y) = \theta_0$, la constante a_n queda

$$a_n = \frac{2\theta_0 \operatorname{sen} \lambda_n l}{\lambda_n l + \operatorname{sen} \lambda_n l \cos \lambda_n l} \quad (4-68)$$

y el perfil de temperatura de estado estable es

$$\theta(x, y) = 2\theta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} \lambda_n l}{\lambda_n l + \operatorname{sen} \lambda_n l \cos \lambda_n l} \right) e^{-\lambda_n x} \cos \lambda_n y \quad (4-69)$$

4.1-4.2 *Conducción de calor de estado estable bidimensional; soluciones gráficas*

Hay una técnica de solución gráfica, denominada *graficación de flujo*, que es cómoda y rápida para la conducción de calor de estado estable en un sistema bidimensional con fronteras isotérmicas. Esta técnica es un enfoque válido para resolver la ecuación bidimensional de Laplace

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

donde $T(x, y)$ tiene un valor constante en todas las fronteras. Se pueden resolver problemas semejantes con el mismo enfoque en los cuales la variable dependiente es la función corriente ψ , el potencial de velocidad ϕ , la concentración de masa de un constituyente determinado C_A , o el potencial eléctrico V , como se verá en seguida.

En una pared semi infinita con temperatura superficial constante, las isotermas y líneas de flujo de calor aparecen como se muestra en la figura 4.12. En la pared, las isotermas son líneas rectas verticales y las líneas de flujo de calor son horizontales, perpendiculares a las isotermas.

Si existe una diferencia constante de temperatura entre dos isotermas cualesquiera, entonces la distancia entre ellas indica la magnitud del gradiente de temperatura; el espaciado estrecho indica un gradiente relativamente grande, en tanto que un gradiente pequeño está asociado con el espaciado amplio.

Ya que la transferencia de calor ocurre por la conducción bajo la influencia de un gradiente de temperatura, es claro que no existe ninguna fuerza motriz para la transferencia de calor a lo largo de una isoterma. Por tanto, se puede considerar que una línea de flujo de calor es una frontera aislada a través de la cual no se puede conducir el calor.

Los conceptos anteriores son importantes cuando se considera un problema de conducción bidimensional más general. En la figura 4.13

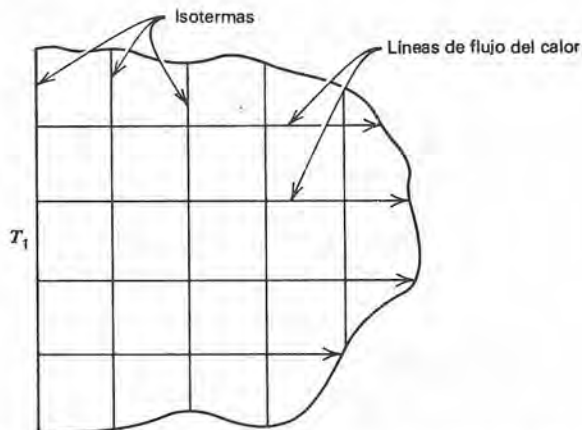


Figura 4.12 Isotermas y líneas de flujo de calor en una pared semi-infinita.

se muestra un conjunto de dos isotermas y dos líneas de flujo de calor. Las dos isotermas difieren entre sí en la cantidad ΔT . Las líneas de flujo de calor son perpendiculares a las isotermas y forman un paso o tubo a través del cual puede fluir una cantidad de calor Δq .

Si en una sección transversal total hay N pasos de flujo de calor total, por cada uno de los cuales fluye una cantidad de calor Δq , la transferencia total está dada por

$$q_{\text{total}} = N\Delta q \quad (4-70)$$

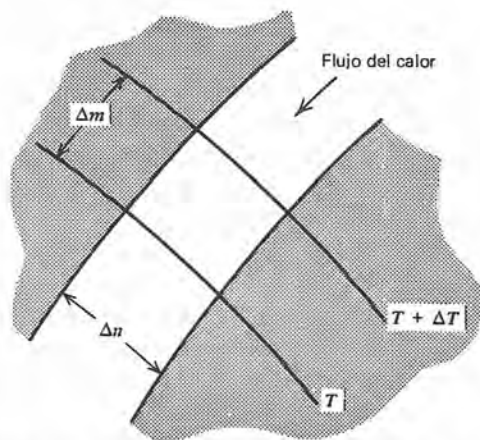


Figura 4.13 Un elemento general para el análisis de graficación de flujo.

Para el paso individual de flujo de calor mostrado, el gradiente de temperatura, en forma de diferencia finita es $[(T + \Delta T) - T]/\Delta m = \Delta T/\Delta m$. Entonces, para Δq la ecuación de la razón de Fourier escrita para este paso da

$$\Delta q = k \Delta n \frac{\Delta T}{\Delta m} \quad (4-71)$$

Si se construye la malla de isotermas/líneas de flujo de calor de manera que $\Delta m = \Delta n$, o sea que se forme un sistema de cuadrados curvilíneos, la expresión para Δq se reduce sencillamente a

$$\Delta q = -k \Delta T \quad (4-72)$$

sin importar el tamaño de los cuadrados.

Para el flujo de calor entre dos fronteras isotérmicas a las temperaturas T_h y T_c en donde $T_h > T_c$, con isotermas que dividen cada tubo de flujo en M divisiones, la diferencia de temperaturas entre isotermas adyacentes se expresa como

$$\Delta T = \frac{T_h - T_c}{M} \quad (4-73)$$

Finalmente, para un total de N pasos de flujo entre las fronteras en T_h y T_c , cada uno con una cantidad Δq de flujo de calor, la transferencia total de calor es

$$\begin{aligned} q_{\text{total}} &= N \Delta q = N k \Delta T \\ &= \frac{N}{M} k (T_h - T_c) \end{aligned} \quad (4-74)$$

Comparado con la ecuación (1-17), se ve que la razón N/M , es el *factor de forma S*. Entonces, la técnica de graficación de flujo es sencillamente una forma de determinar un valor para el factor de forma en un problema de conducción bidimensional de estado estable en donde las fronteras están a temperatura constante.

En el ejemplo 4.8 se ilustra la técnica para la graficación del flujo.

Ejemplo 4.8

Se determina que las superficies interior y exterior de la chimenea rectangular mostrada son iguales a 300°F y 100°F respectivamente. ¿Cuánto calor se transfiere a través de la pared de tabique ($k = 0.40$ Btu/hr-ft-°F) de la chimenea por pie de altura?

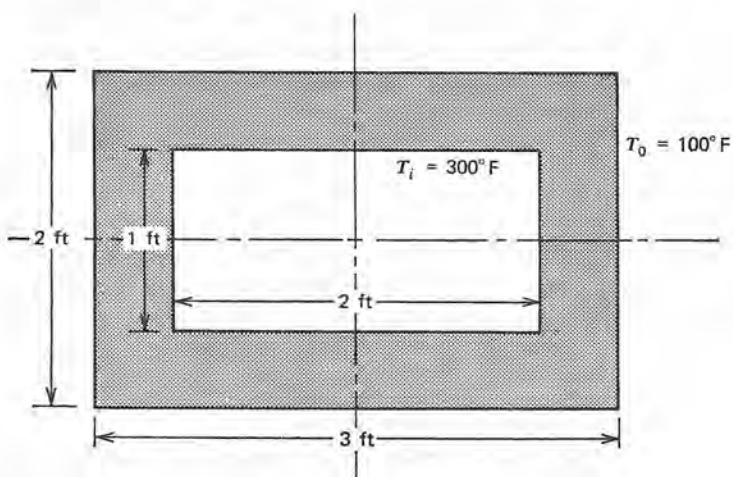


Figura 4.14 Chimenea rectangular para el análisis de graficación de flujo.

Debido a que la sección transversal de la chimenea es simétrica, sólo se necesita analizar una cuarta parte de la sección. En la figura 4.15 se muestra una parte ampliada del cuarto derecho inferior a escala.

Ahora es necesario construir la malla de isoterms ortogonales y las líneas de flujo de calor que llenan la sección transversal. Se sigue el procedimiento general descrito a continuación para dibujar la gráfica de flujo:

1. Dibuje primero "cuadrados curvilíneos" de tal forma que las isoterms y las líneas de flujo de calor formen patrones que casi tengan la forma de verdaderos cuadrados. El tamaño de la malla no es exacto; debe ser tan grande que pueda evitar trabajo innecesario y al mismo tiempo tan pequeño para dar una exactitud razonable.

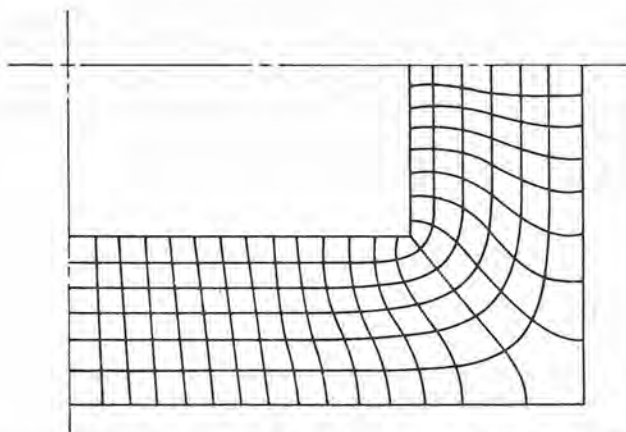


Figura 4.15 Cuadrante amplificado de chimenea para la graficación de flujo.

2. Una vez que haya iniciado la construcción de las isotermas y las líneas de flujo de calor en un límite determinado, siga el proceso hasta que la gráfica de flujo llene la sección transversal. Se deben seguir determinadas reglas en el proceso de construcción:
- Todas las fronteras son isotérmicas; las líneas de flujo de calor se intersectan perpendicularmente en las fronteras.
 - Todas las esquinas de las fronteras, que representan la intersección de isotermas, se bisectan por medio de una línea de flujo de calor.
 - Todas las líneas de simetría son líneas de flujo de calor; las líneas isotérmicas interceptan perpendicularmente las líneas de simetría.

Respetando las reglas descritas de construcción y llenando la sección transversal con cuadrados curvilíneos se puede determinar la razón buscada de transferencia de calor. En este ejemplo el número de incrementos de temperatura M es 6; el número de canales de flujo de calor para el cuarto de sección es 22 y para la sección transversal total es $4(22) = 88$; por tanto, $N = 88$. En consecuencia, el factor de forma es

$$S = \frac{N}{M} = \frac{88}{6} = 14.7$$

y la pérdida de calor a través de la chimenea es

$$\begin{aligned} q &= kS\Delta T = (0.40 \text{ Btu/hr-ft-}^\circ\text{F})(14.7)(200^\circ\text{F}) \\ &= 1147 \text{ Btu/hr por ft de chimenea} \end{aligned}$$

En la tabla 4.3 se proporcionan los factores de forma para algunas configuraciones bidimensionales comunes.

4.1-4.3 *Conducción de calor bidimensional de estado estable; soluciones integrales*

Con el siguiente ejemplo se ilustra el enfoque integral para resolver problemas de conducción de calor de estado estable multidimensional.

Ejemplo 4.9



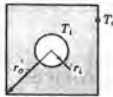
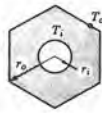
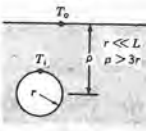
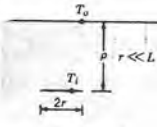
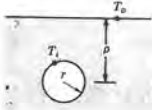
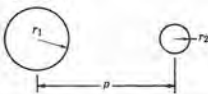
La aleta bidimensional considerada en el ejemplo 4.6 se resuelve por la técnica integral. Todas las especificaciones y dimensiones son iguales a las dadas anteriormente. La función $f(y)$ dada por $\theta(0, y) = \theta_{\text{máx}} [1 - (y/l)^2]$ se supone parabólica después para mayor facilidad se reproduce la figura 4.10 como figura 4.16. La ecuación dominante y las condiciones de frontera son

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} &= 0 \\ \theta(0, y) = f(y) &= \theta_{\text{máx}} \left[1 - \left(\frac{y}{l} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\theta(x, \pm l) = 0$$

$$\theta(\infty, y) = 0$$

Tabla 4.3 Factores de forma para la conducción

Configuración		Factor de forma, S $q = kS(T_i - T_o)$
Cilindros circulares concéntricos		$\frac{2\pi L}{\ln(r_o/r_i)}$
Cilindros circulares excéntricos		$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(1 + \frac{\rho^2 - \varepsilon^2}{2\rho}\right)} \rho = r_i/r_o$ $\varepsilon = e/r_o$
Cilindro circular en un cilindro cuadrado		$\frac{2\pi L}{\ln(r_o/r_i) - 0.27079}$
Cilindro circular en un cilindro hexagonal		$\frac{2\pi L}{\ln(r_o/r_i) - 0.10669}$
Cilindro horizontal enterrado de longitud L		$\frac{2\pi L}{\ln(2\rho/r)}$ $\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}(\rho/r)}$
Disco delgado horizontal enterrado, y espesor de radio « r		$\frac{2.22r}{1 - r/2.83\rho}$
Esfera enterrada		$\frac{4\pi r}{1 - r/20}$
Dos cilindros en un medio homogéneo infinito $L \gg r_1, r_2, \rho$		$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}(D^2 - r_1^2 - r_2^2/2r_1r_2)}$

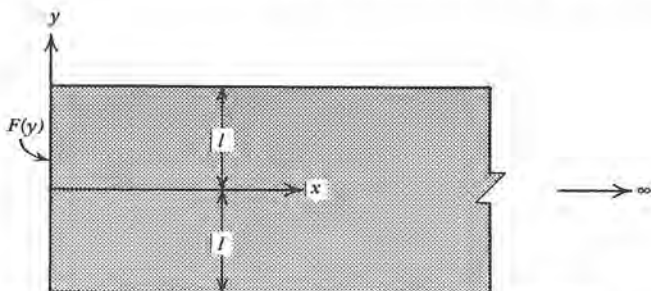


Figura 4.16 Conducción de estado estable en ala bidimensional.

La técnica integral involucra la resolución de la integral de la ecuación diferencial dominante. Para este caso, la integral que se debe resolver es

$$\int_0^l \int_0^\infty \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) dx dy = 0 \quad (4-75)$$

Ahora se debe elegir una forma aproximada para la variable dependiente, $\theta(x, y)$, que satisfaga las condiciones de frontera. Entonces, se hace compatible la forma supuesta de $\theta(x, y)$ con la ecuación dominante por medio de uno de dos métodos, el método de *Ritz* o el de *Kantorovich*. Ahora se consideran ambos sucesivamente.

1. Empleando el método de *Ritz*, se supone la forma de $\theta(x, y)$ en las dimensiones x y y sujeta a las condiciones de frontera que se deben satisfacer. Para este caso se usa una función cuadrática en la dirección de las y y una exponencial en la dirección de las x . El perfil de *Ritz* supuesto es

$$\theta(x, y) = A(l^2 - y^2)e^{-Bx}$$

en donde se requiere que el parámetro A sea $\theta_{m\acute{a}x}/l^2$ por la condición de frontera en $x = 0$. En consecuencia, la función que se debe usar es

$$\theta(x, y) = \frac{\theta_{m\acute{a}x}}{l^2} (l^2 - y^2)e^{-Bx} \quad (4-76)$$

El parámetro B queda determinado al sustituir la ecuación (4-76) en la relación integral, ecuación (4-75).

Ahora se desarrolla la integración. La primera integración, término a término,¹ de la ecuación (4-75) da la expresión

$$\int_0^l \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_0^\infty dy + \int_0^\infty \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_0^l dx = 0 \quad (4-77)$$

¹ Los procedimientos de integración siguen la regla de Leibnitz.

Despejando y resolviendo cada uno de estos términos por separado, usando la ecuación (4-76), se tiene, para el primero,

$$\begin{aligned}\int_0^l \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_0^\infty dy &= - \int_0^l \frac{B \theta_{\text{máx}}}{l^2} (l^2 - y^2) e^{-Bx} \Big|_0^\infty dy \\ &= \frac{B \theta_{\text{máx}}}{l^2} \int_0^l (l^2 - y^2) dy \\ &= \frac{B \theta_{\text{máx}}}{l^2} \left[l^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_0^l = \frac{2}{3} B l \theta_{\text{máx}}\end{aligned}$$

y para el segundo,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_0^l dx &= - \int_0^\infty \theta_{\text{máx}} \frac{2y}{l^2} \Big|_0^l e^{-Bx} dx \\ &= - \frac{2 \theta_{\text{máx}}}{l} \int_0^\infty e^{-Bx} dx \\ &= - \frac{2 \theta_{\text{máx}}}{l} \left[- \frac{e^{-Bx}}{B} \right]_0^\infty = - \frac{2 \theta_{\text{máx}}}{Bl}\end{aligned}$$

Una vez evaluados estos términos, se puede escribir la ecuación (4-77)

$$\frac{2}{3} B l \theta_{\text{máx}} - \frac{2 \theta_{\text{máx}}}{Bl} = 0$$

y se obtiene el valor del parámetro B como

$$B = \frac{\sqrt{3}}{l}$$

Por tanto, la solución usando el método de Ritz queda

$$\theta(x, y) = \theta_{\text{máx}} \left(\frac{l^2 - y^2}{l^2} \right) e^{-\sqrt{3}x/l} \quad (4-78)$$

2. En el método de Kantorovich el procedimiento es bastante parecido excepto que se supone que la forma funcional para $\theta(x, y)$ está solamente en una dirección. En este caso, sea la dirección de las y , y la forma es cuadrática como antes. Ahora el perfil supuesto de Kantorovich es

$$\theta(x, y) = (l^2 - y^2)X(x) \quad (4-79)$$

en donde se obtiene la función $X(x)$ de la formulación integral y de las condiciones de frontera. Al sustituir la ecuación (4-79) en la ecuación (4-75) se obtiene

$$\int_0^l \int_0^\infty \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) dx dy = \int_0^l \int_0^\infty [(l^2 - y^2)X'' - 2X] dx dy = 0$$

La primera integración en la dirección de las y da

$$\int_0^{\infty} \left[\left(l^2 y - \frac{y^3}{3} \right) X'' - 2Xy \right] dy = 0$$

o, evaluando los límites, se tiene

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{2}{3} l^3 X'' - 2lX \right] dy = 0$$

Para que esta integral, evaluada entre los límites 0 e ∞ , sea verdadera en general, el integrando debe ser idénticamente igual a cero. De esa manera se tiene la ecuación diferencial ordinaria

$$X'' - \frac{3}{l^2} X = 0 \quad (4-80)$$

y las condiciones de frontera aplicables

$$X(\infty) = 0, \quad X(0) = \frac{\theta_{\max}}{l^2}$$

La solución a la ecuación (4-80) es

$$X = Me^{-\sqrt{3}x/l} + Ne^{\sqrt{3}x/l}$$

Aplicando las condiciones de frontera se obtiene, para las constantes M y N ,

$$M = \frac{\theta_{\max}}{l^2} \quad N = 0$$

En consecuencia se tiene, para la función,

$$X(x) = \frac{\theta_{\max}}{l^2} e^{-\sqrt{3}x/l}$$

y para la solución completa,

$$\theta(x, y) = \theta_{\max} \left(\frac{l^2 - y^2}{l^2} \right) e^{-\sqrt{3}x/l} \quad (4-81)$$

Se ve que el método de Kantorovich da el mismo resultado, ecuación (4-81), que el método de Ritz, ecuación (4-78), para este ejemplo. No siempre dan resultados idénticos los dos métodos.

Se ha mostrado la distinción entre los dos métodos. En el método de Ritz se tiene una suposición razonablemente completa con relación a la forma de la variable dependiente en todas las direcciones. El perfil supuesto incluye al menos un parámetro no especificado. Sustituir el perfil supuesto de Ritz en la forma integral de la ecuación

dada, da una ecuación algebraica en el parámetro desconocido. La solución se completa resolviendo la ecuación algebraica para determinar este parámetro. En el método de Kantorovich se supone la variable dependiente en solamente una dirección con una función no especificada para describir la variación en la otra dirección. Sustituir este supuesto perfil de Kantorovich en la formulación integral, produce una ecuación diferencial que se debe resolver para completar la solución.

Generalmente el método de Ritz es más rápido; el método de Kantorovich es el más exacto. Sucede que la forma supuesta más general como en el enfoque de Kantorovich da una solución más exacta a costa de un esfuerzo (a veces considerablemente) mayor.

En el tratado de Arpaci² se da una descripción completa de la técnica integral y muchos ejemplos.

4.1-4.4 *Conducción bidimensional de calor de estado estable; solución numérica*

El ejemplo 4.10 da una solución numérica a un problema de conducción bidimensional de estado estable.

Ejemplo 4.10

Encontrar la distribución de temperatura de estado estable en una placa cuadrada bidimensional con condiciones de frontera como se muestran en la figura 4.17. En este caso, la ecuación diferencial aplicable es la forma bidimensional de la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2-54)$$

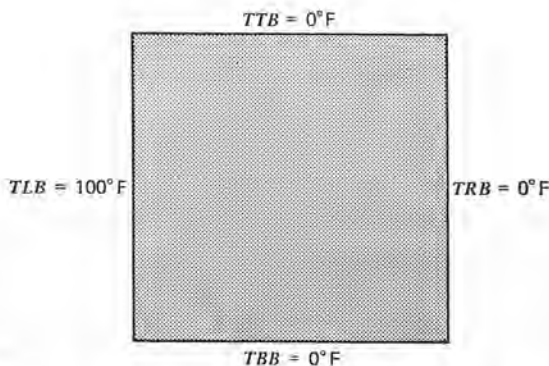


Figura 4.17 Placa bidimensional para el análisis numérico de conducción de estado estable.

² V. Arpaci, *Conduction Heat Transfer*, (Reading, Mass. Addison-Wesley, 1966).

Usando diferencias centrales, se escribe la forma de la diferencia finita de esta ecuación como

$$\frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{\Delta y^2} = 0$$

Para el caso de una malla cuadrada con $\Delta x = \Delta y$, la solución para $T_{i,j}$ queda

$$T_{i,j} = \frac{T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1}}{4} \quad (4-82)$$

que establece que la temperatura en un nodo dado es la media aritmética de las temperaturas en nodos adyacentes.

A continuación se proporcionan el diagrama de flujo (figura 4.18), el listado del programa y la solución de la computadora. La técnica de solución es la iteración de Gauss-Seidel.

Se ha escrito³ este programa en forma bastante general para que se puedan emplear distintos tamaños de nodo, condiciones de frontera y criterios de convergencia.

PROGRAMA GS2D

DIMENSION T(50,50)

- C ESTE PROGRAMA CALCULA LA DISTRIB. TEMPERATURA
C ESTADO ESTABLE EN PLACA PLANA CUADRADA USANDO LA
ITERACION GAUSS SEIDEL.

N=TTYIN(4HN =)

M=TTYIN(4HM =)

EPS=TTYIN(4HEPS ,2H =)

K=TTYIN(4HK =)

TBB=TTYIN(4HTBB ,2H =)

TTB=TTYIN(4HTTB ,2H =)

TLB=TTYIN(4HTLB ,2H =)

TRB=TTYIN(4HTRB ,2H =)

TI=TTYIN(4HTI =,1H)

N1=N+1

M1=M+1

- C ASIGNA TEMP EN TODO EL LIMITE

DO 12 I=1,N1

T(I,1)=TTB

12 T(I,M1)=TBB

DO 11 J=1,M1

T(1,J)=TLB

11 T(N1,J)=TRB

³ Este y los siguientes programas se escribieron para el sistema de tiempo compartido de la Oregon State University. Ni la ejecución lógica ni los enunciados FORTRAN deben variar en otros sistemas; sin embargo, determinados dispositivos de entrada/salida y otras características del sistema de la OSU pueden requerir ligeras modificaciones antes que los programas listados puedan compilarse en otros sistemas de computadoras.

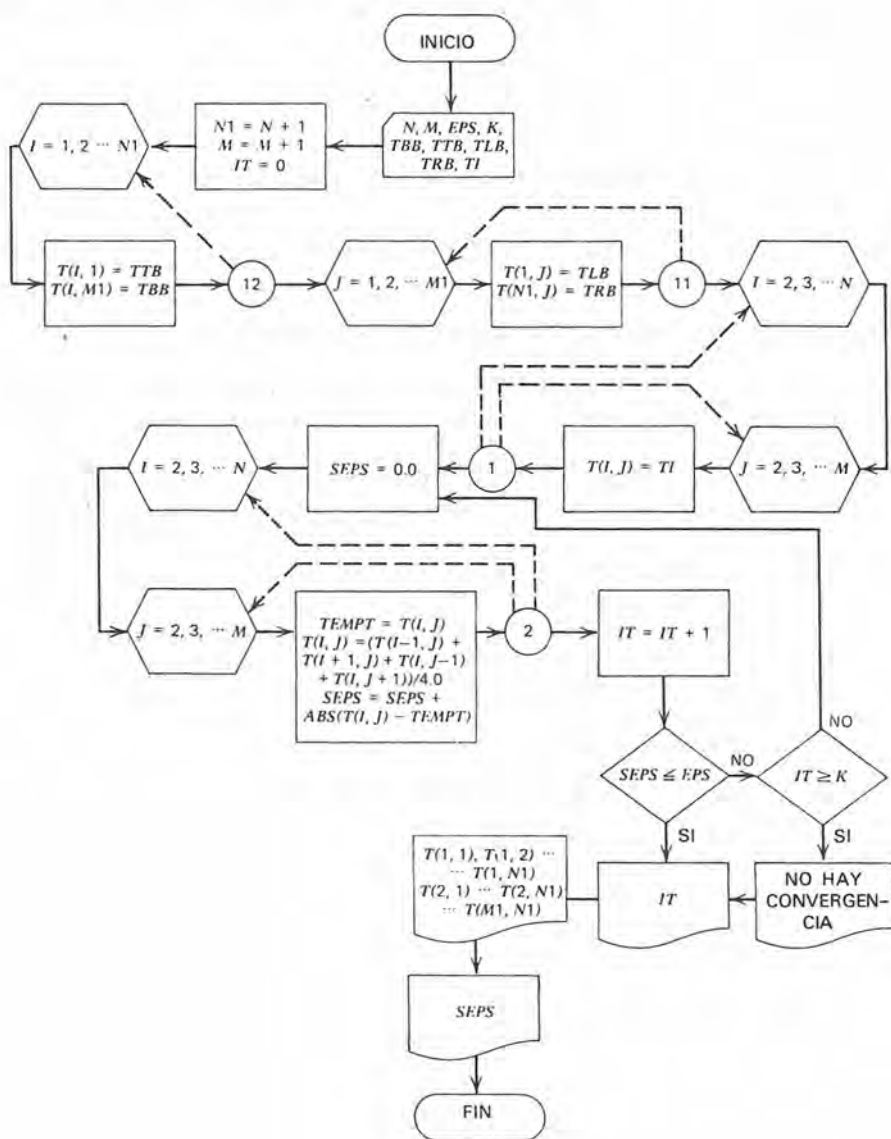


Figura 4.18 Diagrama de flujo para resolver un problema de conducción bidimensional de estado estable usando la iteración de Gauss-Seidel.

```

C   ASIGNA TEMPERATURAS INICIALES
    DO 1 I=2,N
    DO 1 J=2,M
1   T(I,J)=TI
C   CALCULA NUEVAS TEMPERATURAS
    IT=0
3   SEPS=0.0
    DO 2 I=2,N
    DO 2 J=2,M
    TEMPT=T(I,J)
    T(I,J)=(T(I-1,J)+T(I+1,J)+T(I,J-1)+T(I,J+1))/4.
2   SEPS=SEPS + ABS(T(I,J)-TEMPT)
    IT=IT+1
    IF(SEPS.LE.EPS)GO TO 4
    IF(IT.GE.K)GO TO 5
    GO TO 3
5   WRITE(61,100)
100 FORMAT(1H0,14HNO CONVERGENTE)
4   WRITE(61,99)IT
99  FORMAT(1H0,16HNO. ITERATIONS =,I7)
    WRITE(61,101)
101 FORMAT(1H0,24HTEMPERATURA EN LOS
    PUNTOS DE LA MAMA
    DO 6 J=1,M1
6   WRITE(61,102)(T(I,J),I=1,N1)
102 FORMAT(1H0,9F7.2)
    WRITE(61,103)SEPS
103 FORMAT(1H0,12H SUMA DE EPS =,E9.2)
    END

```

El problema enunciado se especificó con seis incrementos tanto en la dirección de las x como de las y ($N = 5$, $M = 5$). Se establecieron los límites de temperatura constante ($TBB = 0.0$, $TTB = 0.0$, $TLB = 100.0$, $TRB = 0.0$); se estableció el criterio de convergencia ($EPS = 0.10$); el máximo número de iteraciones permitidas fue 50 ($K = 50$); y se igualó la temperatura en todos los puntos nodales interiores en 50°F ($TI = 50.0$)

El proceso de cálculo sigue el procedimiento de Gauss-Seidel en la forma descrita en el capítulo 3.

Sistemáticamente se recalculan todos los valores de $T_{i,j}$ usando la ecuación (4-28). Cada valor $T_{i,j}^{n+1}$ recién calculado reemplaza el valor $T_{i,j}^n$, anterior, proceso que se repite hasta que

$$|T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n| \leq EPS$$

En este problema de ejemplo se necesitaron 19 iteraciones antes que se satisficiera el criterio de convergencia. Si no se hubiera obtenido convergencia dentro de las 50 iteraciones se hubiera terminado el cálculo, se hubiera impreso el mensaje "NO CONVERGENCE" ("NO CONVERGENCIA") y se hubieran desplegado los valores más recientes de $T_{i,j}$.

A continuación se proporciona un listado de la solución a este ejemplo.

```

N = 5
M = 5
EPS = 0.10
K = 50
TBB = 0.0
TTB = 0.0
TLB = 100.0
TRB = 0.0
TI = 50.0
NO. ITERACIONES = 19
TEMPERATURA EN LOS PUNTOS DE LA MALLA
100.00 0 0 0 0 0
100.00 45.47 22.36 11.00 4.55 0
100.00 59.49 32.98 17.06 7.21 0
100.00 59.48 32.97 17.06 7.20 0
100.00 45.46 22.36 10.99 4.55 0
100.00 0 0 0 0 0
SUMA DE EPS = 9.80E-02

```

FIN DEL PROGRAMA FORTRAN

El ejemplo 4.10 es representativo de la solución cuando se desean las temperaturas interiores. El espaciado de la malla fue algo grueso y el criterio de convergencia no fue muy rígido; sin embargo, los puntos destacados de este tipo de determinación son aparentes. Se puede notar la simetría de las temperaturas nodales a través de la línea horizontal de centros.

Se puede obtener un poco más de información del resultado que comprueba todavía más la exactitud de la solución.

Descomponiendo en nodos la sección transversal en un arreglo cuadrado, se supone que la transferencia de calor ocurre de nodo a nodo *solamente* y entonces sólo a lo largo de caminos que conectan nodos adyacentes. Ya que se debe proporcionar calor a la frontera izquierda para mantener la temperatura constante de 100°F, la cantidad de calor proporcionado es igual al conducido desde la frontera izquierda a cada uno de los nodos internos adyacentes a la frontera izquierda. Por tanto, se ve que el calor total eliminado de la frontera del lado izquierdo es, por unidad de profundidad (en la dirección de las z),

$$q_{\text{total}} = k \frac{\Delta y}{\Delta x} \sum_{j=2}^M (T_{1,j} - T_{2,j})$$

Ya que se trata de un arreglo cuadrado, $\Delta y/\Delta x = 1$, con lo que la expresión para q queda

$$\begin{aligned}
 q_{\text{total}} &= k \sum_{j=2}^M (T_{1,j} - T_{2,j}) \\
 &= k(54.53 + 40.51 + 40.52 + 54.54) = 190.10k
 \end{aligned}$$

El valor verdadero de q_{total} depende del material involucrado, o sea del valor apropiado de la conductividad térmica.

La descripción y estudio anterior consideró el calor adicionado. Para que los límites superior, inferior y del lado derecho permanezcan a 0°F , se debe *extraer* calor; la cantidad de calor extraído es la suma del que se conduce desde todos los nodos internos adyacentes a los que están a 0°F . La razón total de extracción de calor se determina mediante la expresión

$$q_{\text{total}} = k \left[\frac{\Delta x}{\Delta y} \sum_{i=2}^N (T_{i,M} - T_{i,M1}) + \frac{\Delta x}{\Delta y} \sum_{i=2}^N (T_{i,2} - T_{i,1}) + \frac{\Delta y}{\Delta x} \sum_{j=2}^M (T_{N,j} - T_{N1,j}) \right]$$

Nuevamente, ya que el arreglo de la malla es cuadrado, $\Delta x/\Delta y = \Delta y/\Delta x = 1$, y q_{total} por unidad de profundidad está dado por

$$q_{\text{total}} = k \left[\sum_{i=2}^N (T_{i,M} - T_{i,M1}) + \sum_{i=2}^N (T_{i,2} - T_{i,1}) + \sum_{j=2}^M (T_{N,j} - T_{N1,j}) \right]$$

en donde las sumatorias son para las superficies superior, inferior y derecha respectivamente. Sustituyendo los valores numéricos adecuados se tiene

$$\begin{aligned}
 q_{\text{total}} &= k[(45.47 + 22.36 + 11.00 + 4.55) + (4.55 \\
 &\quad + 7.21 + 7.20 + 4.55) + (45.46 + 22.36 \\
 &\quad + 10.99 + 4.55)] \\
 &= 190.25k.
 \end{aligned}$$

Este resultado debe dar el mismo valor que se obtuvo antes para la entrada total de calor. La diferencia se debe al criterio de convergencia empleado y al espaciado grueso de la malla. Tomando en cuenta estas especificaciones, se puede afirmar que es satisfactoria la congruencia de 0.15 en 190, o sea aproximadamente 0.08%.

A continuación se proporciona otro listado de salida usando el mismo programa que antes pero con distintas condiciones de frontera, espaciados nodales y criterio de convergencia.

$N = 8$
 $M = 8$
 $\text{EPS} = .08$
 $K = 100$

TBB = 50.0
 TTB = 180.0
 TLB = 150.0
 TRB = 0.0
 TI = 100.0

NO ITERACIONES = 49

TEMPERATURA EN LOS PUNTOS DE LA MALLA

150.00	180.00	180.00	180.00	180.00	180.00	180.00	170.00	0
150.00	160.13	160.99	158.12	152.56	143.24	126.24	90.35	0
150.00	149.52	145.71	138.91	128.89	114.14	91.39	55.16	0
150.00	142.25	133.40	122.92	109.96	93.02	70.01	38.89	0
150.00	136.08	122.70	109.41	95.02	77.97	56.73	30.41	0
150.00	129.35	111.92	97.01	82.71	67.10	48.54	26.00	0
150.00	119.41	98.63	83.97	71.72	59.20	44.31	25.05	0
150.00	99.65	79.21	68.54	60.98	53.66	44.46	29.88	0
150.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	0

SUMA DE EPS = 6.85E-02

Se asignaron las temperaturas 50°F, 180°F, 150°F y 0°F a las fronteras inferior, superior, izquierda y derecha respectivamente; se calcularon cuarenta y nueve nodos interiores; y se especificó un criterio de convergencia de $\varepsilon \leq 0.08$. Una comprobación del balance de calor da

$$\begin{aligned}\sum q_{\text{entr}} &= 417.77k \\ \sum q_{\text{sálda}} &= 417.91k\end{aligned}$$

que es congruente dentro del 0.04%.

En el ejemplo 4.11 hay una fuente de calor interno. El método de solución será la eliminación en vez de la iteración de Gauss-Seidel.

Ejemplo 4.11

Investigar el efecto de la intensidad de una fuente interna de calor en la distribución de temperatura de estado estable en una pared plana de 1/ft de espesor de acero dulce. Un lado de la pared está expuesto al aire a 70°F con la superficie de conductancia igual a 23 Btu/hr ft²·°F. Del otro lado hay gases de un horno a 450°F con una conductancia superficial igual a 125 Btu/hr-ft²·°F.

En este problema bidimensional se divide la pared plana de acero en seis sub-volumenes; por tanto, hay siete localizaciones en las cuales se desea conocer las temperaturas (dos nodos superficiales y cinco nodos interiores).

Un balance de calor, escrito para cada nodo a la vez, da el sistema de ecuaciones que se debe resolver. En la figura 4.19 se muestran el arreglo nodal y las cantidades de interés.

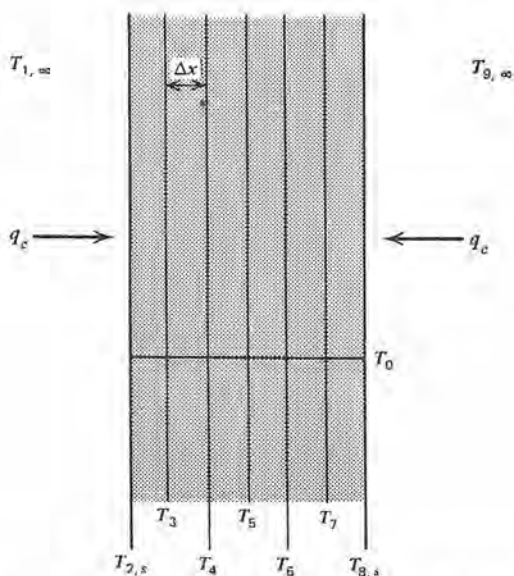


Figura 4.19 Arreglo de los nodos para la pared plana del ejemplo 4.11.

Las ecuaciones para cada nodo son

$$\text{nodo 1: } q_{2-1} + q_c + \dot{u} = 0$$

$$\text{nodo 2: } q_{1-2} + q_{3-2} + \dot{u} = 0$$

$$\text{nodo 3: } q_{2-3} + q_{4-3} + \dot{u} = 0$$

$$\text{nodo 4: } q_{3-4} + q_{5-4} + \dot{u} = 0$$

$$\text{nodo 5: } q_{4-5} + q_{6-5} + \dot{u} = 0$$

$$\text{nodo 6: } q_{5-6} + q_{7-6} + \dot{u} = 0$$

$$\text{nodo 7: } q_{8-7} + q_c + \dot{u} = 0$$

Ahora se rescribe cada una de las siete ecuaciones anteriores en función de las temperaturas expresando los términos en q apropiadamente. Considerando con detalle el nodo 1, la expresión del balance del calor queda

$$-\frac{k(T_3 - T_{2,s})(1)}{\Delta x} + h_1(T_{1,\infty} - T_2)(1) + \frac{\dot{u}(\Delta x)(1)}{2} = 0$$

que se transforma en

$$\frac{h_1 \Delta x}{k} T_{1,\infty} - \left(\frac{1 + h_1 \Delta x}{k} \right) T_{2,s} + T_3 = -\frac{\dot{u}(\Delta x)^2}{2k}$$

después de un rearrreglo. Las seis expresiones correspondientes a los seis nodos restantes se rescriben en forma análoga. A continuación se presenta el conjunto de ecuaciones generadas en esta forma:

$$\begin{aligned}
c_1 T_{1,\infty} + c_2 T_{2,s} + T_3 &= \frac{c_3}{2} \\
T_{2,s} - 2T_3 + T_4 &= c_3 \\
T_3 - 2T_4 + T_5 &= c_3 \\
T_4 - 2T_5 + T_6 &= c_3 \\
T_5 - 2T_6 + T_7 &= c_3 \\
T_6 - 2T_7 + T_{8,s} &= c_3 \\
T_7 + c_4 T_{8,s} + c_5 T_{9,\infty} &= \frac{c_3}{2}
\end{aligned}$$

en donde las constantes c_n , para $n = 1$ a 5 son

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{h_1 \Delta x}{k} \\
c_2 &= -\left(1 + \frac{h_1 \Delta x}{k}\right) = -(1 + c_1) \\
c_3 &= \frac{-\dot{u} \Delta x^2}{k} \\
c_4 &= -\left(1 + \frac{h_9 \Delta x}{k}\right) \\
c_5 &= \frac{h_9 \Delta x}{k} = -(1 + c_4)
\end{aligned}$$

Usando la eliminación de Gauss se resuelve numéricamente el conjunto anterior de ecuaciones algebraicas en T_n . A continuación se presentan el diagrama de flujo (figura 4.20), listado de programa y solución de la computadora.

PROGRAMA GELIM

C ESTE PROGRAMA DETERMINA LA DISTR DE TEMP DE ESTADO
C ESTABLE EN UNA PLACA INFINITA DE LADOS PARALELOS
C CON GENERACION INTERNA DE ENERGIA U. LA SOLUCION
C SE OBTIENE EMPLEANDO LA ELIMINACION DE GAUSS.

DIMENSION A(7,8),T(7)

N=TTYIN(4HNUMB,4HER O, 4HF NO,4HDES ,3H=)

N1=N+1

H1=TTYIN(4HH1 =,1H)

T1=TTYIN(4HT1 =,1H)

H2=TTYIN(4HH2 =,1H)

T2=TTYIN(4HT2 =,1H)

U=TTYIN(4H U =,1H)

TK=TTYIN(4HTK =,1H)

AL=TTYIN(4HTHIC,4HKNES,4HS =)

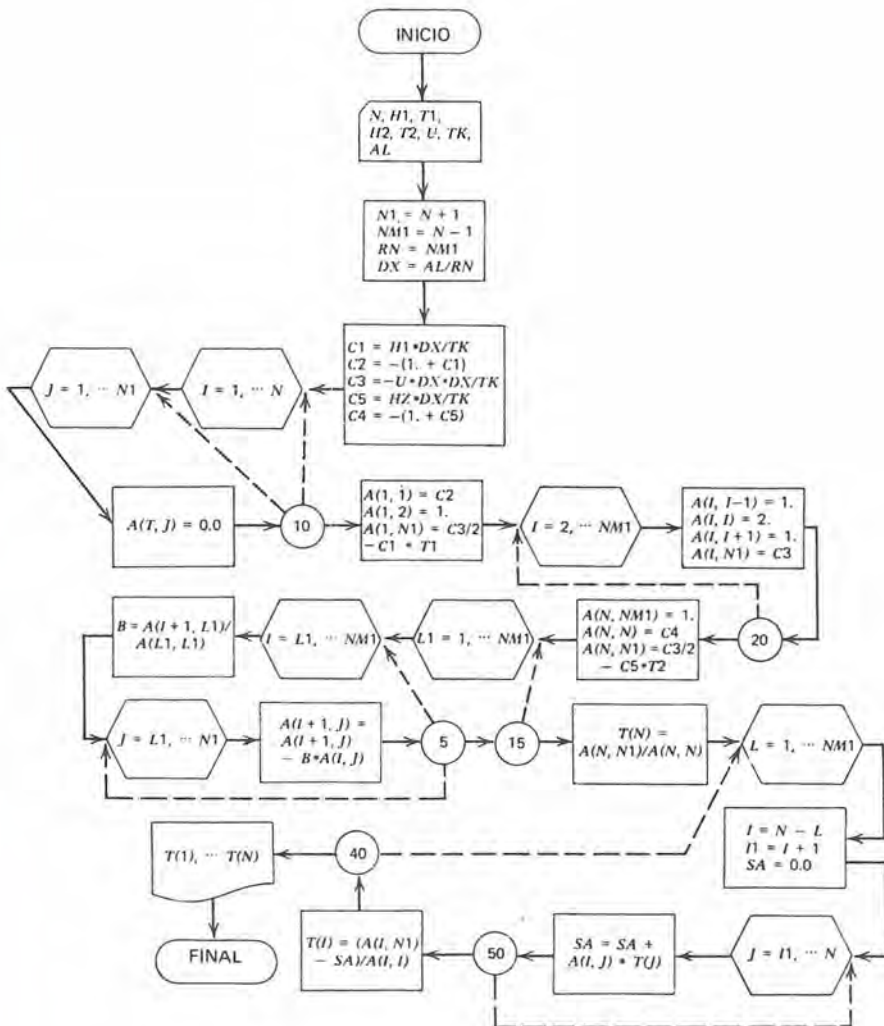


Figura 4.20 Diagrama de flujo para la eliminación de Gauss.

```

NM1=N-1
RN=NM1
DX=AL/RN
C1=H1*DX/TK
C2=-(1.+C1)
C3=-U*DX*DX/TK
C5=H2*DX/TK
C4=-(1.+C5)

C      INICIALIZA MATRIZ A
DO 10 I=1,N
DO 10 J=1,N1
10 A(I,J)=0.0

C      ASIGNA VALORES A MATRIZ AUMENTADA A
A(1,1)=C2
A(1,2)=1.
A(1,N1)=C3/2.-C1*T1
DO 20 I=2,NM1
A(I,I-1)=1.
A(I,I)=-2.
A(I,I+1)=1.
20 A(I,N1)=C3
A(N,NM1)=1.
A(N,N)=C4
A(N,N1)=C3/2.-C5*T2

C      REDUCE MATRIZ A
DO 15 L1=1,NM1
DO 5 I=L1,NM1
B=A(I+1,L1)/A(L1,L1)
DO 5 J=L1,N1
5 A(I+1,J)=A(I+1,J)-B*A(I,J)
15 CONTINUE

C      SUSTITUCION RETROACTIVA
T(N)=A(N,N1)/A(N,N)
DO 40 L=1,NM1
I=N-L
I1=I+1
SA=0.0
DO 50 J=I1,N
50 SA=SA+A(I,J)*T(J)
40 T(I)=(A(I,N1)-SA)/A(I,I)
WRITE(61,100)
100 FORMAT(1H ,26H TEMPERATURA EN LOS PUNTOS NODALES
WRITE(61,101)(T(I),I=1,N)
101 FORMAT(1H0,7(3X,F7.1))
END

```

El programa está escrito de manera que se puedan introducir distintos tamaños de nodos, materiales, temperaturas de frontera, conductancias de superficie y razones de generación. En este ejemplo el espaciado internodal es de 1/6 ft, la conductividad térmica tiene el valor constante 21 Btu/hr-ft-°F, las conductancias de superficie y temperaturas en la frontera son las dadas en el enunciado del problema y las razones de generación interna son 0; 20,000; 40,000; 60,000; 80,000; y 100,000 Btu/hr-ft³.

NUMERO DE NODOS = 7

H1 = 23.0

T1 = 70.0

H2 = 125.0

T2 = 450.0

U = 0.0

TK = 21.0

GROSOR = 1.0

TEMPERATURA EN LOS PUNTOS NODALES

236.7 267.2 297.6 328.0 358.5 388.9 419.3

NUMERO DE NODOS = 7

H1 = 23.0

T1 = 70.0

H2 = 125.0

T2 = 450.0

U = 20000.0

TK = 21.0

GROSOR = 1.0

TEMPERATURA EN LOS PUNTOS NODALES

515.8 584.0 625.7 641.0 629.7 592.1 528.0

NUMERO DE NODOS = 7

H1 = 23.0

T1 = 70.0

H2 = 125.0

T2 = 450.0

U = 40000.0

TK = 21.0

GROSOR = 1.0

TEMPERATURA EN LOS PUNTOS NODALES

795.0 900.9 953.8 953.9 901.0 795.3 636.6

NUMERO DE NODOS = 7

H1 = 23.0

T1 = 70.0

H2 = 125.0

$T_2 = 450.0$
 $U = 60000.0$
 $TK = 21.0$
 $GROSOR = 1.0$

TEMPERATURA EN LOS PUNTOS NODALES

1074.1 1217.7 1281.9 1266.8 1172.3 998.5 745.2
 NUMERO DE NODOS = 7
 $H_1 = 23.0$
 $T_1 = 70.0$
 $H_2 = 125.0$
 $T_2 = 450.0$
 $U = 80000.0$
 $TK = 21.0$
 $GROSOR = 1.0$

TEMPERATURA EN LOS PUNTOS NODALES

1353.2 1534.5 1610.1 1579.7 1443.6 1201.7 853.9
 NUMERO DE NODOS = 7
 $H_1 = 23.0$
 $T_1 = 70.0$
 $H_2 = 125.0$
 $T_2 = 450.0$
 $U = 100000.0$
 $TK = 21.0$
 $GROSOR = 1.0$

TEMPERATURA EN LOS PUNTOS NODALES

1632.3 1851.4 1938.2 1892.7 1714.9 1404.9 962.5

En la figura 4.21 se resumen los resultados, donde se muestran los perfiles de temperatura generados para cada valor de \dot{u} . Se puede notar el efecto de la razón de la generación en las temperaturas en distintos lugares, incluyendo cada superficie; igualmente se puede notar la forma en que la máxima temperatura interior se aleja del gas de alta temperatura, en donde el coeficiente superficial es elevado, hacia el lado adyacente al gas a menor temperatura, donde el coeficiente de la superficie es bajo.

Los dos ejemplos numéricos recién presentados se escogieron de manera que hubiera la mayor diferencia posible entre la formulación, las técnicas de solución y los tipos de información dados y deseados. El estudiante debe percibir la variabilidad posible en la solución de problemas de transferencia de calor de estado estable, usando la computadora digital.

En la sección 4.2-4 se consideran las soluciones numéricas de algunos problemas de conducción de estado inestable.

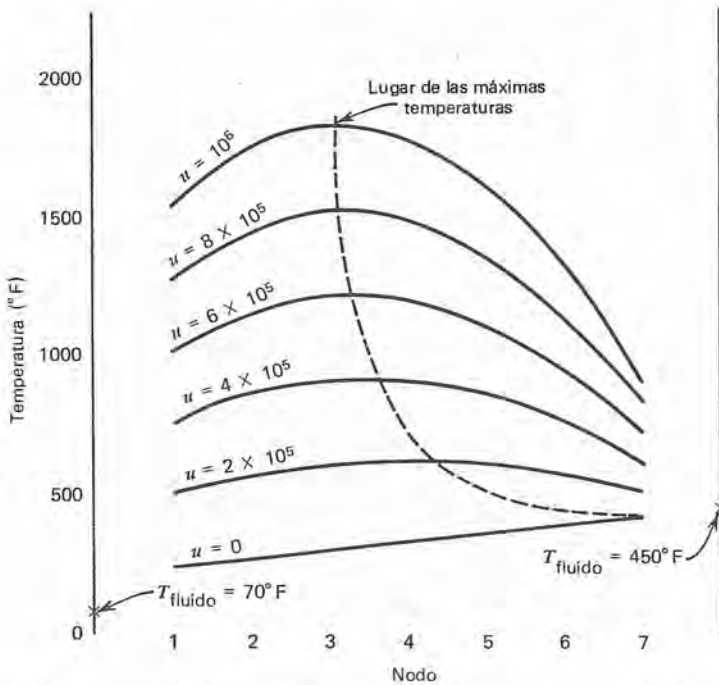


Figura 4.21 Comparación de perfiles de temperatura para distintos valores de la generación de energía interna.

4.2 CONDUCCION DE CALOR DE ESTADO INESTABLE

Se llama proceso de "estado inestable" o "transitorio" al que depende del tiempo. Cada uno de los temas y problemas considerados en la sección 4.1 tiene una contraparte transitoria; en algún momento, todos los casos de estado estable han pasado por una fase transitoria. En muchos casos, la fase transitoria es una porción muy pequeña del tiempo total en el que ocurre un proceso de transferencia de calor, por lo que es relativamente de poca importancia. Este es el caso de arrancar una gran planta en que se logran condiciones de estado estable y se opera con condiciones invariantes por muy largos períodos, de semanas o meses. En otras operaciones, tales como el tratamiento término de fundiciones metálicas o la vulcanización de hule, la situación transitoria es de principal interés y puede ser que nunca se llegue a la operación de estado estable. El propósito de esta sección es investigar el proceso de transferencia de calor dependiente del tiempo en un medio conductor y adquirir habilidad para analizar y resolver problemas en los cuales tanto el tiempo como las coordenadas espaciales incluyan las variables independientes.

4.2-1 Conducción transitoria de calor en sistemas unidimensionales sin generación

Aquí se aplica una variante de la ecuación (4-1), en donde la variante es la adición de un término transitorio. La ecuación dominante aplicable es

$$\frac{1}{x^i} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^i \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4-83)$$

donde i toma los valores de 0, 1 y 2 en las coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas respectivamente. El parámetro α es la *difusividad térmica* presentada en el capítulo 2.

Obviamente, la ecuación (4-83) es una ecuación diferencial parcial, en contraste con la ecuación (4-1), su contraparte de estado estable. En consecuencia, para esta geometría por demás sencilla, la solución se enfrenta a una ecuación diferencial parcial. La única excepción a este caso es en los que basta un análisis de parámetro de mosaico para describir la situación física. En consecuencia, el primer enfoque es el del parámetro de mosaico.

4.2-1.1 Conducción transitoria unidimensional: análisis del parámetro de mosaico

La figura 4.22 muestra un "mosaico" de material que comprende el sistema de interés. Se considera que la temperatura es solamente función del tiempo, la suposición usual del parámetro de mosaico; en consecuencia, la temperatura es uniforme en todo el sistema en cualquier instante. Se transfiere el calor entre el sistema y su medio ambiente por medio de la convección.

Con referencia a la ecuación (2-14), que se repite a continuación para referencia, se puede obtener la ecuación dominante apropiada.

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W_s}{dt} - \frac{\delta W_\mu}{dt} = \frac{dE_\sigma}{dt} - \sum_{i=1}^n \left(e_i + \frac{p}{\rho} \right) \frac{dM_i}{dt} \quad (2-14)$$

Para el caso actual, cada término toma los siguientes valores para las razones declaradas:

$$\frac{\delta W_s}{dt} = 0 \quad \text{— no se hace trabajo de flecha}$$

$$\frac{\delta W_\mu}{dt} = 0 \quad \text{— no hay flujo dentro del sistema; por tanto no se efectúa trabajo viscoso}$$

$$\sum_{i=1}^n \left(e_i + \frac{P}{\rho} \right) \frac{dM_i}{dt} = 0 \quad \text{—no hay masa que cruce la frontera del volumen de control}$$

$$\frac{\delta Q}{dt} = hS(T_\infty - T) \quad \text{—la transferencia de calor es por convección desde el medio ambiente al volumen de control}$$

$$\frac{dE_\sigma}{dt} = \rho V c \frac{dT}{dt}$$

Por tanto, la forma de mosaico aplicable de la ecuación de la energía es

$$\rho V c \frac{dT}{dt} = -hS(T - T_\infty) \quad (4-84)$$

Haciendo $\theta(t)$ igual a $T(t) - T_\infty$ en donde T_∞ es constante, se obtiene

$$\rho V c \frac{d\theta}{dt} = -hS\theta \quad (4-85)$$

Rearreglando los términos y separando las variables queda

$$\frac{d\theta}{\theta} = -\frac{hS}{\rho V c} dt$$

que, cuando se integra desde la condición inicial $\theta(0) = \theta_0$ a la condición general en el tiempo t da

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} = -\frac{hS}{\rho V c} \int_0^t dt$$

$$\ln \frac{\theta}{\theta_0} = \ln \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = -\frac{hS}{\rho V c} t \quad (4-86)$$

ó

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \exp \left(-\frac{hS}{\rho V c} t \right) \quad (4-87)$$

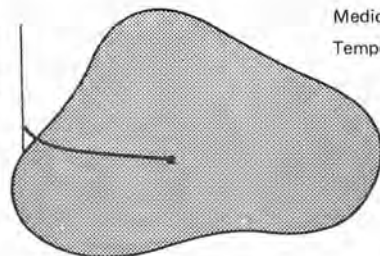
Sistema:

Volumen, V

Area de la superficie, S

Temperatura, T

Propiedades, ρ, c



Medio ambiente:

Temperatura, T_∞

Figura 4.22 Un sistema general para el análisis de la conducción de estado inestable, con parámetro de mosaico.

La ecuación (4-87) representa una respuesta general de un sistema con temperatura uniforme $T(t)$ a un intercambio convectivo de calor con su medio ambiente. Se puede reorganizar el argumento de la exponencial en distintas formas como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{hS}{\rho V c} t &= \left(\frac{hV}{kS} \right) \left(\frac{S^2 k}{\rho V^2 c} t \right) \\ &= \left(\frac{hV/S}{k} \right) \left[\frac{\alpha t}{(V/S)^2} \right]\end{aligned}\quad (4-88)$$

Cada uno de los términos entre paréntesis a la derecha de la ecuación (4-88) es adimensional. Cada uno incluye la razón V/S , que tiene unidades de longitud. Al primer término se le llama el *módulo de Biot*, que se abrevia Bi .

$$Bi \equiv \frac{hV/S}{k} \quad (4-89)$$

Por analogía con los conceptos de la resistencia térmica mencionada tanto en el capítulo 1 como en la sección 4.1-1, se ve que el módulo de Biot es la razón de $(V/S)/k$, la resistencia (interna) conductiva a la transferencia de calor, a $1/h$, la resistencia convectiva (externa) a la transferencia de calor. Por tanto, la magnitud del módulo de Biot tiene determinado significado físico al relacionar el lugar en que ocurre la mayor resistencia a la transferencia de calor. Un gran valor de Bi indica que la resistencia conductiva controla, o sea que hay mayor capacidad para la transferencia de calor a la superficie por la convección, que para la transferencia de calor fuera de la superficie por conducción. Un pequeño valor para Bi representa el caso de resistencia interna despreciable, en que hay mayor capacidad para transferir calor por conducción que por convección. En este último caso, el fenómeno de control es la convección y los gradientes de temperatura dentro del sistema son relativamente pequeños; por tanto este es el caso de una temperatura uniforme, que es la suposición básica para un análisis de parámetro de mosaico.

Considerando lo anterior, es razonable que la magnitud del módulo de Biot determine el grado de exactitud de un análisis de parámetro de mosaico de un problema de conducción transitoria de calor. Por tanto, la evaluación del módulo de Biot debe ser el paso inicial en la resolución de todo problema de conducción de calor transitoria.

Una estimación común es que el error introducido al usar el análisis de parámetro de mosaico será menor a 5% si el valor de Bi es menor a 0.1.

El segundo término entre paréntesis a la derecha de la ecuación (4-88) se denomina el *módulo de Fourier*, abreviado Fo .

$$Fo \equiv \frac{\alpha t}{(V/S)^2} \quad (4-90)$$

La representación del módulo de Fourier dada en la ecuación (4-90) es una forma común de "adimensionalizar" la variable tiempo. Una forma conveniente de enunciar la solución del parámetro de mosaico para la conducción transitoria es

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-BiFo} \quad (4-91)$$

La figura 4.23 es una representación gráfica de la ecuación (4-91).

En el ejemplo (4-12) se ilustra el uso de la ecuación (4-91).

Ejemplo 4.12

Un lingote cilíndrico de acero inoxidable de 4 in de diámetro y 1 ft de longitud pasa por un horno de tratamiento térmico de 20 ft de longitud. La temperatura inicial del lingote es de 200°F y debe llegar a 1 500°F como preparación para el trabajo. El gas del horno está a 2 300°F y el coeficiente de la superficie combinada radiante y con-

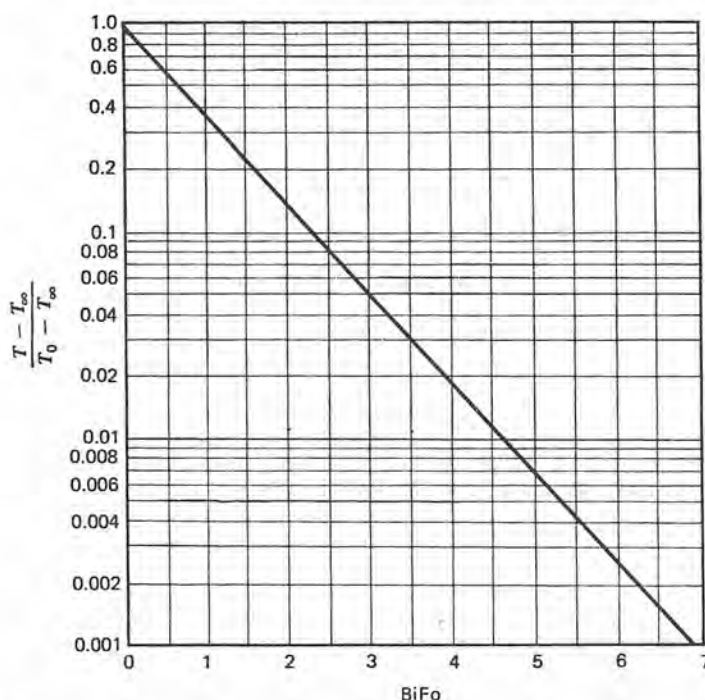


Figura 4.23 Variación en la temperatura en un sistema de parámetro de mosaico sin generación interna de energía.

ectiva es 18 Btu/hr-ft²-°F. Para que se satisfagan las condiciones impuestas, ¿cuál debe ser la máxima velocidad a la que avance el lingote por el horno?

Inicialmente se calcula que el módulo de Biot es

$$\begin{aligned} \text{Bi} &= \frac{h V/S}{k} \\ &= \frac{h}{k} \left[\frac{D^2}{4} L / \left(DL + 2 \frac{D^2}{4} \right) \right] \\ &= \frac{h}{k} \left(\frac{DL/4}{L + D/2} \right) \\ &= \frac{18 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^\circ\text{F}}{13 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^\circ\text{F}} \left[\frac{(4/12 \text{ ft})(1 \text{ ft})/4}{1 \text{ ft} + 1/2(4/12 \text{ ft})} \right] \\ &= \frac{18}{13} \left(\frac{1}{14} \right) = 0.099 \end{aligned}$$

Con este valor para Bi, un análisis de parámetro de mosaico da un error de no más del 5%. Ahora se usa la ecuación (4.91) para calcular los valores de

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{1500 - 2300}{200 - 2300} = 0.381$$

y

$$\begin{aligned} \text{Fo} &= \frac{\alpha t}{(V/S)^2} = \frac{(0.17 \text{ ft}^2/\text{hr})(t, \text{ hr})}{(1/14 \text{ ft})^2} \\ &= 33.3t \end{aligned}$$

que, cuando se sustituyen, da

$$0.381 = e^{-(0.099)(33.3t)}$$

Despejando el valor de t se obtiene

$$t = 0.2925 \text{ hr} = 17.55 \text{ min}$$

Por tanto, la velocidad requerida del lingote es

$$v = \frac{20 \text{ ft}}{17.55 \text{ min}} = 1.14 \text{ ft/min}$$

En el ejemplo 4.13 se examina el caso incluyendo la generación interna de energía térmica.

Ejemplo 4.13

La placa de una plancha doméstica tiene un área superficial de 0.5 ft² y se fabrica de acero inoxidable con un peso total de 3 lb. Con un coeficiente superficial igual a 3 Btu/hr-ft²-°F entre la plancha y su medio ambiente a 80°F, ¿cuánto tarda la plancha en llegar a 240°F? La plancha consume 500 watts y originalmente está a la temperatura de su medio ambiente.

Un primer paso es la evaluación del módulo de Biot:

$$\begin{aligned} Bi &= \frac{h V/S}{k} \\ &= \frac{(3 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^\circ\text{F})}{(13 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^\circ\text{F})} \left[\frac{3 \text{ lb}/488 \text{ lb/ft}^3}{0.5 \text{ ft}^2} \right] \\ &= 0.00284 \end{aligned}$$

Considerar la base de la plancha como un sistema de mosaico introduce muy poco error para un valor de Bi tan pequeño.

Una evaluación término a término de la ecuación (2-14) da lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\delta W_s}{dt} &= \frac{\delta W_\mu}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(e_i + \frac{P_i}{\rho} \right) \frac{dM_i}{dt} = 0 \\ \frac{\delta Q}{dt} &= hS(T_\infty - T) + \dot{q}V \\ \frac{dE_\sigma}{dt} &= \rho Vc \frac{dT}{dt} \end{aligned}$$

Haciendo $\theta = T - T_\infty$ se tiene

$$\rho c V \frac{d\theta}{dt} = \dot{q}V - hS\theta$$

Rearreglando, $\frac{d\theta}{dt} = a - b\theta$

en donde $a = \dot{q}/\rho c$ y $b = hS/\rho c V$

Separando las variables e integrando se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^\theta \frac{-b d\theta}{a - b\theta} &= -b \int_0^t dt \\ \ln \frac{a - b\theta}{a} &= -bt \\ \theta &= \frac{1}{b} \ln \frac{1}{1 - \frac{b}{a} \theta} \end{aligned}$$

Las constantes se evalúan en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} a &= \frac{(500 \text{ w})(3.413 \text{ Btu/w-hr})}{(3 \text{ lb})(0.11 \text{ Btu/lb-}^\circ\text{F})} = 5170^\circ\text{F/hr} \\ b &= \frac{(3 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^\circ\text{F})(0.5 \text{ ft}^2)}{(3 \text{ lb})(0.11 \text{ Btu/lb-}^\circ\text{F})} = 4.54 \text{ hr}^{-1} \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en la expresión que contiene t y despejando se obtiene

$$\begin{aligned} t &= \frac{\text{hr}}{4.54} \ln \frac{1}{1 - \frac{4.54 \text{ hr}^{-1}}{5170^\circ\text{F/hr}} (160^\circ\text{F})} \\ &= \frac{1}{4.54} \ln \frac{1}{0.859} = 0.0247 \text{ hr} = 1.48 \text{ min} \end{aligned}$$

4.2-1.2 Conducción transitoria unidimensional; sistemas con $Bi > 0.1$

Cuando el valor aplicable del módulo de Biot es mayor que 0.1, un análisis de parámetro de mosaico introduce un error mayor que 5%, que generalmente no es aceptable. En casos como este, se aplica la ecuación (4-83) y se debe resolver la ecuación diferencial parcial. Las configuraciones unidimensionales de interés son la pared plana, el cilindro y la esfera. Cada una de estas formas se considera en las siguientes secciones.

Conducción transitoria en una pared plana infinita. En la figura 4.24 se muestra el caso que se considera. El espesor de la pared es de $2L$ y se extiende al infinito en las direcciones y y z . La variable espacial x se mide desde la línea de centros. Inicialmente la pared está a la temperatura uniforme T_0 ; luego se eleva y mantiene la temperatura del medio adyacente hasta T_∞ . El coeficiente de superficie convectiva es h . A continuación se presenta un enunciado completo de este problema transitorio, incluyendo la ecuación diferencial dominante y las condiciones iniciales y de frontera:

ecuación diferencial dominante

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (4-92)$$

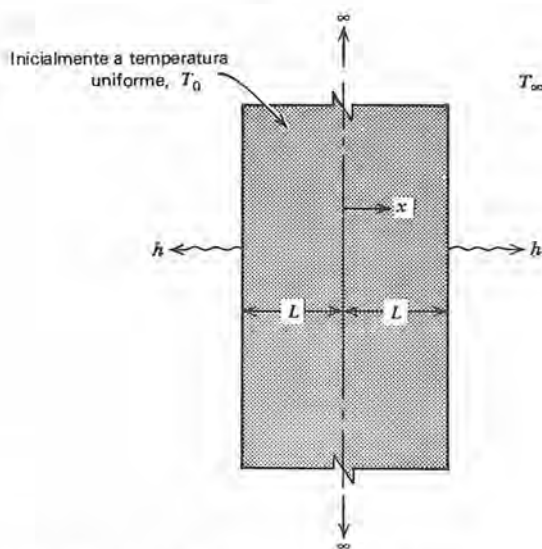


Figura 4.24 Análisis de la conducción transitoria de calor en una pared plana infinita.

condición inicial

$$T(x, 0) = T_0 \quad (4-93)$$

condiciones de frontera

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = 0 \quad (4-94)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = h[T(L, t) - T_\infty] \quad (4-95)$$

Las ecuaciones (4-94) y (4-95) expresan, respectivamente, la naturaleza simétrica del perfil de temperatura dentro de la pared plana para cualquier tiempo t y el hecho que la transferencia conductiva de calor es igual a la transferencia convectiva en la superficie de la pared.

La solución del problema se obtiene más fácilmente si se transforma la variable dependiente a $\theta(x, t)$, en donde

$$\theta(x, t) \equiv T(x, t) - T_\infty \quad (4-96)$$

Ahora se puede expresar el problema completo, en función de $\theta(x, t)$, como

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (4-97)$$

$$\theta(x, 0) = \theta_0 \quad (4-98)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = 0 \quad (4-99)$$

$$-k \frac{\partial \theta}{\partial x}(L, t) = h\theta(L, t) \quad (4-100)$$

El problema se resuelve por la técnica usual de separación de variables haciendo

$$\theta(x, t) = X(x)\tau(t) \quad (4-101)$$

en donde las variables $X(x)$ y $\tau(t)$ son funciones únicamente de los parámetros x y t , respectivamente.

Sustituyendo la ecuación (4-101) en la ecuación (4-96) se tiene

$$\frac{1}{\alpha} X \frac{d\tau}{dt} = \tau \frac{d^2 X}{dx^2}$$

Dividiendo ambos lados de esta expresión entre $X\tau$, se obtiene

$$\frac{1}{\alpha} \frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} \quad (4-102)$$

Cada lado de la ecuación (4-102) es una función de solamente una variable independiente; por tanto, ambas deben ser iguales a alguna constante que se puede llamar λ^2 . Igualando cada lado a λ^2 a la vez, se tienen dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d\tau}{dt} = \alpha\lambda^2\tau \quad (4-103)$$

y

$$\frac{d^2X}{dx^2} = \lambda^2X \quad (4-104)$$

La solución general a la ecuación (4-103) es

$$\tau = Ae^{\alpha\lambda^2 t}$$

que indica que τ es una función rápidamente creciente de t , que se aproxima al infinito para grandes valores de t . Desde luego, físicamente esta en una situación imposible; por tanto, la constante λ^2 debe tener un signo negativo y las ecuaciones diferenciales ordinarias a resolver son

$$\frac{d\tau}{dt} = -\alpha\lambda^2\tau \quad (4-105)$$

y

$$\frac{d^2X}{dx^2} = -\lambda^2X \quad (4-106)$$

Las soluciones generales a las ecuaciones (4-105) y (4-106) son

$$\tau = Ae^{-\alpha\lambda^2 t} \quad (4-107)$$

y

$$X = B \cos \lambda x + C \sin \lambda x \quad (4-108)$$

Ahora la expresión completa para θ queda

$$\theta(x, t) = X(x)\tau(t) = e^{-\alpha\lambda^2 t}[M \cos \lambda x + N \sin \lambda x] \quad (4-109)$$

Note que hay dos constantes de integración, $M = AB$ y $N = AC$.

Aplicando la primera condición de frontera o sea la de simetría de temperatura alrededor de la línea de centros, expresada por la ecuación (4-99), se tiene

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = (e^{-\alpha\lambda^2 t})(\lambda[-M \sin 0 + N \cos 0]) = 0$$

Para que esta expresión sea verdadera, la constante N debe ser igual a cero. La expresión restante para $\theta(x, t)$ es

$$\theta(x, t) = Me^{-\alpha\lambda^2 t} \cos \lambda x \quad (4-110)$$

Sustituyendo la expresión para θ ecuación (4-110), en la condición de frontera de la superficie de la pared, ecuación (4-100), se tiene

$$+k\lambda Me^{-\alpha\lambda^2 t} \operatorname{sen} \lambda L = hMe^{-\alpha\lambda^2 t} \cos \lambda L$$

que, al cancelar términos semejantes, da

$$\tan \lambda L = \frac{h}{k\lambda} \quad (4-111)$$

Si se multiplica y divide el lado derecho de esta ecuación por L , la razón $L/k\lambda$ queda

$$\frac{hL}{k} \frac{1}{\lambda L} \equiv \frac{\text{Bi}}{\lambda L}$$

en donde Bi es el módulo de Biot estudiado en la sección 4.2-1.1 y definido por la ecuación (4. 89). Ahora se puede escribir la ecuación trascendental como

$$\tan \lambda L = \frac{\text{Bi}}{\lambda L} \quad (4-112)$$

Esta ecuación determina los valores apropiados de λ que constituyen una solución. En cada intersección de la figura 4.25 se obtiene un valor de λ que satisface la ecuación (4-111), por lo que es un valor que da una solución a la ecuación.

Se denota por $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, cada valor de λ que satisface la ecuación (4-111), en donde $1 \leq n < \infty$.

Ahora la solución es de la forma

$$\theta_n(x, t) = M_n e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x \quad (4-113)$$

donde existe un número infinito de soluciones particulares —una para cada valor de n desde 1 hasta ∞ . La sumatoria

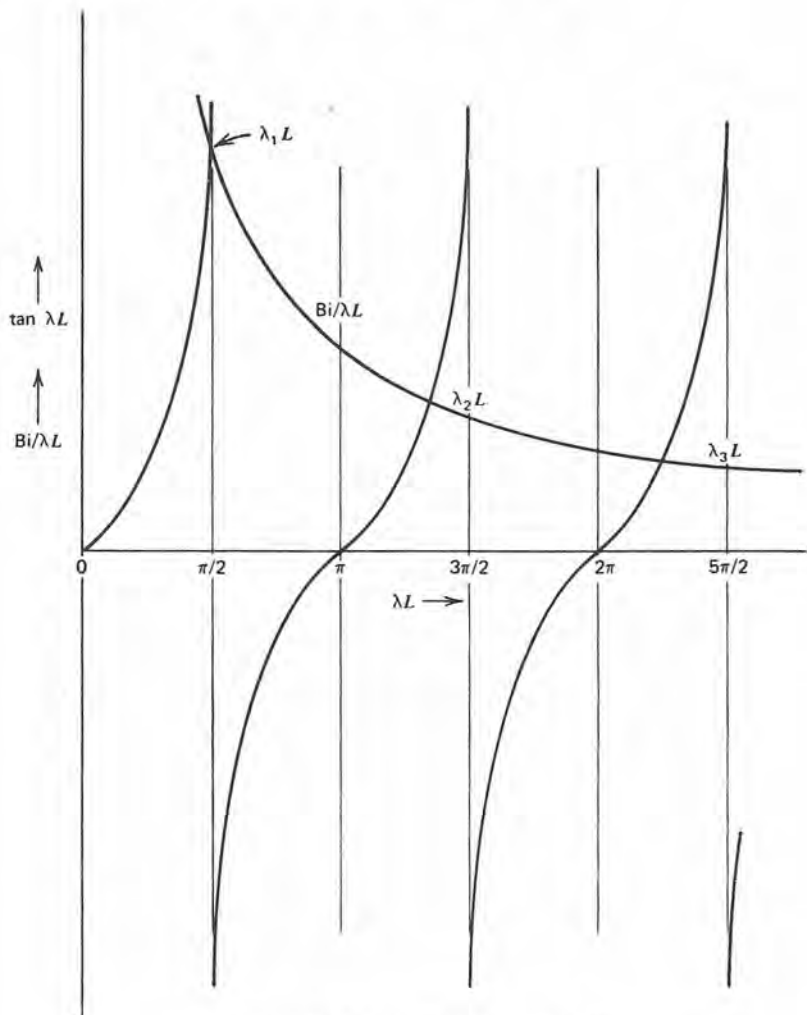
$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x \quad (4-114)$$

da la solución completa para θ . Para completar la solución se debe determinar M_n , lo que se hace aplicando la condición inicial, ecuación (4-98),

$$\theta(x, 0) = \theta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos \lambda_n x \quad (4-115)$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación (4-115) por $\cos \lambda_m x$ dx e integrando en el intervalo $0 \leq x \leq L$, se tiene

$$\theta_0 \int_0^L \cos \lambda_m x \, dx = \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos \lambda_n x \cos \lambda_m x \, dx$$

Figura 4.25 Valores característicos de λ .

Ahora se puede eliminar el signo de la sumatoria ya que el lado derecho de esta expresión desaparece para valores de $m \neq n$. Utilizando esta condición y despejando la constante M_n se tiene

$$\begin{aligned}
 M_n &= \theta_0 \frac{\int_0^L \cos \lambda_n x \, dx}{\int_0^L \cos \lambda_n^2 x \, dx} \\
 &= \theta_0 \left(\frac{2 \operatorname{sen} \lambda_n L}{\lambda_n L + \operatorname{sen} \lambda_n L \cos \lambda_n L} \right)
 \end{aligned} \tag{4-116}$$

con lo que ahora se puede escribir la solución final para $\theta(x, t)$ como

$$\frac{\theta(x, t)}{\theta_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \frac{\sin \lambda_n L \cos \lambda_n x}{\lambda_n L + \sin \lambda_n L \cos \lambda_n L} \quad (4-117)$$

o, con $\delta_n = \lambda_n L$, se puede escribir la ecuación (4-117) en la forma

$$\frac{\theta(x, t)}{\theta_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\delta_n^2 (\alpha t / L^2)} \frac{\sin \delta_n \cos \delta_n x / L}{\delta_n + \sin \delta_n \cos \delta_n} \quad (4-118)$$

Note que, de acuerdo con la ecuación (4-112), δ_n es función de Bi, el módulo de Biot

$$\delta_n \tan \delta_n = \text{Bi} \quad (4-119)$$

y el término entre paréntesis en la exponencial, $\alpha t / L^2$, es igual a Fo, el módulo de Fourier. Por tanto, de acuerdo con la ecuación (4-118), la temperatura en un tiempo dado y posición dada en una pared plana es función de Bi, Fo y un parámetro de posición sin dimensiones x/L .

La solución dada por la ecuación (4-118) tiene gran aplicación; se ha calculado exactamente y presentado en forma gráfica (ver el apéndice B). Las figuras B.1 y B.4 muestran valores de temperatura sin dimensiones en función de Bi y Fo para valores de $x/L = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ y 1.0 . La figura B.7 muestra la temperatura adimensional en el centro de una pared plana en función de los parámetros $\alpha t / L^2$ y k/hL .

Conducción transitoria unidimensional en cilindros infinitos. Para el caso de un cilindro de radio R , que se extiende al infinito en las direcciones $\pm z$, con temperatura inicial uniforme T_0 , cuyo medio ambiente se eleva de repente y se mantiene a la temperatura T_{∞} , la solución que se obtiene por un procedimiento analítico exactamente como en la sección anterior es

$$\frac{\theta(r, t)}{\theta_0} = \frac{T(r, t) - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\delta_n^2 (\alpha t / R^2)}}{\delta_n} \frac{J_1(\delta_n) J_0(\delta_n r / R)}{J_0^2(\delta_n) + J_1^2(\delta_n)} \quad (4-120)$$

en donde δ_n es una función de la razón adimensional hR/k , de acuerdo con

$$\delta_n \frac{J_1(\delta_n)}{J_0(\delta_n)} = \frac{hR}{k} \quad (4-121)$$

y $J_0(\delta_n)$ y $J_1(\delta_n)$ son las funciones de Bessel de la primera clase (cero y primer orden respectivamente) del argumento δ_n .

Note que la razón hR/k es de la forma de un módulo de Biot, aunque no es igual a Bi , ya que el radio R de un cilindro no es la razón del volumen al área superficial.

La ecuación (4-120) relaciona la temperatura con los parámetros adimensionales hR/k , $\alpha t/R^2$, y r/R . Las figuras B.2 y B.5 son representaciones gráficas de esta ecuación. Se muestra la temperatura central en forma adimensional en función de los parámetros $\alpha t/R^2$ y k/hR en la figura B.8.

Conducción transitoria unidimensional en una esfera. La solución para la geometría esférica al mismo problema considerado en los casos plano y cilíndrico es

$$\frac{\theta(r, t)}{\theta_0} = \frac{T(r, t) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = 4 \frac{R}{r} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\delta_n^2 (\alpha t/R^2)} \frac{\sin \delta_n}{\delta_n} \frac{r \sin \delta_n - \delta_n \cos \delta_n}{2\delta_n - \sin 2\delta_n} \quad (4-122)$$

en donde las δ_n son las raíces de la ecuación característica

$$1 - \delta_n \cot \delta_n = \frac{hR}{k} \quad (4-123)$$

En el apéndice B, en las figuras B.3 y B.6 se ilustran las soluciones de la ecuación (4-122) con la historia de la temperatura central mostrada en forma adimensional en la figura B.9.

4.2-2 Conducción transitoria bi y tridimensional

La figura 4.26 muestra la sección transversal de una barra rectangular con ancho $2L$ y altura $2l$. La barra está a temperatura inicial uniforme T_0 , y pierde calor por convección en todos los lados al medio ambiente a T_∞ , con una conductancia uniforme de superficie h que prevalece en todas las superficies.

El problema de expresar la temperatura en la barra rectangular en función de x , y , y t es análogo al análisis de la conducción transitoria unidimensional descrito en las tres secciones anteriores. Primeramente se transforma la variable dependiente $T(x, y, t)$ a $\theta(x, y, t)$, de acuerdo con

$$\theta(x, y, t) \equiv \frac{T(x, y, t) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \quad (4-124)$$

La ecuación diferencial aplicable es

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (4-125)$$

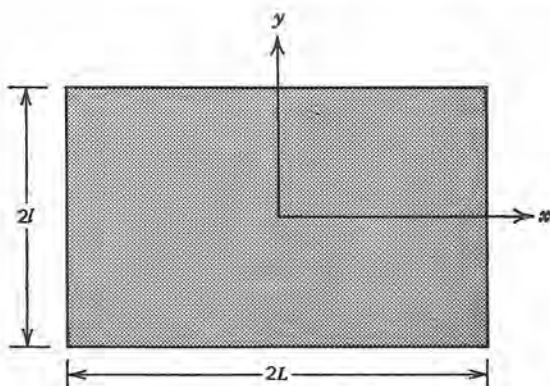


Figura 4.26 Sección transversal rectangular para el análisis de conducción transitoria bidimensional.

y las condiciones inicial y de frontera son, respectivamente,

$$\theta(x, y, 0) = 1 \quad (4-126)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(0, y, t) = 0 \quad (4-127)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y}(x, 0, t) = 0 \quad (4-128)$$

$$\theta(L, y, t) + \frac{k}{h} \frac{\partial \theta}{\partial x}(L, y, t) = 0 \quad (4-129)$$

$$\theta(x, l, t) + \frac{k}{h} \frac{\partial \theta}{\partial y}(x, l, t) = 0 \quad (4-130)$$

Ahora se hace una separación parcial de variables en la variable $\theta(x, y, t)$, formando la solución producto

$$\theta(x, y, t) = X(x, t)Y(y, t) \quad (4-131)$$

en donde las variables $X(x, t)$ y $Y(y, t)$ son funciones de una variable espacial y del tiempo.

Sustituyendo este producto en la ecuación (4-125) se obtiene

$$X \frac{\partial Y}{\partial t} + Y \frac{\partial X}{\partial t} = \alpha \left[Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right]$$

Ahora se divide entre el producto XY y se separan los términos en X y Y para llegar a la expresión

$$\frac{1}{X} \left[\frac{\partial X}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \right] = -\frac{1}{Y} \left[\frac{\partial Y}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right] \quad (4-132)$$

Cada lado de la ecuación (4-132) es una función de solamente una variable espacial, por lo que ambas deben ser iguales a una constante. Si esta constante es positiva o negativa, las soluciones para $X(x, t)$ y $Y(y, t)$ tendrán distintas formas funcionales. Desde luego, físicamente esto no es consistente, de manera que la constante debe ser igual a cero.

Haciendo ambos lados de la ecuación (4-132) igual a cero, de acuerdo con el argumento anterior, el problema de conducción transitoria bidimensional se reduce a dos problemas unidimensionales cuyas formulaciones son

en la dirección de las x

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$$

$$X(x, 0) = 1$$

$$\frac{\partial X}{\partial x}(0, t) = 0$$

$$X(L, t) + \frac{k}{h} \frac{\partial X}{\partial x}(L, t) = 0$$

y en la dirección de las y

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}$$

$$Y(y, 0) = 1$$

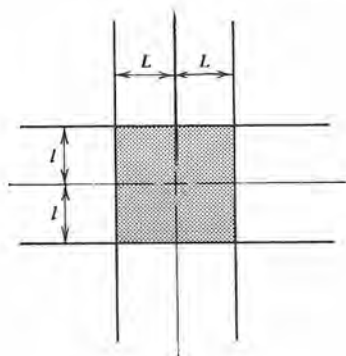
$$\frac{\partial Y}{\partial y}(0, t) = 0$$

$$Y(l, t) + \frac{k}{h} \frac{\partial Y}{\partial y}(l, t) = 0$$

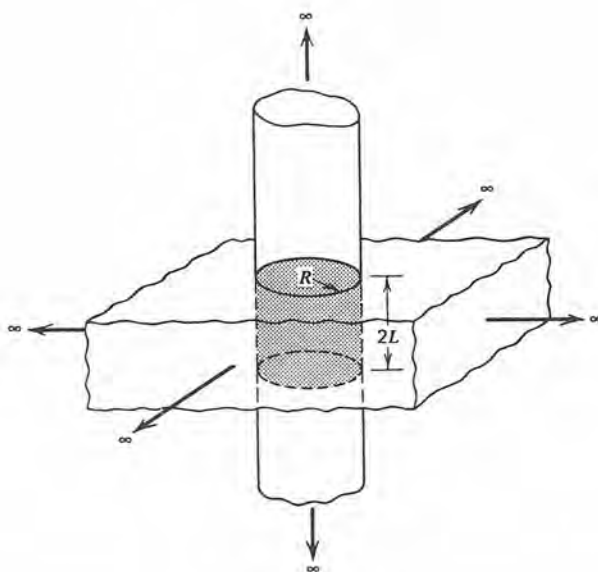
Se ve que cada uno de estos problemas transitorios unidimensionales es idéntico al caso presentado con gran detalle en la sección 4.2-1.2 para la pared plana infinita, cuya solución se presenta en forma gráfica en las figuras B.1, B.4 y B.7.

Las variables $X(x, t)$ y $Y(y, t)$ son temperaturas adimensionales dadas por

$$X = \frac{T(x, t) - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \quad (4-133)$$



(a)



(b)

Figura 4.27 Combinaciones bidimensionales de formas unidimensionales para el análisis de conducción transitoria. a) Un elemento rectangular bidimensional. b) Un cilindro de longitud finita.

y

$$Y = \frac{T(y, t) - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \quad (4-134)$$

por lo que la temperatura en una localización (x, y) al tiempo t está dada, de acuerdo con la ecuación (4-131), por

$$\theta(x, y, t) = \frac{T(x, y, t) - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = X(x, t)Y(y, t)$$

donde se dispone de valores tanto para $X(x, t)$ como $Y(y, t)$ en las figuras mencionadas arriba.

Se pueden extender el desarrollo y discusión presentados hasta ahora, para una geometría rectangular bidimensional, para incluir un cilindro infinito o un sólido rectangular en tres dimensiones. La figura 4.27 ilustra la combinación de formas unidimensionales que producen objetos bidimensionales de interés.

En los siguientes problemas de ejemplo se ilustra el uso de las gráficas para resolver problemas en una o más dimensiones.

Ejemplo 4.14

Se tiene un tabique refractario a una temperatura inicial uniforme de 100°F y luego se expone a un gas caliente a 1200°F con un coeficiente convectivo de $4 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$ aplicado a todas las superficies. Después de exponerse durante 20 horas al gas a alta temperatura bajo estas condiciones, encontrar la temperatura central de (a) una pared plana infinita de 2 ft de espesor, (b) una columna cuadrada larga que mide 2 ft \times 2 ft de sección transversal y (c) un bloque cúbico de 2 ft \times 2 ft \times 2 ft una de cuyas caras está sobre una superficie aislada.

Primero se necesita calcular el módulo de Biot. Los valores son

$$(a) \text{ Bi} = \frac{h(V/S)}{k} = \frac{(4 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F})(1 \text{ ft})}{0.65 \text{ Btu/hr-ft-}^{\circ}\text{F}} = 6.15$$

$$(b) \text{ Bi} = \frac{(4)(2 \times 2 \times H)}{(0.65)(4 \times 2 \times H)} = 3.075$$

$$(c) \text{ Bi} = \frac{(4)(2 \times 2 \times 2)}{(0.65)(5 \times 2 \times 2)} = 2.46$$

Cada valor de Bi es suficientemente grande para que no sea válida la solución del parámetro de mosaico. Se pueden usar las gráficas del apéndice B, y se emplean a continuación.

Para (a), se aplican los siguientes valores paramétricos:

$$\frac{k}{hV/S} = \frac{1}{6.15} = 0.163$$

$$\frac{\alpha t}{(V/S)^2} = \frac{(0.02 \text{ ft}^2/\text{hr})(20 \text{ hr})}{1 \text{ ft}^2} = 0.4$$

$$\frac{x}{L} = 0$$

En las gráficas para un plano infinito se obtiene

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = 0.60$$

$$\text{y } T = 1200 - 0.60(1100) = 540^{\circ}\text{F.}$$

Para *b*), se aplican los mismos valores de k/hL y de $\alpha t/L^2$ que en *a*). Para un plano que tiene 2 ft de espesor en la dirección de las *x* se lee un valor de 0.60 para $(T - T_{\infty})/(T_0 - T_{\infty})$. Un plano que tenga 2 ft de espesor en la dirección de las *y* también tiene un valor de $(T - T_{\infty})/(T_0 - T_{\infty}) = 0.60$. Para una sección transversal rectangular que mida 2 ft \times 2 ft, el valor de $(T_0 - T_{\infty}) (T - T_{\infty})/$ aplicable es el producto de los dos valores citados. Por tanto, para el caso bidimensional,

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = \left(\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \right)_x \left(\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \right)_y = (0.60)(0.60) = 0.36$$

$$\text{del cual } T = 1200 - 0.36(1100) = 804^{\circ}\text{F.}$$

Para *c*) se extienden los resultados dados en *a*) y *b*). En *a*) ocurre la convección en dos superficies, en *b*) hay cuatro superficies involucradas y en *c*) se deben considerar cinco superficies. Todavía se aplican los valores de $(T - T_{\infty})/(T_0 - T_{\infty})$ obtenidos para las direcciones *x* y *y* en *b*). En la dirección de las *z* la convección ocurre solamente desde una superficie, ya que la otra está aislada, lo que equivale a convección desde ambas superficies de una losa de 0.10 m de espesor. Por tanto, los parámetros en la dirección de las *z* tienen los siguientes valores:

$$\frac{k}{hL} = \frac{(0.65 \text{ Btu/hr-ft-}^{\circ}\text{F})}{(4 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F})(2 \text{ ft})} = 0.0813$$

$$\frac{\alpha t}{L^2} = \frac{(0.02 \text{ ft}^2/\text{hr})(20 \text{ hr})}{(2 \text{ ft})^2} = 0.10$$

$$\frac{x}{L} = 0$$

De la gráfica, para estas condiciones,

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = 0.98$$

Luego, para el sólido cúbico,

$$\begin{aligned}\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} &= \left(\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}}\right)_x \left(\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}}\right)_y \left(\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}}\right)_z \\ &= (0.60)(0.60)(0.98) = 0.353\end{aligned}$$

lo que da, para T ,

$$T = 1200 - 0.353(1100) = 814^{\circ}\text{F}$$

Ejemplo 4.15

Se coloca un cilindro de asbesto de 5 in de diámetro que inicialmente está a una temperatura uniforme de 100°F con coeficiente convectivo de $4 \text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}^2\cdot^{\circ}\text{F}$ que se aplica a todas las superficies en un medio a 1200°F . Encontrar el tiempo que se requiere para que el centro llegue a 500°F si el cilindro *a*) es muy largo (no hay efectos en los extremos) y *b*) tiene una altura de 2 in y un extremo está sobre una superficie aislante.

$$\text{Bi} = \frac{hV/S}{k} = \frac{(4 \text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}^2\cdot^{\circ}\text{F})\left(\frac{\pi D^2}{4} L\right)}{(0.125 \text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}\cdot^{\circ}\text{F})(\pi DL)} = 3.33$$

y, para *b*),

$$\text{Bi} = \frac{4\left(\frac{\pi D^2}{4} L\right)}{0.125\left(\pi DL + \frac{\pi D^2}{4}\right)} = 2.67$$

Para ambas partes de este ejemplo no es válida una solución de parámetro de mosaico, por lo que se deben usar las gráficas.

Para *a*),

$$\begin{aligned}\frac{k}{hR} &= \frac{0.125}{(4)(2.5/12)} = 0.15 \\ \frac{\alpha t}{R^2} &= \frac{(0.125 \text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}\cdot^{\circ}\text{F})t}{\left(\frac{36 \text{ lb}_m}{\text{ft}^3}\right)\left(0.25 \frac{\text{Btu}}{\text{lb}_m\cdot^{\circ}\text{F}}\right)\left(\frac{2.5}{12} \text{ ft}\right)^2} \\ &= 0.32t \\ \frac{x}{L} &= 0\end{aligned}$$

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = \frac{500 - 1200}{100 - 1200} = 0.637$$

De la gráfica para un cilindro infinito se lee $\alpha t/R^2 = 0.20$ y el tiempo requerido es

$$t = \frac{0.20}{0.32} = 0.625 \text{ hr} = 37.5 \text{ min}$$

Para b), el cilindro finito es una combinación de un cilindro infinito y un plano infinito. Ya que la convección ocurre solamente desde una de las bases del cilindro y la otra base está aislada, el plano infinito equivalente tiene 0.1 m de espesor.

Para el cilindro se aplican los siguientes valores paramétricos:

$$\frac{k}{hR} = 0.15$$

$$\frac{\alpha t}{R^2} = 0.32t$$

$$\frac{x}{R} = 0$$

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = \left(\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \right)_{\text{cil}}$$

Para el plano equivalente,

$$\frac{k}{hL} = \frac{0.125}{22.72 \times 0.05} = 0.1875$$

$$\frac{\alpha t}{L^2} = \frac{0.22t}{(0.05)^2} = 0.5t$$

$$\frac{x}{L} = 0$$

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = \left(\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \right)_{\text{plano}}$$

Para el cilindro finito, $(T - T_{\infty})/(T_0 - T_{\infty}) = 0.637$; por tanto

$$\left(\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \right)_{\text{cil}} \left(\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \right)_{\text{plano}} = 0.637$$

Ahora se puede resolver el problema por un proceso de prueba y error que involucra las gráficas para planos infinitos y cilindros, empleando el siguiente procedimiento:

1. Suponga t

2. Calcule $\frac{\alpha t}{R^2}$ y $\frac{\alpha t}{L^2}$

3. Lea $\left(\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \right)_{\text{cil}}$ y $\left(\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \right)_{\text{plano}}$

4. Calcule $\left(\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}}\right)_{cil} \left(\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}}\right)_{plano}$
5. Siga el proceso hasta que $\left(\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}}\right)_{cil} \left(\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}}\right)_{plano} = 0.637$

Para este problema, el tiempo que satisface el algoritmo anterior es

$$t = 0.45 \text{ hr} = 27 \text{ min}$$

4.2-3 Conducción transitoria unidimensional en una pared semi-infinita

En muchos casos de interés en la ingeniería el medio conductor es suficientemente grueso para que el cambio en las condiciones en una frontera defina el problema transitorio; no existen otras condiciones de frontera que afecten $T(x, t)$. En tal caso, se considera que el espesor del medio es infinito.

En la figura 4.28 se ilustra el caso de interés. A una pared plana grande que inicialmente está a la temperatura uniforme T_0 se le eleva súbitamente la temperatura y se le mantiene en la nueva temperatura T_s . La ecuación diferencial que se debe resolver es

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (4-135)$$

sujeta a las condiciones iniciales y de frontera

$$T(x, 0) = T_0 \quad (4-136)$$

$$T(0, t) = T_s \quad (4-137)$$

$$T(\infty, t) = T_0 \quad (4-138)$$

El problema es clásico en los textos sobre transferencia de calor. Las técnicas para resolverlo varían considerablemente; entre los enfoques más comunes están las transformadas de Laplace y de Fourier. En las siguientes secciones se usa una técnica analítica y un enfoque integral a este problema.

4.2-3.1 *Análisis de una pared semi-infinita; solución analítica*

De las formas de las soluciones en la sección 4.2-2 se pueden expresar las variables involucradas en el problema de la pared semi-infinita en forma adimensional

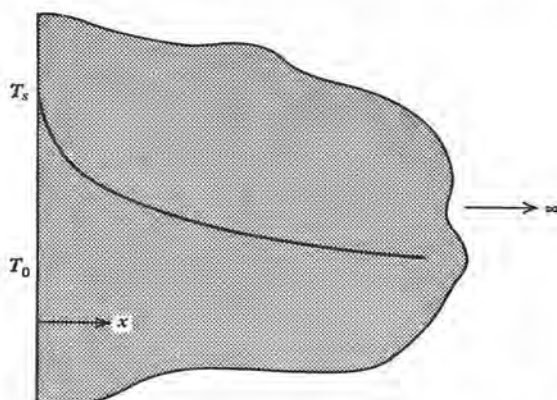


Figura 4.28 Distribución de temperatura en una pared semi-infinita al tiempo t .

$$\frac{T - T_0}{T_s - T_0} = f\left(\frac{x}{L}, \frac{\alpha t}{L^2}\right) \quad (4-139)$$

En la sección anterior hubo una dimensión característica L para la geometría que se estaba considerando. En este caso no existe este tipo de dimensión; en consecuencia se elimina L entre los dos parámetros en la función al lado derecho de la ecuación (4-139) para expresar la temperatura en función de un parámetro independiente. Las selecciones para este parámetro son

$$\frac{T - T_0}{T_s - T_0} = f\left(\frac{\alpha t}{x^2}\right)$$

ó

$$\frac{T - T_0}{T_s - T_0} = f\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha t}}\right)$$

Las variables se expresan en la forma

$$Y = f(\eta)$$

en donde

$$Y = \frac{T - T_0}{T_s - T_0} \quad (4-140)$$

y

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \quad (4-141)$$

Sustituyendo estos parámetros en la ecuación (4-135) da la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2 Y}{d\eta^2} + 2\eta \frac{dY}{d\eta} = 0 \quad (4-142)$$

y las condiciones de frontera e inicial

$$Y(0) = 1 \quad (4-143)$$

$$Y(\infty) = 0 \quad (4-144)$$

Se puede integrar una vez la ecuación (4-142) para obtener

$$\frac{dY}{d\eta} = c_1 e^{-\eta^2} \quad (4-145)$$

y una segunda vez para obtener

$$Y = c_1 \int e^{-\eta^2} d\eta + c_2 \quad (4-146)$$

en donde c_1 y c_2 son constantes de integración.

La integral en la ecuación (4-146) está relacionada a la *función error*, definida como

$$\text{fe } \phi \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\phi e^{-\eta^2} d\eta \quad (4-147)$$

Con frecuencia se encuentra la función error en la física matemática. En muchos manuales se encuentran tablas de $\text{fe } \phi$, en el apéndice C se proporciona una breve tabulación de $\text{fe } \phi$. Propiedades especiales de $\text{fe } \phi$ que se deben notar son

$$\text{fe } (0) = 0 \quad \text{y} \quad \text{fe } (\infty) = 1$$

Aplicando la definición de la función de error a la solución dada por la ecuación (4-147) se tiene

$$Y = 1 - \text{fe } \eta$$

ó

$$\frac{T - T_0}{T_s - T_0} = 1 - \text{fe } \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \quad (4-148)$$

En otra forma se puede escribir

$$\frac{T_s - T}{T_s - T_0} = \text{fe } \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \quad (4-149)$$

Si, en vez de una temperatura fija de la superficie de la pared hay fluido a una temperatura T_∞ adyacente a la pared en $x = 0$, la condición de frontera queda

$$h[T_\infty - T(0, t)] = -k \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) \quad (4-150)$$

Con esta modificación, la solución a la ecuación (4-135) es

$$\frac{T_\infty - T}{T_\infty - T_0} = \text{fe} \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \text{fe} \left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2 \alpha t}{k^2} \right) \left[1 - \text{fe} \left(\frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} + \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \right] \quad (4-151)$$

Se ve que la ecuación (4-151) se reduce a la ecuación (4-149) para $x = 0$, $h = \infty$.

4.3-3.2 *Análisis de pared semi-infinita: solución integral*

Se puede analizar la pared semi-infinita con una técnica integral con referencia a la ecuación (2-26), que se repite a continuación para referencia

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W_s}{dt} - \frac{\delta W_\mu}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} e \rho dV + \int_{cs} \left(e + \frac{P}{\rho} \right) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA \quad (2-26)$$

Se aplica la expresión integral a un volumen de control definido como se muestra en la figura 4.29. El volumen de control mostrado se extiende desde la pared ($x = 0$) a alguna profundidad L en el medio. La distancia desde la pared en que la temperatura todavía está afectada por la condición de frontera se denomina δ la "distancia de penetración". Un requerimiento en L es que $L > \delta$.

Para un volumen de control como el mostrado dentro del medio conductor, los términos de la ecuación (2-26) tienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \frac{\delta W_s}{dt} &= \frac{\delta W_\mu}{dt} = \int_{cs} \left(e + \frac{P}{\rho} \right) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = 0 \\ \frac{\delta Q}{dt} &= q_x \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} e \rho dV &= \frac{d}{dt} \int_0^L u \rho A dx = \frac{d}{dt} \int_0^L \rho c T A dx \end{aligned}$$

Por tanto, la expresión integral aplicable es

$$\frac{q_x}{A} = \frac{d}{dt} \int_0^L \rho c T dx \quad (4-152)$$

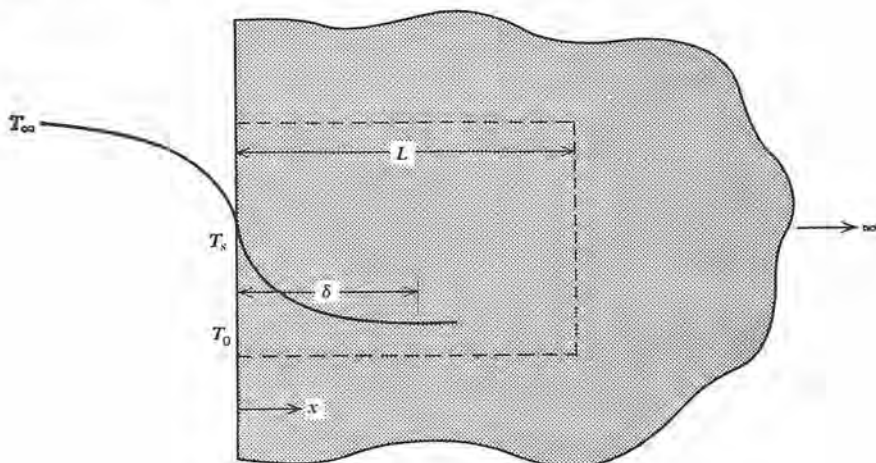


Figura 4.29 Volumen de control para el análisis integral de la pared semi-infinita.

Ahora se divide el intervalo $0 \leq x \leq L$ en dos incrementos, lo que da

$$\frac{q_x}{A} = \frac{d}{dt} \left[\int_0^\delta \rho c T dx + \int_\delta^L \rho c T_0 dx \right]$$

y ya que $T_0 \neq T_0(x)$, queda

$$\frac{q_x}{A} = \frac{d}{dt} \left[\int_0^\delta \rho c T dx + \rho c T_0 (L - \delta) \right]$$

lo que da, para la ecuación integral que se debe resolver,

$$\frac{q_x}{A} = \frac{d}{dt} \int_0^\delta \rho c T dx - \rho c T_0 \frac{d\delta}{dt} \quad (4-153)$$

Para obtener una solución a este problema se debe suponer un perfil de temperatura de la forma $T = T(x, \delta)$ y sustituir la expresión en la ecuación (4-153). Se logra una ecuación diferencial en $\delta(t)$ que entonces se puede resolver y emplear para expresar el perfil de la temperatura como $T = T(x, t)$.

Ahora se consideran dos condiciones de frontera en la pared.

Caso 1. Temperatura constante de pared

La pared, inicialmente a la temperatura uniforme T_0 , se le eleva y mantiene la temperatura a T_s para $t > 0$. En dos distintos tiempos los perfiles de temperatura y las profundidades de penetración aparecen como se muestra en la figura 4.30.

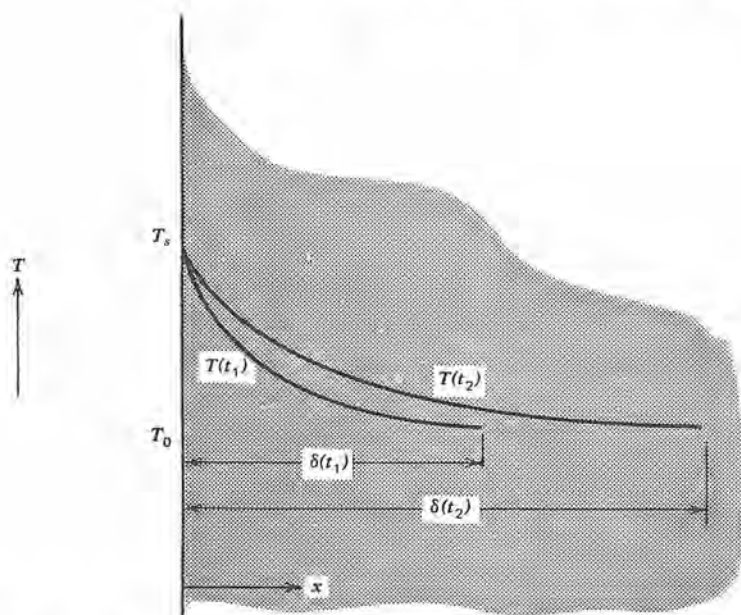


Figura 4.30 Perfiles de temperatura y profundidades de penetración en una pared semi-infinita con temperatura constante de superficie T_s .

Si se supone que el perfil de temperatura es parabólico de la forma

$$T = a + bx + cx^2$$

aplicando las siguientes condiciones de frontera

$$T(0) = T_s$$

$$T(\delta) = T_0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(\delta) = 0$$

se tiene, para $T(x)$, la expresión

$$\frac{T - T_0}{T_s - T_0} = \left(1 - \frac{x}{\delta}\right)^2 \quad (4-154)$$

Como se supuso una forma para el perfil de la temperatura que produjo la ecuación (4-154), también se puede evaluar el flujo de calor en la pared de acuerdo con

$$\frac{q_x}{A} = -k \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \frac{2k}{\delta} (T_s - T_0) \quad (4-155)$$

Ahora se pueden sustituir las ecuaciones (4-154) y (4-155) en la ecuación (4-153) para obtener

$$\frac{2k}{\delta} (T_s - T_0) = \frac{d}{dt} \int_0^{\delta} \rho c \left[T_0 + (T_s - T_0) \left(1 - \frac{x}{\delta} \right)^2 \right] dx - \rho c T_0 \frac{d\delta}{dt}$$

Dividiendo cada término entre el producto ρc , que se supone constante, se obtiene

$$\frac{2\alpha}{\delta} (T_s - T_0) = \frac{d}{dt} \int_0^{\delta} \left[T_0 + (T_s - T_0) \left(1 - \frac{x}{\delta} \right)^2 \right] dx - T_0 \frac{d\delta}{dt}$$

que, después de efectuar la integración, queda

$$\frac{2\alpha}{\delta} (T_s - T_0) = \frac{d}{dt} \left[(T_s - T_0) \frac{\delta}{3} \right]$$

Se pueden cancelar las diferencias de temperatura $T_s - T_0$ para obtener

$$6\alpha = \delta \frac{d\delta}{dt}$$

y despejar la profundidad de penetración δ .

$$\delta = \sqrt{12\alpha t} \quad (4-156)$$

Ahora se puede obtener el perfil correspondiente de temperatura de las ecuaciones (4-154) y (4-156) como

$$\frac{T - T_0}{T_s - T_0} = \left[1 - \frac{x}{\sqrt{12\alpha t}} \right]^2 \quad (4-157)$$

La ecuación (4-157) es la solución aproximada al mismo caso para el cual la ecuación (4-148) es una solución exacta. En la figura 4.31 se comparan los dos resultados.

Caso 2. Un flujo especificado de calor en la pared

Las condiciones de frontera que se aplican en este caso son como sigue:

$$\begin{aligned} T(\delta) &= T_0 \\ -k \frac{\partial T}{\partial x}(0) &= \frac{q_{x0}}{A}(t) = F(t) \\ \frac{\partial T}{\partial x}(\delta) &= 0 \end{aligned}$$

Suponiendo una forma parabólica, el perfil de temperatura consistente con las condiciones anteriores de frontera es

$$T - T_0 = \frac{[F(t)](\delta - x)^2}{2k\delta} \quad (4-158)$$

Sustituyendo la ecuación (4-155) en la ecuación (4-150) y despejando se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\delta^2 F(t)}{6k} \right] = \frac{\alpha F(t)}{k} \quad (4-159)$$

y

$$\delta(t) = \sqrt{6\alpha} \left[\frac{1}{F(t)} \int_0^t F(t) dt \right]^{1/2} \quad (4-160)$$

La ecuación (4-160) se aplica a cualquier variación con el tiempo en el flujo de calor de la pared. Para el caso en que $F(t) = q_0/A$ (una constante), la temperatura de la superficie está dada por

$$T_s - T_0 = \frac{q_0}{Ak} \sqrt{\frac{3}{2} \alpha t} \quad (4-161)$$

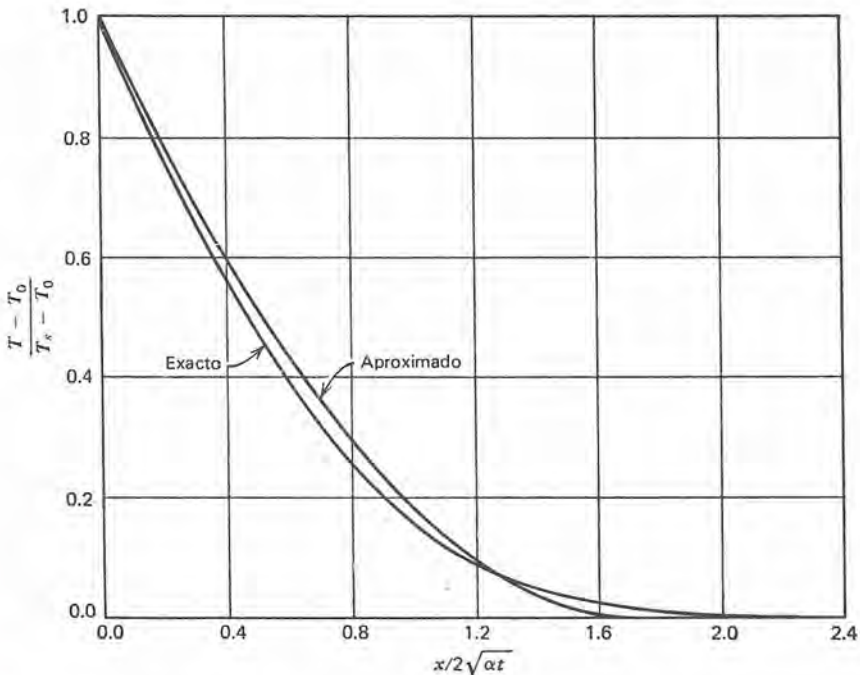


Figura 4.31 Una comparación entre los perfiles aproximado y exacto de temperatura en una pared semi-infinita con temperatura constante de superficie.

que difiere en aproximadamente 8% del valor exacto

$$T_s - T_0 = \frac{1.13q_0}{Ak} \sqrt{\alpha t} \quad (4-162)$$

4.2-4 Conducción transitoria de calor: análisis numérico y gráfico

En el capítulo 3 se estudiaron los procesos para resolver problemas de conducción transitorios de calor por medios numéricos. Ahora se usa algo de las técnicas de diferenciación y solución que se vieron antes para resolver problemas transitorios de conducción, aunque primero se consideran algunos métodos gráficos basados en resultados de operaciones con diferenciales.

4.2-4.1 Conducción transitoria unidimensional; forma explícita la gráfica de Schmidt

Anteriormente se desarrolló la forma explícita del análisis de conducción transitorio unidimensional en la forma

$$T_i^{n+1} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \left[T_{i-1}^n + T_{i+1}^n + \dot{q} \frac{\Delta x^2}{k} + \left(\frac{\Delta x^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_i^n \right] \quad (3-19)$$

También se hace referencia al criterio de estabilidad dado antes para el caso explícito unidimensional, que es

$$\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \quad (3-31)$$

Es deseable usar el caso de igualdad en la ecuación (3-31), ya que se elimina el término T_i^n del lado derecho. Con esta simplificación, o sea con $\alpha \Delta t / \Delta x^2 = 1/2$, y sin generación interna ($\dot{q} = 0$), la ecuación (3-19) queda

$$T_i^{n+1} = \frac{1}{2}(T_{i-1}^n + T_{i+1}^n) \quad (4-163)$$

que indica que la temperatura en el nodo i , después que ha transcurrido algún intervalo Δt , es igual a la media aritmética de las temperaturas en puntos nodales adyacentes, a Δx unidades de distancia, al inicio del intervalo de tiempo. El incremento de tiempo y el intervalo espacial están relacionados por el criterio de estabilidad

$$\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} = \frac{1}{2} \quad (4-164)$$

Las ecuaciones (4-163) y (4-164) son la base de una técnica gráfica conocida como la *técnica de graficación de Schmidt*. La idea

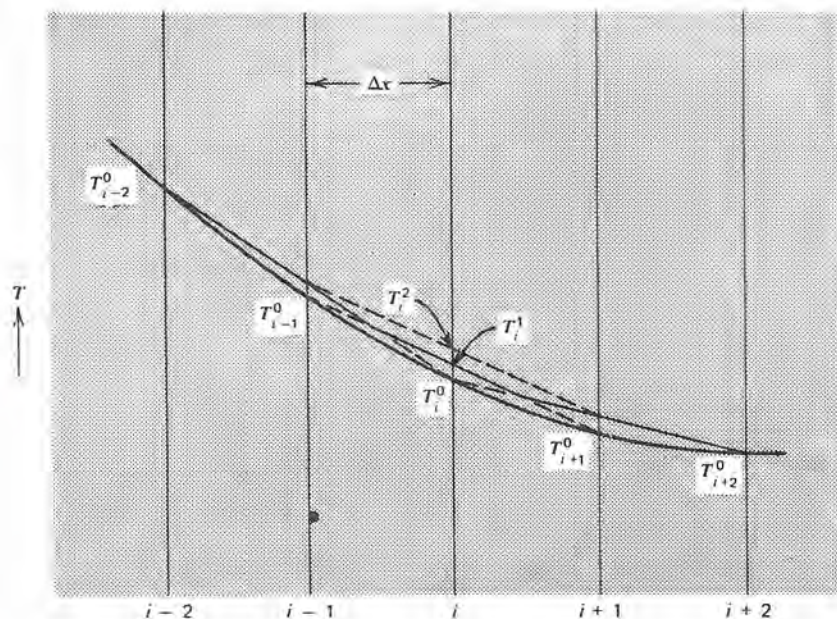


Figura 4.32 Ilustración de la técnica de graficación de Schmidt.

es bastante sencilla; considere la región mostrada en la figura 4.32. La línea curva representa la distribución de temperatura a través de la parte de la pared mostrada al tiempo cero, designado por $T^0(x)$. Las temperaturas en cada uno de los cinco puntos nodales tienen las designaciones T_{i-2}^0 , T_{i-1}^0 , T_i^0 , T_{i+1}^0 , y T_{i+2}^0 .

Luego, de acuerdo con la ecuación (4-163), después que ha transcurrido un incremento Δt de tiempo, la temperatura en el nodo i está dada por

$$T_i^1 = \frac{1}{2}(T_{i-1}^0 + T_{i+1}^0)$$

o, en la figura, una línea recta que conecte T_{i-1}^0 y T_{i+1}^0 intersecta la línea para el nodo i en un punto en la escala de temperatura que representa T_i^1 . Este mismo procedimiento aplicado a todos los nodos en el arreglo en el primer intervalo de tiempo, genera nuevos valores de T^1 , de manera que las líneas dibujadas en esa forma representan una forma de diferencias finitas en el perfil de temperatura después de un incremento Δt . Luego se sigue el proceso tantas veces como se desee. El ejemplo 4.16 ilustra el uso de la técnica de graficación de Schmidt.

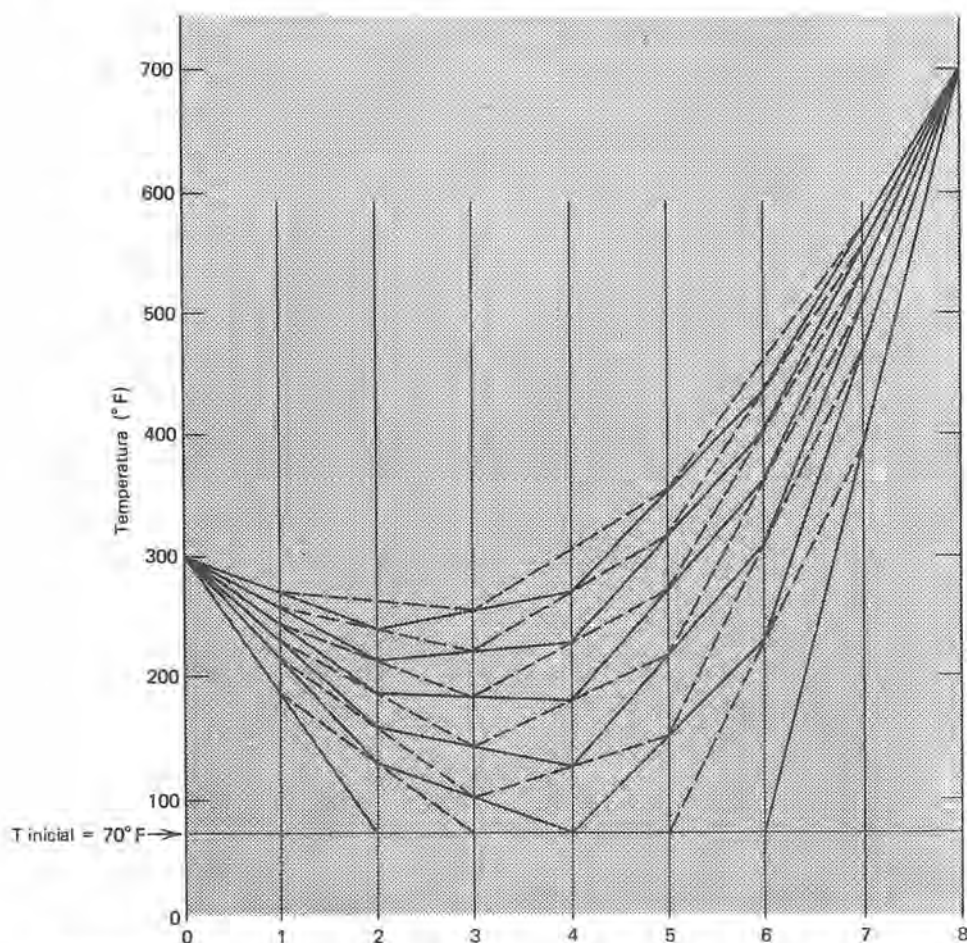


Figura 4.33 Solución gráfica de Schmidt para la conducción transitoria a través de una pared plana.

Ejemplo 4.16

Una pared de tabique ($\alpha = 0.018 \text{ ft}^2/\text{hr}$), de 2 ft de espesor inicialmente está a la temperatura uniforme de 70°F . ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que el centro de la pared llegue a 300°F si se eleva la temperatura de ambas superficies simultáneamente a 700°F ya 300°F y se mantienen en esos niveles?

Este problema es ideal para aplicar la técnica de graficación de Schmidt. La figura 4.33 muestra la sección transversal de la pared.

El procedimiento gráfico está indicado por las líneas en la figura. Se usan líneas continuas y segmentadas alternativamente de manera que el lector pueda seguir los pasos más claramente. Se escogen los incrementos espaciales en forma conveniente de manera que $\Delta x = 1/4 \text{ ft}$; por tanto, hay 7 nodos incluyendo los límites.

Se sigue el procedimiento hasta que una de las líneas de construcción intersecte el nodo 4 (el centro) al valor de la temperatura de 300°F o más. En este ejemplo, la temperatura en el nodo 4 es igual a 300°F después de 12 incrementos de tiempo.

Usando el criterio de estabilidad, ecuación (4-164), se determina la longitud de un incremento de tiempo, y se escoge el incremento de espacio. En este ejemplo se obtiene el valor de Δt igual a

$$\Delta t = \frac{\Delta x^2}{2\alpha} = \frac{(1/4 \text{ ft})^2}{2(0.018 \text{ ft}^2/\text{hr})} = 1.74 \text{ hr}$$

En consecuencia, se determina que la respuesta deseada es

$$\text{tiempo transcurrido} = 12(1.74) = 20.9 \text{ hr}$$

En el ejemplo anterior las condiciones de frontera fueron las más sencillas posibles, las de la temperatura prescrita. Con esta técnica hay posibilidad para otras condiciones de frontera, tales como fronteras aisladas en que el gradiente de temperatura es cero, flujo prescrito de calor en que se conoce el gradiente de temperatura, y la convección. Ahora se considera la cuestión de la convección en una superficie.

Con la convección en una frontera se puede expresar el flujo de calor superficial como

$$\left. \frac{q_x}{A} \right|_{\text{superficie}} = -k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{\text{superficie}} = h(T_{\text{superf}} - T_{\infty}) \quad (4-165)$$

Con referencia a la figura 4.34, se puede aplicar la ecuación (4-165) al plano de referencia (0) para obtener

$$-\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_0 = \frac{T_0 - T_{\infty}}{k/h} = \frac{T_0 - T_{\infty}}{\Delta x^*} \quad (4-166)$$

en donde Δx^* es la razón k/h con unidades de longitud, y es un espesor ficticio o seudoespesor que representa el efecto de la película convectiva. El seudoespesor k/h es la cantidad en que se extiende el límite sólido de manera que se pueda incluir el efecto de convección en una frontera, en una solución gráfica. La distancia k/h representa la resistencia térmica fluido-superficie y tiene un solo valor, *independiente del incremento espacial empleado para el medio conductor*. El ejemplo 4.17 ilustra la forma como se trata la convección en una solución gráfica en un problema de conducción transitorio de calor.

Ejemplo 4.17

Se calienta una pieza de acero inoxidable ($k = 13 \text{ Btu/hr-ft-}^\circ\text{F}$, $\alpha = 0.17 \text{ ft}^2/\text{hr}$) hasta 1400°F en un horno y luego se le deja enfriar en el aire a 80°F. La pieza tiene

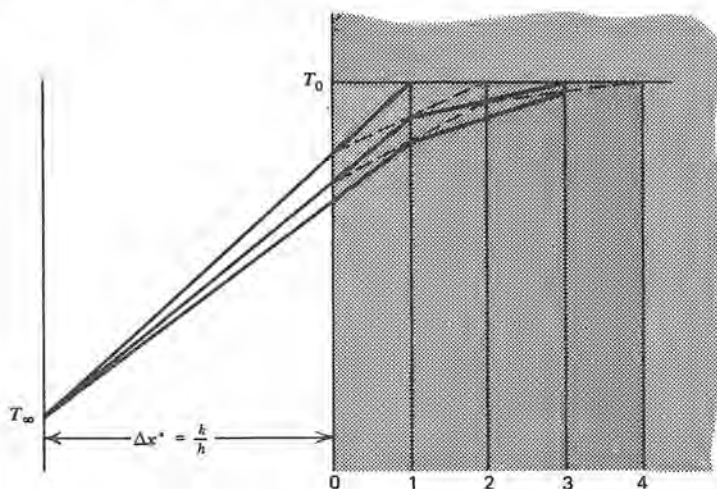


Figura 4.34 Procedimiento de graficación de Schmidt con convección en la frontera.

10 in de espesor y se puede considerar plana con suficiente longitud de manera que no es necesario tener en cuenta los efectos de los extremos. Para una conductancia de superficie de 22 Btu/hr-ft²-°F, determinar el tiempo necesario para que el centro llegue a 1100°F. ¿Cuál es la temperatura superficial en ese momento?

Ya que la pieza es simétrica, solamente se necesita considerar la mitad de la sección transversal, recordando que el gradiente de temperatura es cero en el centro (como para una pared aislada en este lugar). En la figura 4.35 se muestra la construcción de la gráfica de Schmidt.

En forma conveniente, se escoge el incremento espacial en el sólido igual a 1 in. De la ecuación (4-164) se encuentra que el incremento de tiempo consistente con este valor de Δx es

$$\Delta t = \frac{\Delta x^2}{2\alpha} = \frac{(1/12 \text{ ft})^2}{2(0.17 \text{ ft}^2/\text{hr})} = 0.020 \text{ hr}$$

El seudoespesor de la película convectiva es

$$\Delta x^* = \frac{k}{h} = \frac{13 \text{ Btu/hr-ft-}^\circ\text{F}}{22 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^\circ\text{F}} = 0.591 \text{ ft} = 7.09 \text{ in.}$$

Con estos valores para Δx , Δt , y Δx^* , la temperatura en el centro (nodo 5) llega a 593°C, aproximadamente después de 29 incrementos de tiempo; en consecuencia, el tiempo total transcurrido para que se llegue a esta condición es

$$t = (29 \text{ incrementos}) \left(\frac{0.020 \text{ hr}}{\text{incremento}} \right) = 0.58 \text{ hr} = 34.8 \text{ min}$$

En este tiempo se observa que la temperatura superficial es de 446°C.

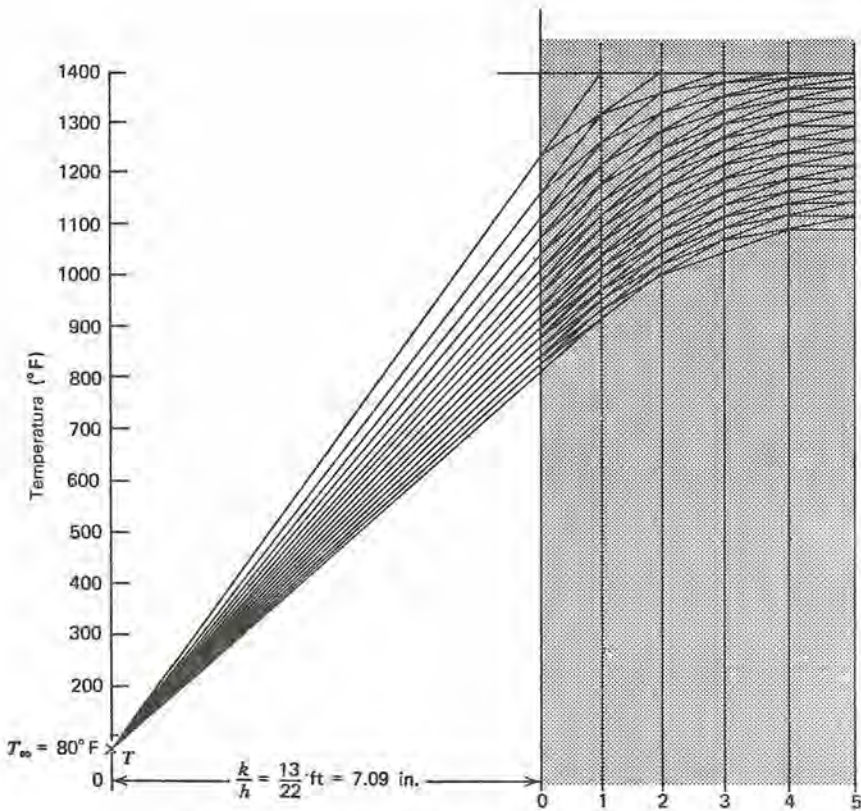


Figura 4.35 Gráfica de Schmidt para el ejemplo 4.17.

En este ejemplo la técnica de graficación de Schmidt no es la única forma en que se puede resolver el problema; en este caso las soluciones por gráfica también son posibles y las respuestas que se obtienen usando las gráficas de estado inestable son consistentes con las que se obtienen por medios gráficos.

La técnica de graficación de Schmidt es una evolución de la forma explícita de las ecuaciones de diferencias para la conducción transitoria unidimensional antes mencionada. En este punto una consideración lógica es ver si existen otros procesos de diferenciación que conduzcan a otras técnicas gráficas, y de ser así, la forma en que se comparan las técnicas con respecto a la dificultad y exactitud. Ahora se considera otro enfoque de diferencias, que conduce a otro procedimiento gráfico.

4.3-4.2 Procedimientos de dirección alterna: la solución gráfica de Saul'ev

No se pretende presentar aquí un desarrollo completo o explicación de los *procedimientos de dirección alterna* (PDA). Las referencias citadas son considerablemente más exhaustivas en la descripción de estos métodos.

Los procedimientos de direcciones alternas caen dentro de dos categorías primarias: (1) métodos implícitos (PIDA) basados en las ideas propuestas por Peaceman y Rachford⁴ y por Dougla⁵ y los métodos explícitos (PEDA) basados en el trabajo de Saul'ev.⁶ Estos métodos permiten lograr ahorros considerables en el tiempo de la computadora y requieren menos memoria de computadora que las técnicas más conocidas presentadas en el capítulo 3. Estos beneficios son especialmente considerables en los problemas bi y tridimensionales.

PIDA. El prototipo de los métodos implícitos de dirección alterna se ilustra por el caso de conducción transiente bidimensional de calor, en donde la ecuación diferencial dominante es

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4-167)$$

Este método difiere de otros en el tratamiento de los términos $\nabla^2 T$

Dada una solución en el n -ésimo incremento en el tiempo, se encuentra $T_{i,j}^{n+1/2}$, tratando explícitamente una derivada espacial (por ejemplo $\partial^2 T / \partial x^2$) y la otra implícitamente. En el siguiente intervalo, desde $n + 1/2$ a $n + 1$, se "conmutan" los métodos con $\partial^2 T / \partial x^2$ y $\partial^2 T / \partial y^2$ tratado implícitamente y explícitamente. El resultado es una reducción en el número de cálculos, ya que el número requerido es alrededor de un séptimo de los requeridos en el método de Crank-Nicholson. Desde n a $n + 1/2$, el proceso aparece como

$$\begin{aligned} \frac{T_{i-1,j}^{n+1/2} - 2T_{i,j}^{n+1/2} + T_{i+1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j+1}^n}{\Delta y^2} \\ = \frac{2}{\alpha \Delta t} (T_{i,j}^{n+1/2} - T_{i,j}^n) \quad (4-168) \end{aligned}$$

⁴ D. W. Peaceman y H. H. Rachford, Jr., "The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations," *J. Soc. Appl. Math* 3 (1955)

⁵ Jim Douglas, Jr., "On the Numerical Integration of $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ By Implicit Methods," *J. Soc. Ind. and Appl. Math.* 3 (1955)

⁶ K. Saul'ev, "On Methods of Numerical Integration of Equations of Diffusion," *Doklady Akad. Nauk USSR* 115 (1957); 1077.

y de $n + 1/2$ a $n + 1$, en la forma

$$\frac{T_{i-1,j}^{n+1/2} - 2T_{i,j}^{n+1/2} + T_{i+1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2} = \frac{2}{\alpha \Delta t} (T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1/2}) \quad (4-169)$$

en la forma de diferencias.

Douglas y Gunn⁷ sugirieron una extensión natural de estas ideas a tres dimensiones, en donde el incremento de tiempo se divide en los intervalos desde n a $n + 1/3$, $n + 1/3$ a $n + 2/3$ y $n + 2/3$ a $n + 1$ y se tratan dos derivadas espaciales explícitamente durante cada subintervalo. En esta extensión se encuentran algunas dificultades de estabilidad y exactitud; sin embargo, Douglas y Gunn lograron una solución satisfactoria para el caso tridimensional. El lector puede consultar la obra mencionada en caso de querer obtener detalles al respecto.

PEDA. El método prototipo del tipo explícito de dirección alternante es una solución unidimensional debida a Saul'ev. Hay algunas diferencias entre PIDA y PEDA, que son

1. Se usan los valores calculados más recientes de la temperatura (en la variable t del tiempo) tan pronto como sea posible.
2. Siempre se inician los cálculos en cada incremento de tiempo desde fronteras alternas (y opuestas).

En una dimensión el procedimiento es semejante a la simple formulación explícita sencilla. En este caso, la ecuación de diferencias es

$$T_i^{n+1} - T_i^n = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} [T_{i-1}^{n+1} - T_i^{n+1} - T_i^n + T_{i+1}^n] \quad (4-170)$$

Avanzando desde la frontera izquierda hacia la derecha T_{i-1}^{n+1} es una cantidad conocida. Para el incremento de tiempo desde $n + 1$ a $n + 2$, el cálculo avanza desde la frontera del lado derecho hacia la izquierda, de acuerdo con

$$T_i^{n+2} - T_i^{n+1} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} [T_{i-1}^{n+1} - T_i^{n+1} - T_i^{n+2} + T_{i+1}^{n+2}] \quad (4-171)$$

en donde T_{i+1}^{n+2} es una cantidad conocida.

El procedimiento descrito es incondicionalmente estable.

⁷ Jim Douglas, Jr., y J. E. Gunn, "A General Formulation of Alternating Direction Methods," *Numerische Mathematik* 6 (1964): 428.

Las ecuaciones (4-170) y (4-171) están en una forma útil para la solución por computadora. Es posible una solución gráfica cuando se hace

$$\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} = 1 \quad (4-172)$$

en cuyo caso las ecuaciones anteriores quedan

$$T_i^{n+1} = \frac{1}{2}(T_{i-1}^{n+1} + T_{i+1}^n) \quad (4-173)$$

y

$$T_i^{n+2} = \frac{1}{2}(T_{i-1}^{n+1} + T_{i+1}^{n+2}) \quad (4-174)$$

En el ejemplo 4.18 se emplean estas ecuaciones para resolver el mismo problema que se consideró en el ejemplo 4.16.

Ejemplo 4.18

Dada la pared de tabique con dimensiones, condiciones iniciales y condiciones de frontera especificadas en el ejemplo 4.16, determinar el tiempo necesario para que el centro de la pared llegue a 300°F, usando la técnica gráfica de Saul'ev.

Figura 4.36

En la figura 4.36 se muestra la construcción gráfica para esta solución. Para que se llegue a la condición deseada, se requieren aproximadamente 7.3 incrementos de tiempo. De la ecuación (4-172) se calcula el incremento de tiempo en cada incremento igual a

$$\Delta t = \frac{\Delta x^2}{\alpha} = \frac{(1/4 \text{ ft})^2}{0.018 \text{ ft}^2/\text{hr}} = 3.47 \text{ hr}$$

Por tanto, se calcula que el tiempo total transcurrido es

$$7.3(3.47) = 25.3 \text{ hr}$$

que es aproximadamente 20% mayor que la solución que se obtuvo en el ejemplo 4.16. Para incrementos más pequeños de tiempo y espacio, las dos técnicas de solución dan resultados más compatibles.

Son congruentes el tiempo y esfuerzo ahorrados con la técnica de Saul'ev, comparados con la técnica de graficación de Schmidt. Se puede hacer la misma comparación con relación al tiempo de computadora necesario para resolver problemas por PEDa, comparados con las ecuaciones simples de diferencias explícitas. Los beneficios de usar PEDa en dos y tres dimensiones son todavía más notables.

Se puede usar la misma técnica para tratar películas convectivas, usando el seudoespesor $\Delta x^* = k/h$ con el procedimiento de Saul'ev como se demostró antes con la gráfica de Schmidt.

Larkin⁸ y Barat y Clark⁹ han presentado extensiones al enfoque PEDa de Saul'ev a dos dimensiones. Alloda y Quon¹⁰ desarrollaron experimentos numéricos para aplicaciones tridimensionales de PEDa.

⁸ B. K. Larkin, "Some Stable Explicit Difference Approximations to the Diffusion Equation," *Mathematics of Computation* 18 No. 86 (1964): 196.

⁹ H. Z. Barakat y J. A. Clark, "On the Solution of the Diffusion Equation by Numerical Methods," *J. Ht. Transfer, Trans. ASME* (Nov. 1966): 421-427.

¹⁰ S. R. Alloda y D. Quon, "A Stable, Explicit Numerical Solution of the Conduction Equation for Multidimensional Nonhomogeneous Media," *Ht. Trans. Los Angeles, Chem. Engr. Prog. Symposium* 62, No. 64 (1966): 151-156.

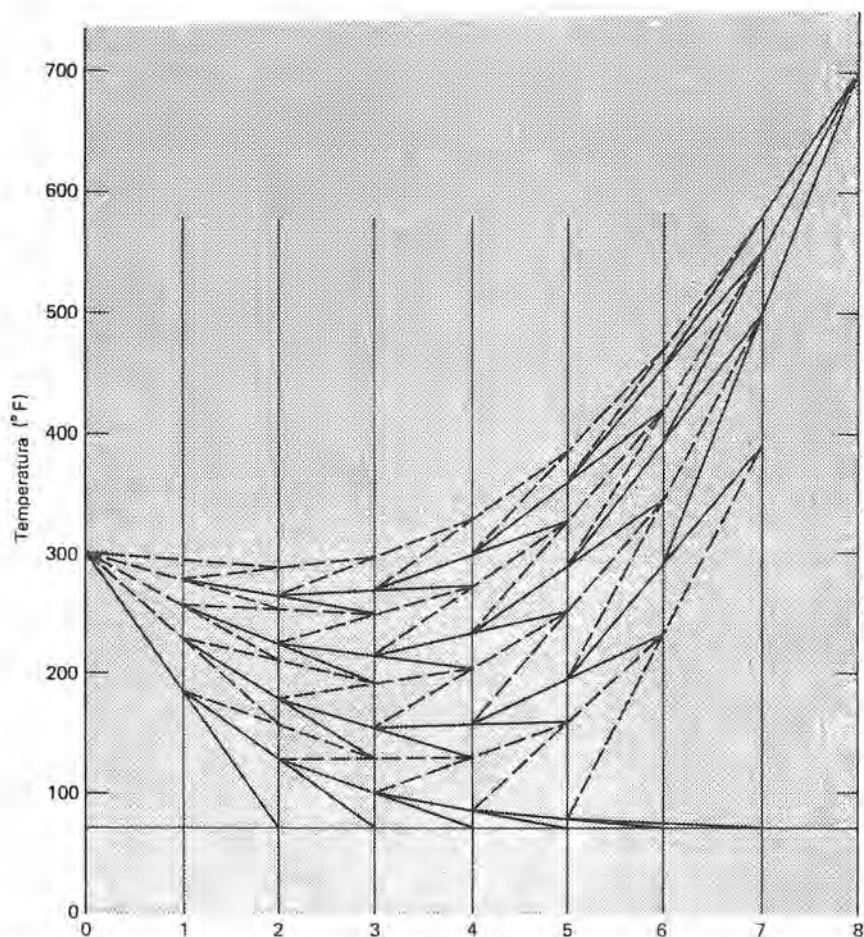


Figura 4.36 Solución gráfica de Saul'ev para la conducción transitoria a través de una pared plana.

4.2-4.3 Conducción transitoria uni y bidimensional; soluciones numéricas

Se considera un problema de ejemplo usando la computadora digital para resolver un problema de conducción transitoria de calor formulado numéricamente.

Ejemplo 4.19

Se tiene una placa plana de magnesio de 1 ft de espesor; las demás dimensiones son suficientemente grandes como para considerar despreciables los efectos de bordes. La placa se encuentra inicialmente a la temperatura uniforme de 100°F. De repente

se baja la temperatura de la superficie superior del magnesio y se mantiene a 0°F. Se puede considerar que la superficie inferior de la placa está aislada. Describir la distribución de temperatura en la placa con el tiempo para un período de 12 min (0.2 hr) después que se reduce la temperatura superficial a 0°F.

Se supone que las propiedades del magnesio no varían de una manera notable en el rango de temperaturas desde -32 hasta 38°C.

La ecuación diferencial que se aplica al caso transitorio unidimensional es

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (4-92)$$

y se escribe la ecuación de diferencias en la forma explícita con el propósito de poder tener una solución de computadora, en donde se usa

$$T_i^{n+1} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} (T_{i-1}^n + T_{i+1}^n) + \left(1 - \frac{2\alpha \Delta t}{\Delta x^2}\right) T_i^n \quad (3-19)$$

para calcular los valores de T_i al final de un intervalo Δt con todas las temperaturas conocidas al inicio del intervalo.

A continuación se presentan el listado del programa, el diagrama de flujo (figura 4.37) y la solución de la computadora. El programa está escrito en forma bastante general para que se pueda determinar la historia de tiempo-temperatura de la placa para una cantidad de distintas localizaciones dentro de la placa, para cualquier material de interés, para cualesquiera especificaciones inicial y de frontera, para cualquier incremento de tiempo y para cualquier duración que se quiera.

Se especificó lo siguiente para este problema de ejemplo:

conductividad térmica	TK = 99.0
densidad	DEN = 109.0
capacidad térmica	HC = 0.232
número de nodos internos	
evaluados	N = 5
ancho del medio conductor	AL = 1.0 (pies)
incremento de tiempo	
(para fines de computación)	DT = 0.005
temperatura inicial	TI = 100.0 (°F)
número de intervalos transcurridos	
a los que se quiere que	
ocurra la impresión	L = 4
duración que se debe considerar	TMAX = 0.21

```

PROGRAMA DITRC
C  ESTE PROGRAMA OBTIENE LA DISTR TEMPER EN FUNCION DEL
C  TIEMPO PARA UNA BARRA UNIDIMENSIONAL AISLADA EN 1
C  EXTREMO, INICIALMENTE A UNA TEMP CONST = T1, Y LUEGO
C  SUJETA A LA TEMP = TBC AL TIEMPO 0 + DELTA T EN EL
C  OTRO LADO

```

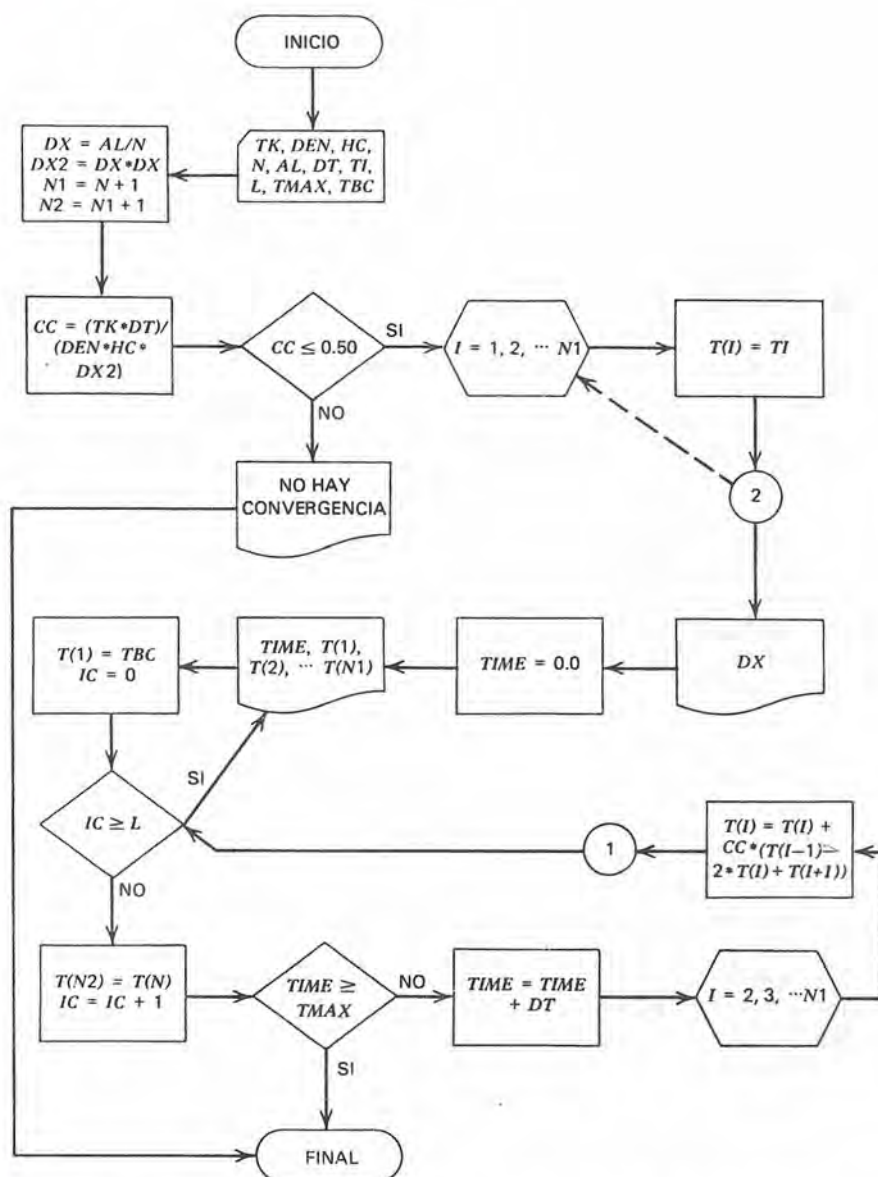



Figura 4.37 Diagrama de flujo para resolver un problema de conducción transitoria unidimensional de calor, usando el enfoque explícito.

```

DIMENSION T(500)
TK=TTYIN(4HTK =, 1H )
DEN=TTYIN(4HDEN ,2H = )
HC=TTYIN(4HHC =,1H )
N=TTYIN(4HN = )
AL=TTYIN(4HAL =,1H )
DX=AL/N
DX2=DX*DX
DT=TTYIN(4HDT =,1H )
TI=TTYIN(4HTI =,1H )
L=TTYIN(4HL = )
TMAX=TTYIN(4HTMAX,3H = )
N1=N+1
CC=(TK*DT)/(DEN*HC*DX2)
IF(CC.LE.0.50)GO TO 5
WRITE(61,103)
GO TO 200

103 FORMAT(1H0,14HNO CONVERGENCIA
5 CONTINUE
N2=N1+1
DO 2 I=1,N1
2 T(I)=TI
TBC=TTYIN(4HTBC ,2H = )
TIEMPO=0.0
WRITE(61,102)DX
102 FORMAT(1H0,16H ANCHO DEL INTERVALO =,F8.4)
WRITE(61,100)
7 WRITE(61,101) TIEMPO,(T(I),I=1,N1)
T(1)=TBC
IC=0
3 IF(IC.GE.L)GO TO 7
T(N2)=T(N)
IC=IC+1
IF(TIEMPO.GE.TMAX)GO TO 200
TIEMPO = TIEMPO + DT
DO 1 I=2,N1
1 T(I)=T(I)+CC*(T(I-1)-2.*T(I)+T(I+1))
GO TO 3
100 FORMAT(1H0,4H TIEMPO,15X,26HEN LOS PUNTOS NODALES
101 FORMAT(1H0,F8.3,4X,12(2X,F6.2))
200 STOP
END

```

Más abajo aparece el listado de resultados para este caso. Una consideración que se debe hacer es la relación entre el incremento de tiempo y el intervalo espacial especificado por la ecuación (3-31) para la estabilidad de la solución. De acuerdo con la ecuación (3-31),

$$\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \quad (3-31)$$

En este caso,

$$\frac{k \Delta t}{\rho c_p \Delta x^2} = \frac{(99 \text{ Btu/hr-ft-}^\circ\text{F})(0.005 \text{ hr})}{(109 \text{ lb}_m/\text{ft}^3)(0.232 \text{ Btu/lb}_m\text{-}^\circ\text{F})(0.2 \text{ ft})^2} = 0.489$$

lo que es satisfactorio. Todo incremento de tiempo menor a 0.005 es aceptable para asegurar estabilidad numérica, por lo que seguramente proporciona un incremento en la exactitud. No hay criterio para la convergencia en esta técnica explícita. Se debe decidir personalmente el mínimo tamaño del incremento de tiempo estableciendo un equilibrio entre el tiempo de la computadora y la exactitud.

Se obtuvieron otras dos soluciones para este problema; cada una es idéntica a la primera excepto por el incremento del tiempo; que es de 0.0025 en el segundo caso y de 0.0005 en el tercero. Ya que se presentan los listados de resultados para los mismos incrementos en tiempo real, es posible comparar los resultados.

TK = 99.0
 DEN = 109.0
 HC = 0.232
 N = 5
 AL = 1.0
 DT = .005
 TI = 100.0
 L = 4
 TMAX = .21
 TBC = 0.0
 ANCHO DEL INTERVALO = .2000

TIEMPO	TEMPERATURA EN LOS PUNTOS NODALES					
0	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
.020	0	27.93	50.15	66.16	75.83	79.00
.040	0	19.37	35.64	47.79	55.17	57.57
.060	0	14.03	25.85	34.69	40.06	41.81
.080	0	10.18	18.77	25.18	29.09	30.35
.100	0	7.39	13.63	18.28	21.12	22.04
.120	0	5.37	9.89	13.27	15.33	16.00
.140	0	3.90	7.18	9.64	11.13	11.62
.160	0	2.83	5.21	7.00	8.08	8.43
.180	0	2.05	3.79	5.08	5.87	6.12
.200	0	1.49	2.75	3.69	4.26	4.45

FIN DEL PROGRAMA FORTRAN

TK = 99.0
 DEN = 109.0
 HC = 0.232
 N = 5
 AL = 1.0
 DT = .0025
 TI = 100.0
 L = 8
 TMAX = .21
 TBC = 0.0
 ANCHO DEL INTERVALO = .2000

TIEMPO	TEMPERATURA EN LOS PUNTOS NODALES					
0	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
.020	0	34.08	60.58	78.16	87.90	91.07
.040	0	24.09	44.87	60.63	70.37	73.64
.060	0	18.64	34.98	47.61	55.54	58.21
.080	0	14.63	27.49	37.47	43.74	45.86
.100	0	11.51	21.64	29.49	34.44	36.10
.120	0	9.06	17.03	23.22	27.11	28.42
.140	0	7.13	13.41	18.28	21.34	22.37
.160	0	5.62	10.55	14.39	16.80	17.61
.180	0	4.42	8.31	11.33	13.23	13.87
.200	0	3.48	6.54	8.92	10.41	10.92

FIN DEL PROGRAMA FORTRAN

TK = 99.0
 DEN = 109.0
 HC = 0.232
 N = 5
 AL = 1.0
 DT = .0005
 TI = 100.0
 L = 40
 TMAX = 0.21
 TBC = 0.0
 ANCHO DEL INTERVALO = .2000

TIEMPO	TEMPERATURA EN LOS PUNTOS NODALES					
0	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
.020	0	38.06	67.22	84.96	93.54	96.02
.040	0	27.17	50.75	68.42	79.13	82.69
.060	0	21.56	40.77	55.79	65.28	68.52

TIEMPO		TEMPERATURA EN LOS PUNTOS NODALES (cont.)				
.080	0	17.53	33.25	45.65	53.56	56.27
.100	0	14.34	27.21	37.38	43.89	46.12
.120	0	11.74	22.28	30.62	35.95	37.78
.140	0	9.61	18.25	25.08	29.45	30.95
.160	0	7.88	14.95	20.54	24.12	25.35
.180	0	6.45	12.25	16.83	19.76	20.77
.200	0	5.28	10.03	13.78	16.19	17.01

FIN DEL PROGRAMA FORTRAN

La figura 4.38 muestra el histograma de temperatura-tiempo dentro de la losa de magnesio en la forma en que se obtuvo numéricamente para los tres incrementos de tiempo usados; la posición que corresponde a los valores graficados es en la pared aislada. En la figura 4.39 se muestra el perfil de la temperatura a través de la losa después de 6 min (0.10 hr) para cada uno de los incrementos de tiempo.

Es aparente el error encontrado en tal solución para incrementos de tiempo relativamente grandes. Las temperaturas correctas (para $\Delta t \rightarrow 0$) no difieren considerablemente de los valores determinados en $\Delta t = 0.0005$. Estos resultados explican la necesidad de tener cuidado en no confiar demasiado de los resultados numéricos. El hecho que se obtenga una solución numérica, o sea que se cumplan los criterios de la estabilidad, no asegura la exactitud.

En el ejemplo 4.20 se resuelve el mismo problema que en el ejemplo 4.19; sin embargo, se emplea el proceso de la solución implícita.

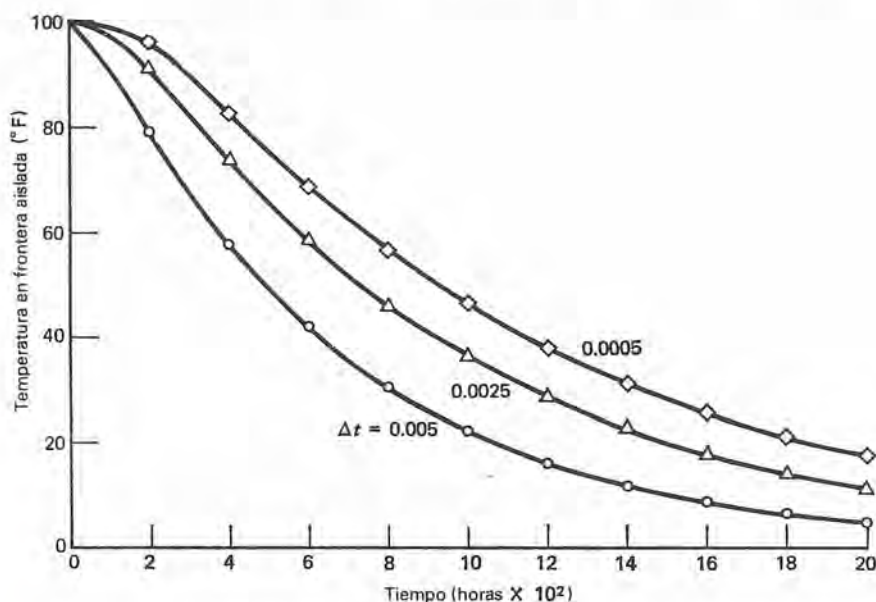


Figura 4.38 Comparación de las soluciones explícitas para distintos incrementos de tiempo.

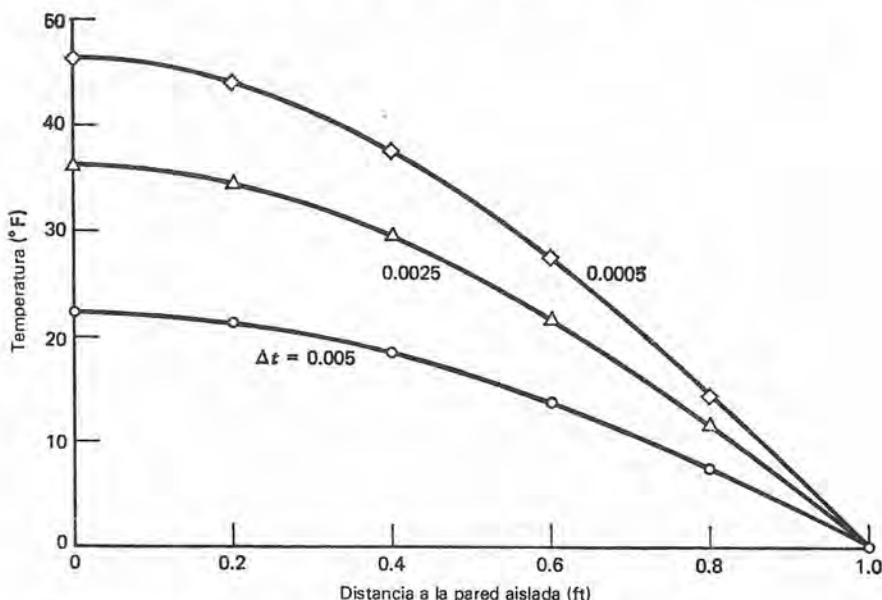


Figura 4.39 Perfiles de temperatura a través de una losa después de transcurrida 0.10 de hora para tres incrementos de tiempo.

Ejemplo 4.20

Determinar la misma información que en el ejemplo anterior para conducción unidimensional en una placa de magnesio de 1 ft de espesor. Resolver el problema de conducción transitorio unidimensional usando una formulación implícita, y comparar los resultados con los recién obtenidos para la solución explícita.

Nuevamente la ecuación (4-92) es la ecuación diferencial que se debe resolver

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (4-92)$$

Ahora se escribe esta expresión en forma implícita como

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

Se obtiene la incógnita T_i^{n+1} de esta expresión en la forma

$$T_i^{n+1} = D_i + \frac{A}{B} (T_{i-1}^{n+1} + T_{i+1}^{n+1})$$

en donde los términos A , B , y D_i están definidos como

$$A = -\alpha \Delta t / \Delta x^2$$

$$B = 1 + 2\alpha \Delta t / \Delta x^2$$

$$D_i = T_i^n / B$$

El proceso de solución implica la iteración en la cual se emplea el valor de T_i^{n+1} calculado recientemente.

En seguida se presentan el diagrama de flujo (figura 4.40), el listado del programa FORTRAN y los datos de salida.

Las especificaciones para este problema son semejantes a las correspondientes al ejemplo anterior. Las propiedades físicas del magnesio son las mismas; datos adicionales necesarios de entrada son

número de nodos (sin incluir la frontera izquierda)	$N = 6$
ancho del medio conductor	$Al = 1.0$
incremento de tiempo	$DT = 0.01$
	0.005
	0.001
temperatura inicial	$TI = 100.0$
condición de frontera (en la frontera izquierda)	$BC = 0.0$
criterio de convergencia	$EPS = 0.05$

```

PROGRAMA DIITC
C  ESTE PROGRAMA CALCULA LA DISTR TRANSITORIA DE TEMP
C  EN UNA PARED UNIDIMENSIONAL USANDO LA ITERACION.
C  LA PARED ESTA AISLADA EN UNA SUPERFICIE
DIMENSION T(50),D(50)
TC=TTYIN(4HTC =,1H )
DEN=TTYIN(4HDEN ,2H = )
HC =TTYIN(4HHC =,1H )
AL=TTYIN(4HAL =,1H )
N=TTYIN(4HN = )
L=TTYIN(4HL = )
TMAX=TTYIN(4HTMAX,3H = )
N1=N+1
N2=N1+1
EPS=TTYIN(4HEPS ,2H = )
DX=AL/N
DX2=DX*DX
WRITE(61,102)DX
C  LEE INCREMENTO DE TIEMPO
DT=TTYIN(4HDT =,1H )
C  INICIALIZA TIEMPO Y TEMPERATURA
TIEMPO =0.0
TI=TTYIN(4HTI =,1H )
C  DISTRIB. INIC DE TEMPERATURA ES PLANA
DO 1 I=1,N1
1 T(I)=TI
ICNT=0
C  COND. FRONTERA AL TIEMPO = 0 + DELTA TIEMPO

```

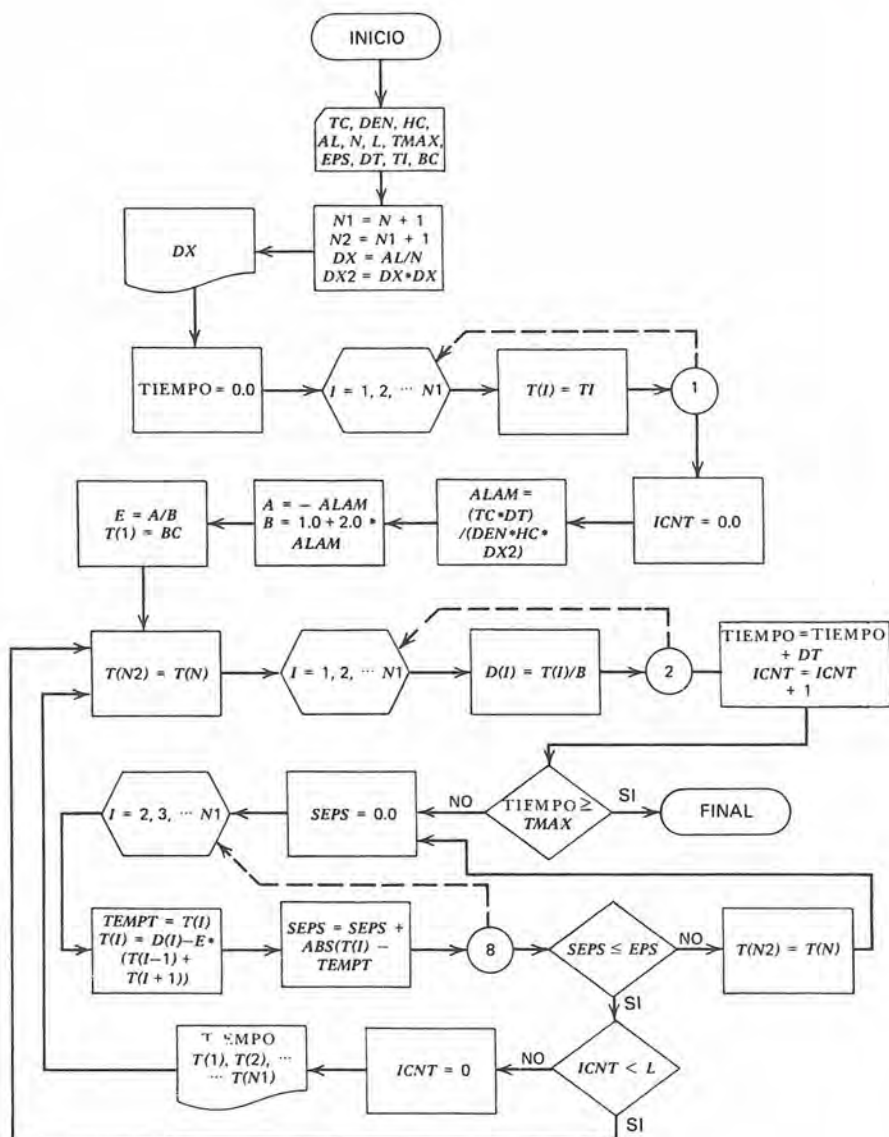


Figura 4.40 Diagrama de flujo para el ejemplo 4.20.


```

      BC=TTYIN(4HBC =,1H )
      WRITE(61,100)
C     ASIGNA VALORES A COEFICIENTES
      ALAM=(TC*DT)/(DEN*HC*DX2)
      A=-ALAM
      B=1.0+2.0*ALAM
      E=A/B
      WRITE(61,101)TIME,(T(I),I=1,N1)
      T(1)=BC
C     CALCULA D
5     T(N2)=T(N)
      DO 2 I=1,N1
2     D(I)=T(I)/B
C     AVANZA EL TIEMPO
      TIME=TIME+DT
      ICNT=ICNT+1
      IF(TIME.GE.TMAX)GO TO 6
3     SEPS=0.0
      DO 8 I=2,N1
      TEMPT=T(I)
      T(I)=D(I)-E*(T(I-1)+T(I+1))
8     SEPS=SEPS+ABS(T(I)-TEMPT)
      IF(SEPS.LE.EPS)GO TO 4
      T(N2)=T(N)
      GO TO 3
4     IF(ICNT.LT.L)GO TO 5
      ICNT=0
      WRITE(61,101)TIME,(T(I),I=1,N1)
      GO TO 5
100  FORMAT(1H0,3X,4HTIME,18X,11HTEMPERATURA)
101  FORMAT(1H ,F8.3,4X,12(2X,F6.2))
102  FORMAT(1H ,16ANCHO DEL INTERVALO =,F8.4)
6     END

```

Se proporcionan tres distintos listados de salida para los tres incrementos de tiempo especificados: 0.01, 0.005 y 0.001 hr. respectivamente. Se pueden hacer comparaciones, ya que se proporcionan los valores de las temperaturas a intervalos iguales para cada nodo, incluyendo el límite aislado y el límite a 0°F. Para este caso es aparente, en contraste directo con el ejemplo anterior, que la solución no es demasiado sensible al incremento de tiempos elegido. Los valores de la temperatura determinados para 0.01 y para 0.001 hora difieren en no más del 3%. Parecería que incluso para el mayor incremento de tiempo empleado en este caso los resultados son mejores que cualesquiera otros obtenidos en el ejemplo anterior por los medios explícitos.

170 TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONDUCCION

TC = 99.0
DEN = 109.0
HC = 0.232
AL = 1.0
N = 6
L = 2
TMAX = 0.30
EPS = 0.05
ANCHO DEL INTERVALO = .1667
DT = 0.01
TI = 100.0
BC = 0.0

TIEMPO	TEMPERATURA						
0	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
.020	0	38.77	65.38	81.21	89.80	93.93	95.14
.040	0	25.54	47.60	64.43	75.82	82.27	84.35
.060	0	19.71	37.64	52.42	63.26	69.82	72.01
.080	0	15.99	30.76	43.26	52.70	58.54	60.52
.100	0	13.19	25.44	35.91	43.89	48.88	50.58
.120	0	10.95	21.14	29.87	36.55	40.75	42.17
.140	0	9.11	17.59	24.87	30.45	33.95	35.15
.160	0	7.59	14.65	20.72	25.37	28.29	29.29
.180	0	6.32	12.21	17.26	21.13	23.57	24.40
.200	0	5.27	10.17	14.38	17.61	19.64	20.34
.220	0	4.39	8.48	11.99	14.68	16.38	16.95
.240	0	3.66	7.07	10.00	12.24	13.65	14.13
.260	0	3.06	5.90	8.34	10.21	11.39	11.79
.280	0	2.55	4.93	6.96	8.52	9.50	9.84
.300	0	2.13	4.11	5.81	7.11	7.93	8.21

TC = 99.0
DEN = 109.0
HC = 0.232
AL = 1.0
N = 6
L = 4
TMAX = 0.30
EPS = 0.05
ANCHO DEL INTERVALO = .1667
DT = 0.005
TI = 100.0
BC = 0.0

TIEMPO	TEMPERATURA						
0	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
.020	0	35.76	63.04	80.37	89.99	94.59	95.92

TIEMPO TEMPERATURA (cont.)

.040	0	24.39	46.08	63.27	75.30	82.28	84.55
.060	0	19.13	36.72	51.47	62.48	69.24	71.51
.080	0	15.60	30.08	42.42	51.82	57.68	59.67
.100	0	12.87	24.85	35.12	42.97	47.90	49.57
.120	0	10.66	20.59	29.11	35.63	39.74	41.13
.140	0	8.84	17.07	24.13	29.55	32.96	34.12
.160	0	7.33	14.16	20.02	24.51	27.34	28.30
.180	0	6.08	11.75	16.61	20.34	22.68	23.48
.200	0	5.05	9.75	13.78	16.88	18.82	19.49
.220	0	4.19	8.09	11.44	14.01	15.62	16.17
.240	0	3.48	6.71	9.49	11.62	12.96	13.42
.260	0	2.89	5.58	7.88	9.65	10.76	11.14
.280	0	2.40	4.64	6.55	8.02	8.94	9.26
.300	0	2.00	3.85	5.45	6.67	7.43	7.70

TC = 99.0

DEN = 109.0

HC = 0.232

AL = 1.0

N = 6

L = 20

TMAX = 0.30

EPS = 0.05

ANCHODELINTERVALO = .1667

DT = 0.001

TI = 100.0

BC = 0.0

TIEMPO TEMPERATURA

0	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
.020	0	33.39	60.75	79.40	90.17	95.32	96.80
.040	0	23.56	44.88	62.26	74.80	82.25	84.71
.060	0	18.72	36.03	50.71	61.80	68.69	71.02
.080	0	15.32	29.56	41.75	51.07	56.91	58.90
.100	0	12.63	24.38	34.47	42.20	47.06	48.71
.120	0	10.43	20.14	28.48	34.87	38.89	40.26
.140	0	8.62	16.64	23.53	28.82	32.14	33.27
.160	0	7.12	13.75	19.44	23.81	26.56	27.49
.180	0	5.88	11.36	16.07	19.68	21.95	22.72
.200	0	4.86	9.39	13.28	16.26	18.14	18.77
.220	0	4.02	7.76	10.97	13.44	14.99	15.51
.240	0	3.32	6.41	9.07	11.10	12.38	12.82
.260	0	2.74	5.30	7.49	9.18	10.23	10.59
.280	0	2.27	4.39	6.21	7.60	8.47	8.77
.300	0	1.89	3.64	5.14	6.30	7.02	7.27

La conclusión a que se acaba de llegar no se debe interpretar con relación a una comparación entre los resultados del mismo problema logrados por los medios explícito e implícito, como que las técnicas implícitas siempre son claramente superiores a las explícitas. Las consideraciones de la memoria requerida de computadora, tiempo de corrida, estabilidad numérica, longitud del problema y otros puntos importantes pueden conducir a distintas conclusiones en distintos problemas.

Ahora se dirige la atención al caso de la conducción transitoria bidimensional. Sigue un ejemplo final, que comprende la solución de un problema de conducción de calor transitoria por métodos numéricos.

Ejemplo 4.21

Se tiene una barra larga de sección transversal a la temperatura uniforme inicial de 50°F. Determinar la distribución de la temperatura en función del tiempo para la barra después que se eleva y mantiene la temperatura de un extremo hasta 200°F y se bajan y mantienen las temperaturas de los tres lados restantes a 0°F.

La ecuación aplicable en este caso es la forma bidimensional de la ecuación de calor, que es

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Luego se escribe esta ecuación diferencial en forma implícita de diferencia finita como

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{k}{\rho c_p} \left[\frac{T_{i-1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right]$$

Luego se modifica la forma anterior de la ecuación de las diferencias haciendo $\Delta x = \Delta y$ y se agrupan los términos constantes en una sola constante A , definida como $A = k \Delta t / \rho c_p \Delta x^2$.

$$[1 + 4A]T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^n + A[T_{i-1,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}]$$

Finalmente, despejando $T_{i,j}^{n+1}$, se escribe

$$T_{i,j}^{n+1} = D_{i,j} + E[T_{i-1,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}]$$

en donde

$$D_{i,j} = \frac{T_{i,j}^n}{1 + 4A}$$

$$E = \frac{A}{1 + 4A}$$

La última de las ecuaciones de diferencias escrita es la que se resuelve para obtener la distribución $T_{i,j}$ de las temperaturas en el nodo (i,j) en una sucesión de períodos. La figura 4.41 es el diagrama de flujo para la solución por computadora; también se incluyen un listado de computadora y la salida correspondiente para la solución del problema. Las siguientes son las condiciones de entrada para las que se aplican los valores de salida:

conductividad térmica	$TK = 99.0$
densidad	$DEN = 109.0$
calor específico	$HC = 0.232$
número de incrementos tanto en la dirección horizontal como en la dirección vertical	$N = 6$
incrementos de tiempo (para fines de computación)	$DT = 0.002$ $= 0.004$
temperatura inicial	$TIN = 50.0$
número de intervalos transcurridos para la impresión deseada	$L = 2$ 10
longitud de tiempo real que se debe considerar	$TMAX = 0.018$

PROGRAMA D2TC

DIMENSION T(50,50),D(50,50)

C ESTE PROGRAMA OBTIENE LO DISTRIB DE TEMP TRANSITORIA
C RESULTANTE DE LA CONDUCCION EN UNA PLACA PLANA CON
C LIMITES DE TEMPERATURA CONSTANTE: LA SOLUCION SE OB-
C TIENE POR ITERACION EN CADA INCREMENTO DE TIEMPO
C ENTRADA DE DATOS

N=TTYIN(4HN =)

TIN=TTYIN(4HTIN ,2H =)

XL=TTYIN(4HXL =,1H)

DX=XL/N

TC=TTYIN(4HTC =,1H)

C PARA ESTE PROGRAMA, DELTA X = DELTA Y

DY=DX

YL=TTYIN(4HYL =,1H)

WRITE(61,99)DX

99 FORMAT(1H ,16 ANCHO DEL INTERVALO =,F7.4)

L=TTYIN(4HL =)

M=YL/DY

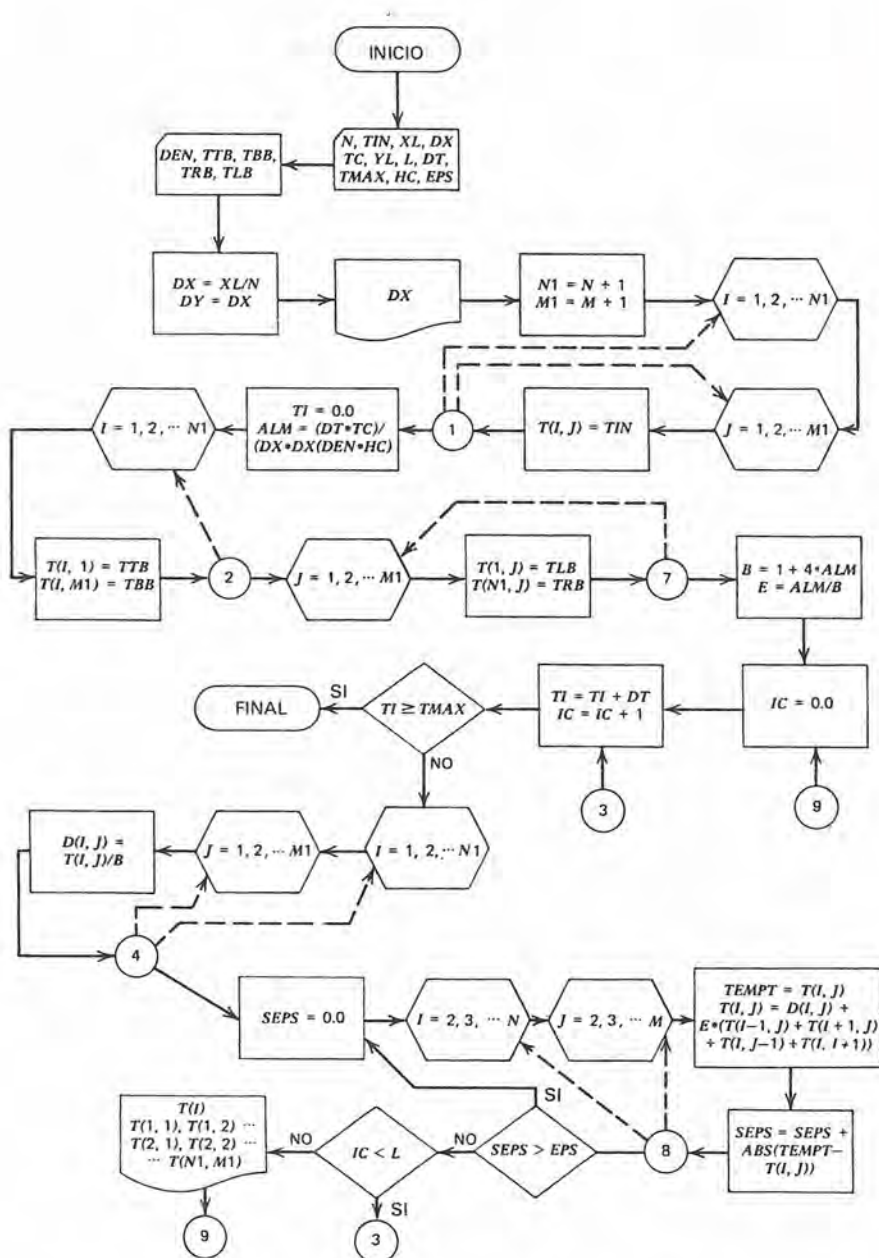
DT=TTYIN(4HDT =,1H)

TMAX=TTYIN(4HTMAX,3H =)

HC=TTYIN(4HHC =,1H)

EPS=TTYIN(4HEPS ,2H =)

DEN=TTYIN(4HDEN ,2H =)



```

TTB=TTYIN(4HTTB ,2H= )
TBB=TTYIN(4HTBB ,2H= )
TRB=TTYIN(4HTRB ,2H= )
TLB=TTYIN(4HTLB ,2H= )
N1=N+1
M1=M+1
C ASIGNA TEMPERATURAS INICIALES
DO 1 I=1,N1
DO 1 J=1,M1
T(I,J)=TIN
1 CONTINUE
ALM=(DT*TC)/(DX*DX*HC*DEN)
TI=0.0
WRITE(61,101)TI
WRITE(61,100)((T(I,J),I=1,N1),J=1,M1)
C FIJA VALORES DE FRONTERA
DO 2 I=1,N1
T(I,1)=TTB
T(I,M1)=TBB
2 CONTINUE
DO 7 J=1,M1
T(1,J)=TLB
T(N1,J)=TRB
7 CONTINUE
C FIJA COEFICIENTES B, E
B=1.0+4.0*ALM
E=ALM/B
9 IC=0.0
3 TI=TI+DT
IC=IC+1
IF(TI.GE.TMAX)GO TO 6
DO 4 I=1,N1
DO 4 J=1,M1
D(I,J)=T(I,J)/B
4 CONTINUE
C INICIA ITERACIONES
5 SEPS=0.0
DO 8 I=2,N
DO 8 J=2,M
TEMPT=T(I,J)
T(I,J)=D(I,J)+E*(T(I-1,J)+T(I+1,J)+T(I,J-1)+T(I,J+1))
8 SEPS=SEPS+ABS(TEMPT-T(I,J))
IF(SEPS.GT.EPS)GO TO 5
IF(IC.LT.L)GO TO 3
WRITE(61,101)TI
WRITE(61,100)((T(I,J),I=1,N1),J=1,M1)
100 FORMAT(1H ,7(2X,F6.2))
101 FORMAT(1H0,6HTIME =,F9.6)

```

GO TO 9
6 END

Se muestran las temperaturas de salida para los nodos límite y para los veinticinco nodos internos a incrementos de tiempo de 0.004 hr para cada uno de los dos casos calculados. No existe una diferencia muy marcada entre los dos casos después de 0.012 hr. de tiempo real; o sea que lo abrupto de los incrementos de tiempo no afecta sensiblemente la salida después de este tiempo.

TIN = 50.0
XL = 0.40
TC = 99.0
YL = 0.40

ANCHO DEL INTERVALO = .0667

L = 2

DT = 0.002

TMAX = 0.018

HC = 0.232

EPS = 0.08

DEN = 109.0

TTB = 0.0

TBB = 0.0

TRB = 0.0

TLB = 200.0

TIEMPO = 0

50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00
50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00
50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00
50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00
50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00
50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00
50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00

TIEMPO = .004000

200.00	0	0	0	0	0	0
200.00	91.01	47.48	27.88	17.23	9.00	0
200.00	120.83	72.07	44.67	27.95	14.49	0
200.00	128.00	79.26	50.01	31.45	16.27	0
200.00	120.82	72.07	44.66	27.94	14.49	0
200.00	91.00	47.48	27.87	17.22	9.00	0
200.00	0	0	0	0	0	0

TIEMPO = .008000

200.00	0	0	0	0	0	0
200.00	93.51	48.91	26.97	14.61	6.50	0
200.00	125.43	75.39	44.26	24.63	11.07	0
200.00	133.40	83.40	50.01	28.11	12.69	0
200.00	125.43	75.38	44.26	24.63	11.07	0
200.00	93.51	48.91	26.96	14.61	6.50	0
200.00	0	0	0	0	0	0

TIEMPO = .012000

200.00	0	0	0	0	0	0
200.00	93.72	49.09	26.93	14.39	6.29	0
200.00	125.81	75.73	44.24	24.29	10.73	0
200.00	133.85	83.82	50.01	27.74	12.32	0
200.00	125.81	75.73	44.24	24.29	10.73	0
200.00	93.72	49.09	26.93	14.38	6.29	0
200.00	0	0	0	0	0	0

TIEMPO = .016000

200.00	0	0	0	0	0	0
200.00	93.73	49.10	26.93	14.36	6.27	0
200.00	125.84	75.76	44.24	24.25	10.70	0
200.00	133.88	83.85	50.01	27.70	12.28	0
200.00	125.84	75.76	44.24	24.25	10.70	0
200.00	93.74	49.10	26.93	14.36	6.27	0
200.00	0	0	0	0	0	0

TIN = 50.0

XL = 0.40

TC = 99.0

YL = 0.40

ANCHO DEL INTERVALO = .0667

L = 10

DT = 0.0004

TMAX = 0.018

HC = 0.232

EPS = 0.05

DEN = 109.0

TTB = 0.0

TBB = 0.0

TRB = 0.0

TLB = 200.0

TIEMPO = 0

50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00
50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00
50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00
50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00
50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00
50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00
50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00

TIEMPO = .004000

200.00	0	0	0	0	0	0
200.00	93.12	48.54	26.99	15.01	6.88	0
200.00	124.74	74.71	44.27	25.30	11.72	0
200.00	132.60	82.61	50.00	28.86	13.43	0

200.00	124.74	74.71	44.27	25.29	11.72	0
200.00	93.12	48.54	26.99	15.01	6.88	0
200.00	0	0	0	0	0	0

TIEMPO = .008000

200.00	0	0	0	0	0	0
200.00	93.72	49.09	26.93	14.38	6.28	0
200.00	125.82	75.73	44.24	24.27	10.72	0
200.00	133.85	83.82	50.00	27.72	12.30	0
200.00	125.82	75.73	44.23	24.27	10.72	0
200.00	93.72	49.09	26.93	14.37	6.28	0
200.00	0	0	0	0	0	0

TIEMPO = .012000

200.00	0	0	0	0	0	0
200.00	93.74	49.10	26.92	14.36	6.26	0
200.00	125.84	75.76	44.23	24.25	10.70	0
200.00	133.88	83.85	50.00	27.69	12.27	0
200.00	125.84	75.76	44.23	24.25	10.70	0
200.00	93.74	49.10	26.92	14.36	6.26	0
200.00	0	0	0	0	0	0

TIEMPO = .016000

200.00	0	0	0	0	0	0
200.00	93.74	49.10	26.92	14.36	6.26	0
200.00	125.85	75.76	44.23	24.24	10.69	0
200.00	133.89	83.85	50.00	27.69	12.27	0
200.00	125.85	75.76	44.23	24.24	10.69	0
200.00	93.74	49.10	26.92	14.36	6.26	0
200.00	0	0	0	0	0	0

La exactitud de la solución se verifica con una comprobación del balance de calor en cada tiempo. Comprobando los valores de la temperatura en 0.016 hr para un incremento de tiempo de 0.0004 hr da los siguientes valores:

$$\sum_{j=1}^5 (T_{0,j} - T_{1,j}) = 426.93$$

$$2 \sum_{i=1}^5 (T_{i,5} - T_{i,6}) + \sum_{j=1}^5 (T_{5,j} - T_{6,j}) = 426.93$$

La comprobación de balance de calor es exacta por lo que respecta al número de cifras significativas usadas en este cálculo.

El último ejemplo fue un caso bidimensional en tanto que los considerados antes fueron para una dimensión espacial. La extensión de los métodos presentados a tres dimensiones es directo.

Al incluir los ejemplos numéricos en ésta y en las secciones anteriores de este capítulo se espera que el lector haya logrado percibir la utilidad y versatilidad de las técnicas numéricas y de las soluciones

de computadora. De ninguna forma fueron o se pretendió que fueran exhaustivos los ejemplos mostrados.

Con gran rapidez y de forma constante se desarrollan técnicas más nuevas y más sofisticadas. Con los antecedentes adquiridos en este y los siguientes capítulos, el lector queda mejor preparado para percibir estos procesos y técnicas más avanzadas.

4.3 CONCLUSION

En este capítulo se consideró extensamente el mecanismo de conducción de transferencia de calor. Se incluyeron muchos problemas de ejemplo para ilustrar la forma de aplicación de los conceptos básicos considerados.

Se consideró la conducción para sistemas uni y multidimensionales con o sin fuente interna de calor. Se vio con bastante detalle la relación a las superficies extendidas. En el caso de conducción en más de una dimensión, se obtuvieron soluciones a problemas típicos por métodos analíticos, gráficos, integrales y numéricos.

Se consideró la conducción transitoria o de estado inestable en aproximadamente el mismo orden que para la conducción de estado estable. Se determinó que el análisis de parámetro de mosaico es bastante exacto para valores del módulo de Biot inferiores a 0.1 para una dimensión. En los casos en que el análisis de parámetro de mosaico no es satisfactorio, se vio que hay una clase de soluciones unidimensionales especialmente versátiles. Las combinaciones de soluciones a la ecuación unidimensional de calor con condiciones inicial y de frontera especiales, presentadas en forma gráfica de lectura fácil, permiten que también se puedan analizar sistemas compuestos bi y tridimensionales. Se dio énfasis a la solución del caso de una pared semi infinita por las técnicas analítica e integral.

Se incluyeron varios problemas de ejemplo en donde se resolvieron situaciones tanto de estado estable como de estado transitorio por medios numéricos. En cada uno de esos casos se presentó y discutió la formulación del problema, se ilustró el diagrama de flujo para la solución con computadora, se proporcionó un listado del programa FORTRAN y se presentó un listado de la salida de la computadora junto con una discusión de las limitaciones y consideraciones especiales necesarias para las técnicas empleadas. Una consecuencia directa de la formulación numérica de la conducción transitoria condujo a dos técnicas de solución gráfica; a estas técnicas se les llama la técnica de graficación de Schmidt y la técnica de la dirección alterante de Saul'ev. También se incluyó algo de discusión acerca de la estabilidad numérica y la exactitud de las soluciones.

Transferencia de calor por convección

En el capítulo 1 se estudiaron algunos de los conceptos fundamentales involucrados en la transferencia de calor por convección; se discutieron muchos de los términos básicos y conceptos. En este capítulo se considera más extensamente el modo convectivo de la transferencia del calor, incluyendo las técnicas para resolver problemas asociados.

En todos los casos de transferencia de calor convectiva, el intercambio de energía ocurre entre una superficie y un fluido adyacente. Por ello debe de comprenderse y describirse adecuadamente la naturaleza del flujo del fluido antes de que pueda resolverse el problema asociado de transferencia de calor.

5.1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES EN LA TRANSFERENCIA CONVECTIVA DE CALOR

5.1-1 Consideraciones sobre el flujo de fluidos

Cuando un fluido fluye sobre una superficie sólida suceden ciertas cosas de interés. Si el cuerpo sólido representa una obstrucción, entonces el fluido debe cambiar su camino de flujo alrededor del cuerpo. Si el flujo es paralelo a una superficie sólida plana, entonces el efecto de la superficie se transmite dentro de cierta distancia en el fluido.

Una característica inicial que se debe tomar en cuenta para la interacción superficie-fluido es si el flujo es interno o externo. Para el *flujo interno* el fluido está limitado a fluir en un paso tal como un tubo circular o un ducto rectangular. Las paredes del paso comprenden la superficie de interés en este caso. En el *flujo externo* el fluido no está confinado, sino que fluye sobre la superficie exterior de

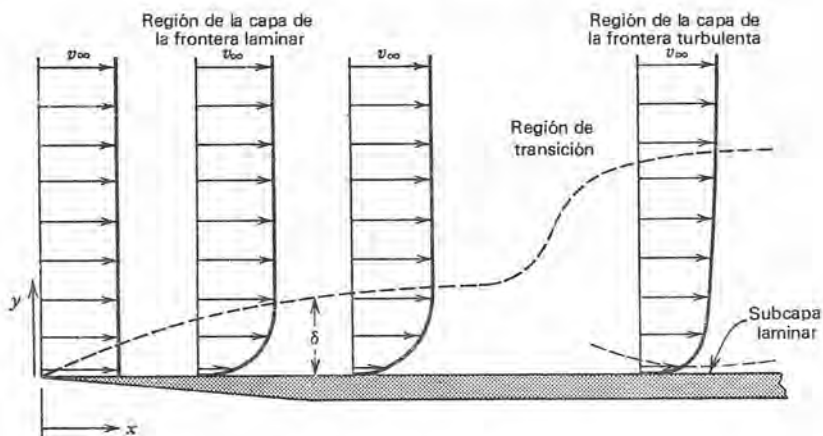


Figura 5.1 Consideraciones de flujo paralelo a una superficie plana.

un cuerpo sólido. El flujo puede ser paralelo a una superficie plana, normal a un cilindro o con cualquier orientación relativa a un sólido de cualquier configuración geométrica.

5.1-1.1 Flujo de capa límite paralelo a una placa plana

Primero considere el caso mostrado en la figura 5.1, que corresponde a flujo estable uniforme en una dirección paralela a una superficie sólida plana.

Se pueden observar los perfiles de la velocidad en el fluido en distintas posiciones a lo largo de la superficie. En la figura, la dirección de las x está a lo largo de la superficie medida desde el *borde de ataque*, o sea el punto de primer contacto; y la dirección de las y es normal a la superficie. La *velocidad de la corriente libre*, designada por u_∞ permanece sin cambio a valores relativamente grandes de y . Sin embargo, para valores menores de y , se ve que la velocidad varía desde un valor igual a cero en la superficie, $y = 0$, a la velocidad de la corriente libre u_∞ en algún valor de y que aumenta para valores mayores de x .

Se llama *capa límite* a la región próxima a la superficie, en donde el gradiente de velocidad dv_x/dy no es cero. La interacción entre el fluido que fluye y la frontera es una función del gradiente de velocidad en la interfase sólido-fluido, $(dv_x/dy)|_{y=0}$. La fuerza por área unitaria de contacto, o esfuerzo cortante, es proporcional al gradiente de velocidad en la superficie, en donde la constante de proporcionalidad es la *viscosidad* del fluido

$$\tau_0 = \mu \left. \frac{dv_x}{dy} \right|_{y=0} \quad (5-1)$$

donde

τ_0 es el esfuerzo cortante en la pared en lb_F/ft^2

$\left. \frac{dv_x}{dy} \right|_{y=0}$ es el gradiente de velocidad en la pared en seg^{-1}

y

μ es la viscosidad en $\text{lb}_F \text{seg}/\text{ft}^2$ ó $\text{lb}_m/\text{seg-ft}$

Es obvia la similitud entre la ecuación (5-1) para el flujo de fluido y la ecuación (1-1) para la transferencia de calor. Las cantidades análogas entre las dos expresiones son el esfuerzo cortante y el flujo de calor; el gradiente de velocidad y el gradiente de temperatura; y la viscosidad y la conductividad térmica. Ambas ecuaciones representan una cantidad de transferencia (τ_0 ó q/A) en función de una fuerza motriz (dv_x/dy ó dT/dy) y una propiedad de transporte (μ ó k) para el caso en el que la transferencia se hace por medios moleculares. En el capítulo 1 se estudió la naturaleza de la transferencia de calor por conducción por medio de la interacción molecular.

En un fluido, a velocidades relativamente bajas, hay un efecto claro como de capas en el cual las capas (láminas) de partículas de fluido se mueven entre sí con intercambio entre capas adyacentes solamente a nivel molecular. A este flujo muy ordenado y predecible se le llama *laminar* y se describe por medio de la ecuación (5-1). Ya que no hay movimiento de volumen de las partículas entre las capas de fluido, la transferencia de la energía también debe ser por medios moleculares; en consecuencia, en el flujo laminar, la transferencia de calor normal a la dirección de flujo es por conducción y se describe por la ecuación de la razón de Fourier, ecuación (1-1).

Al aumentar la velocidad del fluido también aumenta la tendencia del transporte volumétrico de las partículas del fluido entre las capas. Para todos los casos de flujo, hay una velocidad por encima de la cual hay movimiento significativo de partículas de fluido en la dirección normal a la del flujo volumétrico. Este movimiento, llamado turbulento, está caracterizado por un comportamiento muy irregular y caótico del fluido. En el flujo *turbulento* el movimiento del fluido en dirección normal a una frontera sólida provoca un aumento considerable en la razón de transferencia de calor cuando la superficie y el fluido están a distintas temperaturas.

Regresando a la figura 5.1. La línea punteada divide la región próxima a la superficie donde los gradientes de velocidad son distintos a cero (la capa límite) de la región exterior a la capa límite en donde el perfil de la velocidad no está afectado por la presencia de la

frontera sólida (la corriente libre). En la figura se ha exagerado considerablemente el espesor de la capa límite para tener mayor claridad. Observe que el espesor de la capa límite es igual a cero en el borde de ataque y aumenta regularmente conforme crece x . Dentro de la capa límite, cerca del borde de ataque, el perfil de la velocidad es una función suave de y con $0 < v_x < v_\infty$ para $0 < y < \delta$, en donde δ representa el espesor de la capa límite. El flujo en la capa límite siempre es laminar cerca del borde de ataque, sin importar la clase del flujo en la corriente libre.

Se observa que el espesor de la capa límite aumenta muy notablemente en algún valor de x a lo largo de la superficie, y luego sigue aumentando en forma regular para valores mayores de x , lo que se debe a un cambio en la clase de flujo dentro de la capa límite, de laminar a turbulento. En una capa límite turbulenta, el perfil de la velocidad es relativamente plano para todos excepto para valores muy pequeños de y . Se considera que en la vecindad próxima a la superficie, el flujo todavía es laminar. Las ecuaciones (5-1) y (1-1) se aplican dentro de esta muy delgada capa, designada *subcapa laminar*; incluso aunque el flujo de la capa límite es principalmente turbulento, la transferencia de calor en la superficie es por conducción, en donde todavía se aplica la ecuación (1-1). En consecuencia, la transferencia de calor por conducción todavía representa una consideración significativa (de hecho, de control) aunque se llama convección al modo de transferencia de calor.

Para el caso ilustrado en la figura 5.1, hay tres regiones distinguibles y muy claras del flujo de capas límites. En este caso, la cantidad significativa es el número de Reynolds, que se representa por Re . Para el caso mostrado, el número de Reynolds se define como

$$Re_x \equiv \frac{xv_\infty\rho}{\mu} = \frac{xv_\infty}{\nu} \quad (5-2)$$

en donde x y v_∞ tienen los significados que ya se describieron y ρ y μ son la densidad y la viscosidad del fluido respectivamente. Se ve que el símbolo ν es igual a la razón μ/ρ y se denomina la *viscosidad cinemática*, o la *difusividad molecular del impulso*. Se ve que el número de Reynolds es adimensional. Las regiones del flujo de capa límite y el rango de Re_x para cada uno son como sigue:

- | | |
|--|---|
| (a) $0 < Re_x < 2 \times 10^5$ | el flujo en la capa límite es laminar |
| (b) $2 \times 10^5 < Re_x < 3 \times 10^6$ | el flujo de la capa límite puede ser laminar o turbulento |
| (c) $3 \times 10^6 < Re_x$ | el flujo de la capa límite es turbulento. |

Físicamente, se puede considerar al número de Reynolds como la razón de las fuerzas de inercia a las fuerzas viscosas. A valores pe-

queños de Re , predominan las fuerzas viscosas y el flujo es regular o laminar. A altos valores de Re predominan las fuerzas de inercia, con lo que destaca el flujo turbulento. A valores intermedios de Re , puede fluctuar el flujo, a veces en forma laminar y a veces turbulento, con forme fluctúa la dominancia de las fuerzas viscosas y de inercia.

5.1-1.2 Flujo externo sobre cuerpos romos

En el estudio anterior relativo al flujo externo, la velocidad de corriente libre iba paralela a la superficie plana en cuestión. Es obvio que las condiciones del flujo cambiarían si se dirigiera la corriente libre hacia, o con algún ángulo oblicuo a, la superficie. Ahora las consideraciones son para los casos en los cuáles el cuerpo junto al cual fluye el fluido es romo y el flujo externo asociado es muy irregular.

Como una consideración inicial se estudia un cilindro cuyo eje está orientado normal al flujo de corriente libre, como se muestra en la figura 5.2. Se muestra la estructura de líneas de corriente para distintos valores del número de Reynolds, definido en la forma

$$Re_D \equiv \frac{Dv_{\infty}\rho}{\mu} = \frac{Dv_{\infty}}{\nu} \quad (5-3)$$

en forma similar al número de Reynolds para un flujo en placa plana, excepto por que en este caso la longitud significativa es el diámetro del cilindro.

Se llama *punto delantero de estancamiento* al punto más adelante en el cilindro; a 180° , en la parte posterior del cilindro, está el *punto posterior o trasero de estancamiento*. Estos puntos son localizaciones en la superficie en donde el flujo de corriente libre adyacente tangente a la superficie es teóricamente cero. Por ejemplo, en el punto delantero de estancamiento, se ha convertido en presión toda la energía cinética de las partículas del fluido en la línea de corriente de estancamiento. Esta *presión de estancamiento* incluye tanto componentes de presión estática como de presión de velocidad.

Para las líneas de corriente que se conforman a la forma del cilindro, la presión y la velocidad de la corriente libre son funciones que varían en forma continua y suave del ángulo θ . Para $0 < \theta < 90^\circ$, la presión decrece y v_{∞} aumenta a valores mínimos y máximos, respectivamente, a $\theta = 90^\circ$. Para $90^\circ < \theta < 180^\circ$, la presión aumenta y disminuye la velocidad de la corriente libre y nuevamente se llega a la condición de estancamiento en $\theta = 180^\circ$. En la figura 5.2(a) se muestra el caso de líneas de corriente completamente adheridas. Este caso sólo ocurre con valores muy pequeños de Re_D , que se llama muy apropiadamente "flujo fluente".

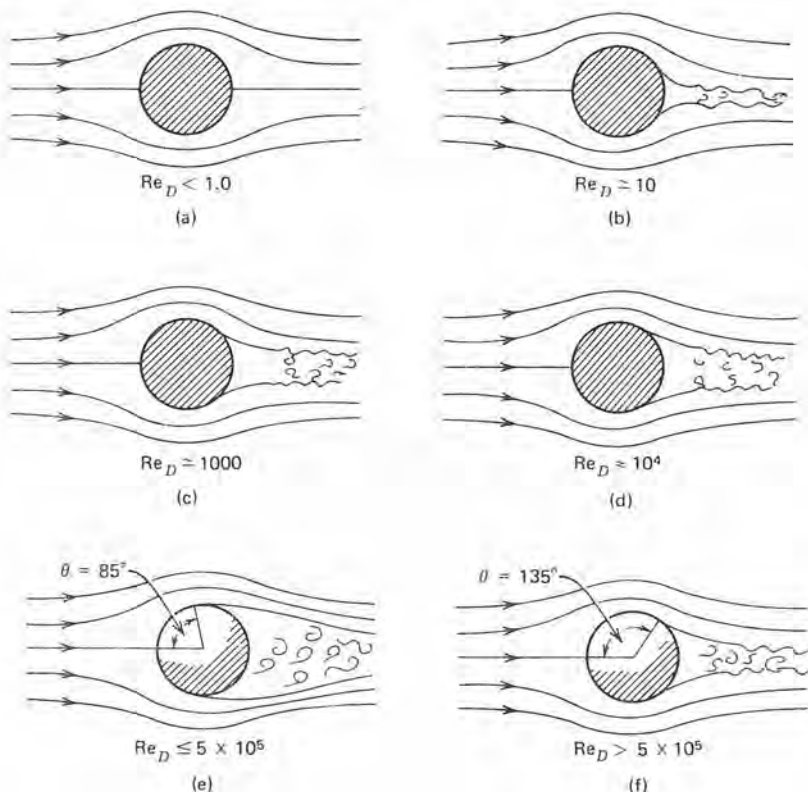


Figura 5.2 Flujo aerodinámico sobre un cilindro orientado normal a v_∞ .

Cuando Re_D aumenta por encima del valor para el flujo fluyente, ocurre el fenómeno de *separación de capas límite*.

Las líneas de corriente cercanas a la superficie de un cuerpo como comienzan a “separarse” de la superficie cerca del punto trasero de estancamiento, en la forma mostrada en la figura 5.2(b). Al aumentar el número de Reynolds, el punto de separación se aleja hacia adelante, o sea que la parte que permanece fija es laminar. El flujo detrás del punto de separación es muy caótico y turbulento. A esta región se le llama la *estela turbulenta*.

Para valores de Re_D hasta casi de 5×10^5 , el punto de separación se mueve hacia adelante conforme aumenta Re_D , y el flujo de capa límite es laminar. En $Re_D \approx 5 \times 10^5$, el punto de separación está en su posición más delantera, $\theta \approx 85^\circ$. Para valores mayores de Re_D , el flujo en la parte adherida de la capa límite es parcialmente turbulento y el punto de separación se mueve hacia atrás. En la transición, el valor de θ cambia en forma relativamente súbita desde 85° a 135° . En e) y

de la figura 5.2 se muestran las estructuras de las líneas de corriente para valores de Re_D por arriba y por debajo del punto de transición. En condiciones de flujo con Re_D por arriba del valor de transición, nuevamente el punto de separación se mueve relativamente lento hacia adelante.

Parte de la consideración total del flujo junto a cuerpos romos y la separación de la capa límite, es la fuerza que se necesita para mantener en su lugar al cuerpo romo bajo condiciones distintas de flujo. Las fuerzas de arrastre debidas a los efectos del fluido están agrupadas en dos categorías generales: *arrastre viscoso* y *arrastre de presión o de forma*.

El arrastre viscoso es el que se debe exclusivamente a la naturaleza viscosa del fluido que fluye junto al cuerpo. Este es el efecto que está presente en una capa límite adherida.

Siempre que ocurre la separación de la capa límite sucede el arrastre de presión o de forma. El arrastre de presión es la consecuencia de presiones desiguales en las partes anterior y posterior de un cuerpo romo. Generalmente, los efectos viscosos son despreciables comparados con los efectos de presión cuando existen ambos.

Estos efectos se expresan cuantitativamente en términos de dos coeficientes, definidos en la forma

$$C_f \equiv \frac{F_d/A_{\text{contacto}}}{\rho v_{\infty}^2/2} \quad (5-4)$$

$$C_D \equiv \frac{F_d/A_{\text{proy}}}{\rho v_{\infty}^2/2} \quad (5-5)$$

en donde C_f es el *coeficiente de arrastre friccional* o el *coeficiente de fricción superficial* (adimensionales)

C_D es el *coeficiente de arrastre* (adimensional)

F_d es la fuerza de arrastre

A_{contacto} es el área de contacto entre la superficie y el fluido

A_{proy} es el área proyectada del cuerpo romo normal a la dirección del flujo

$\frac{\rho v_{\infty}^2}{2}$ es la energía cinética del fluido a la velocidad de la corriente libre v_{∞}

Son claras las diferencias que existen en C_f y C_D , tanto en la condición que describen como en las ecuaciones que las definen. Se puede determinar analíticamente el coeficiente de fricción superficial si se conoce el perfil de la velocidad, de acuerdo con la expresión

$$C_f = \frac{F_d/A_{\text{contacto}}}{\rho v_\infty^2/2} = \frac{1}{\rho v_\infty^2/2} \left(\mu \left. \frac{dv_\infty}{dy} \right|_{y=0} \right) \quad (5-6)$$

en donde $(dv_\infty/dy)|_{y=0}$ es el gradiente de la velocidad en la interfase fluido-sólido.

Por otra parte, el coeficiente de arrastre está asociado con un caso de flujo no muy fácil de analizar. Es necesario hacer la evaluación empírica de C_D . Las figuras 5.3 y 5.4 son representativas de las grandes cantidades de datos experimentales para el flujo sobre cilindros, placas planas, discos y esferas. Ambas figuras muestran el coeficiente de arrastre en función de Re_D .

Tanto para los cilindros como para las esferas hay una disminución repentina y perceptible en C_D cerca del valor para Re_D igual a 5×10^5 , que es el caso de transición de flujo de capa límite de laminar a turbulento y el movimiento asociado hacia atrás del punto de separación.

5.1-1.3 Flujo interno

Hasta ahora se han estado considerando los casos de flujo externo. En la figura 5.5 se muestran los perfiles de velocidades y el espesor de la capa límite para un caso de *flujo interno*, o sea el flujo en un conducto circular, como un tubo. El flujo de capas límite de (a) y (b) de esta figura es laminar y el crecimiento de la capa límite es regular cerca de la entrada. Al aumentar el valor de x , la capa límite crece

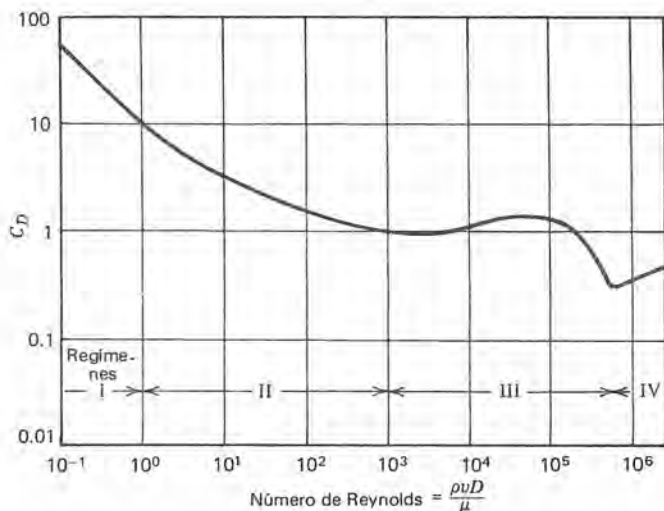


Figura 5.3 Coeficiente de arrastre contra Re_D para el flujo sobre cilindros.

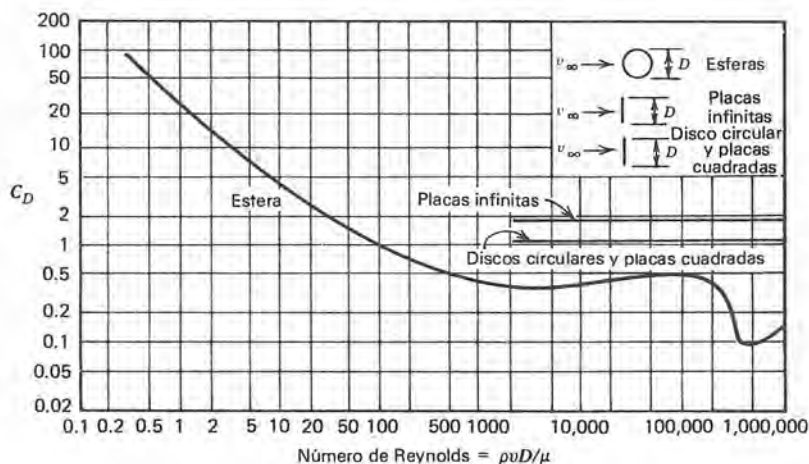


Figura 5.4 Coeficiente de arrastre contra Re_D para el flujo sobre esferas, placas planas y discos.

para incluir una parte cada vez más creciente de la sección transversal del flujo. En cada caso se llega al punto en que la capa límite “llena” toda la sección transversal del tubo, o —considerándolo en forma ligeramente distinta— los efectos de la pared, manifestados por la viscosidad del fluido se sienten en toda la sección transversal.

Para valores de x mayores que los correspondientes en donde se encuentran la capa límite, los perfiles de velocidad no siguen cambiando a lo largo del camino de flujo. Esta es la región del *flujo*

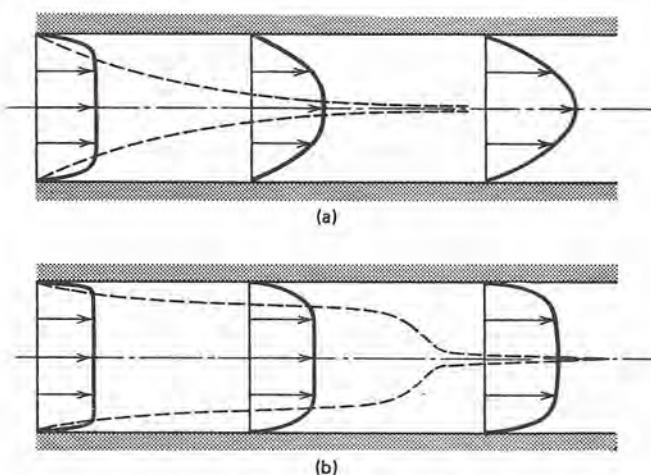


Figura 5.5 Perfiles de velocidad y crecimiento de la capa límite en un conducto circular.

totalmente desarrollado; y para este caso se puede escribir $dv_x/dx = 0$. El perfil de velocidad se sigue desarrollando para valores menores de x ; a esta región se le llama la *región de entrada*. El valor de x al que se desarrolla completamente este flujo se le llama *la longitud de entrada*. La figura 5.5 (a) y (b) muestra los perfiles de velocidad y el crecimiento de capa límite para los casos en que el flujo totalmente desarrollado es laminar y turbulento, respectivamente.

Una vez más, el número de Reynolds es el criterio a seguir para saber si el flujo de conducto totalmente desarrollado es laminar o turbulento. Sin embargo, para el flujo de conducto, la forma correspondiente del número de Reynolds es

$$\text{Re}_D \equiv \frac{Dv_{\text{prom}}\rho}{\mu} = \frac{Dv_{\text{prom}}}{\nu} \quad (5-7)$$

que es muy semejante al número de Reynolds considerado para el flujo paralelo a una superficie plana, dado por la ecuación (5-2), excepto por que el parámetro de longitud es el diámetro del conducto en este caso.

Para el flujo de conducto, el flujo es laminar en los casos de Re_D inferior a 2300. Con valores mayores este, el flujo puede ser laminar o turbulento, y la probabilidad del flujo turbulento aumenta conforme aumenta Re_D . A valores de Re_D iguales o mayores a 10,000, se puede suponer sin mucho error que el flujo es turbulento. Por debajo del valor de 2300 para Re_D , las fuerzas dominantes son las viscosas, y cualquier perturbación en el flujo, tal como las originadas por las salientes en las paredes del tubo, se amortiguan por efecto de las fuerzas viscosas. A grandes valores de Re_D , las fuerzas de inercia predominan por sobre las viscosas, y se espera que el flujo sea aleatorio, caótico y turbulento.

Cuantitativamente, la fuerza de interacción entre las paredes de un conducto y un fluido que fluye se expresa mediante

$$\frac{\Delta P}{\rho} = 2f_f \frac{L}{D} v_{\text{prom}}^2 \quad (5-8)$$

en donde

ΔP es el cambio en la presión como resultado de los efectos viscosos en un paso de flujo de longitud L y diámetro D

ρ es la densidad del fluido

v_{prom} es la velocidad promedio del fluido

f_f es el *factor de fricción de Fanning* (adimensional)

Específicamente, la ecuación (5-8) es una definición del factor de fricción de Fanning. Este término equivale al coeficiente de fricción

superficial mencionado en la sección anterior. En la figura 5.6 se muestra el factor de fricción de Fanning en función del número de Reynolds.

En esta figura se muestran las regiones del flujo laminar, de transición y completamente turbulento. En el flujo laminar basta una sola línea para relacionar f_f con Re_D . Sin embargo, para los regímenes de transición y flujo totalmente turbulento, f_f es una función tanto de Re_D como la de la *rugosidad relativa* e/D . La rugosidad relativa es una razón de la altitud media e de las salientes sobre la pared del conducto, al diámetro D del conducto. En la figura 5.7 se muestran valores de e/D para algunos materiales de construcción comunes.

En la región de transición, f_f varía con Re_D y e/D , el valor mínimo a cualquier número de Reynolds que corresponde a un tubo hidráulicamente liso. En el rango totalmente turbulento, a grandes valores de Re_D , la rugosidad del tubo es el único parámetro que determina f_f . El mínimo de f_f en un número de Reynolds en este rango corresponde a un tubo hidráulicamente liso.

5.1-1.4 Ecuaciones de la capa límite hidrodinámica.

Las ecuaciones aplicables en una capa límite laminar para el caso de flujo externo incompresible de un fluido paralelo a una placa plana son las formas de las componentes en x y y de la ecuación de Navier -

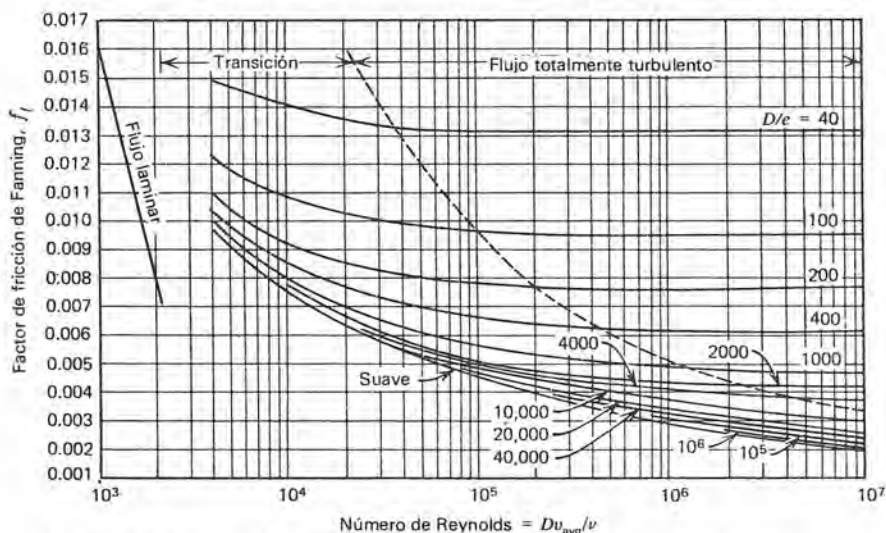


Figura 5.6 Factor de fricción de Fanning contra Re_D para flujo interno.

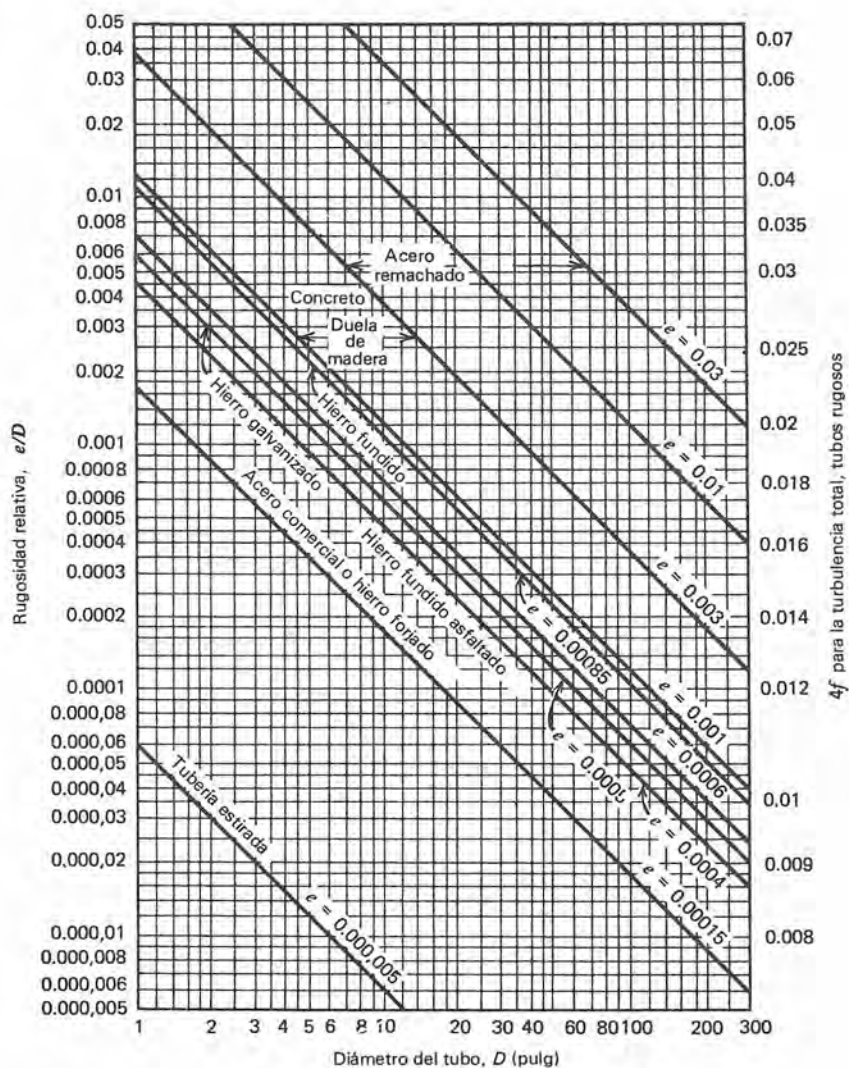


Figura 5.7 Rugosidad relativa de los conductos para distintos materiales.

Stokes, dada en forma vectorial por la ecuación (2-66). Las ecuaciones escalares apropiadas son

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \quad (5-9)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \quad (5-10)$$

En una capa límite de espesor comparable a un papel muy delgado, se pueden hacer algunas simplificaciones de orden de magnitud. La base para estas simplificaciones son las suposiciones de que, dentro de la capa límite,

$$v_x \gg v_y \quad (5-11)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \gg \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (5-12)$$

En base de las magnitudes relativas de v_x y v_y expresadas en la ecuación (5-11), se observa que todos los términos que involucran velocidades en la ecuación (5-10) son muy pequeños comparados con los correspondientes en la ecuación (5-9). Entonces, en base al orden de magnitud, se pueden despreciar los términos de la velocidad en la ecuación (5-10), con lo que queda

$$0 = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} \quad (5-13)$$

y, con efectos gravitacionales despreciables, se puede escribir

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (5-14)$$

Este es un resultado significativo por cuanto se determina ahora completamente la presión por los efectos en la corriente libre.

Ahora se puede escribir la ecuación (5-9) en forma simplificada, incorporando las ecuaciones (5-12) y (5-14) y despreciando la gravedad, para dar

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = - \frac{dP}{dx} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (5-15)$$

En la corriente libre, bajo condiciones de efectos gravitacionales despreciables, la presión y velocidad están relacionadas por la ecuación de Bernoulli, que permite escribir

$$-\frac{dP}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{v_{\infty}^2}{2}\right) = -v_{\infty} \frac{dv_{\infty}}{dx} \quad (5-16)$$

Haciendo esta sustitución, se puede describir la ecuación (5-15) en la forma

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = -v_{\infty} \frac{dv_{\infty}}{dx} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (5-17)$$

A la ecuación (5-17), junto con la forma bidimensional incompresible de la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (5-18)$$

se les conoce como *ecuaciones de la capa límite*.

5.1-1.5 La capa límite laminar e incompresible en una placa plana; solución de Blasius

Las ecuaciones de capa límite para el flujo estable, constante de corriente libre paralela a una superficie plana se reducen a

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (5-19)$$

y

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (5-20)$$

en donde las condiciones de frontera aplicables son

$$v_x = v_y = 0 \quad \text{en } y = 0 \quad (5-21)$$

$$v_x = v_{\infty} \quad \text{en } y = \infty \quad (5-22)$$

y

$$v_x = v_{\infty} \quad \text{en } x = 0 \quad (5-23)$$

Varios investigadores han obtenido en distintas formas la solución a las ecuaciones (5-19) y (5-20) que satisface estas condiciones de frontera. Blasius¹ obtuvo la solución original, por lo que al resultado general se le llama la solución de Blasius.

¹H. Blasius, "Grenzschichten in Flüssigkeiten mit Kleiner Reibung, 2," *Math. u. Phys.* 56 (1908): 1. NACA Tech. Memo. Hay una traducción al inglés en el No. 1256

Primeramente es necesario usar la función corriente ψ definida de acuerdo con

$$v_x \equiv \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v_y \equiv -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5-24)$$

que automáticamente satisface la continuidad, ecuación (5-20). Entonces, se puede reducir el conjunto de ecuaciones diferenciales a una sola ecuación que, escrita en función de ψ es

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (5-25)$$

El siguiente paso es la transformación de las variables x , y y ψ en forma tal que esta ecuación diferencial parcial se convierta en una ecuación diferencial ordinaria. Los parámetros involucrados en esta transformación son

$$\eta \equiv y \left(\frac{v_\infty}{\nu x} \right)^{1/2} \quad (5-26)$$

y

$$f(\eta) \equiv \psi / (\nu x v_\infty)^{1/2} \quad (5-27)$$

Introducir f y η en la ecuación (5-25) da por resultado la ecuación diferencial ordinaria

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0 \quad (5-28)$$

con condiciones de frontera

$$\begin{aligned} f(0) = f'(0) &= 0 \\ f'(\infty) &= 1 \end{aligned}$$

En la literatura especializada se pueden encontrar varios enfoques para la solución de la ecuación (5-28). Se pueden consultar las obras de Schlichting,² Howarth,³ Goldstein,⁴ y Kays⁵ donde hay ejemplos con distintos enfoques. Aquí solamente se presta atención a los resultados tabulados en la tabla 5.1. Estos valores numéricos específicos corresponden a Howarth.

² H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*, 4. ed. (Nueva York: McGraw-Hill, 1960), pág. 117.

³ L. Howarth, "On the Solution of the laminar boundary layer equations," *Proc. Roy. Soc. London*, A164 (1938): 547.

⁴ S. Goldstein, *Modern Developments in Fluid Dynamics*, (Londres: Oxford Univ. Press, 1938), pág. 135.

⁵ W. M. Kays, *Convective Heat and Mass Transfer*, (Nueva York: McGraw-Hill, 1966), pág. 83.

Tabla 5.1 Valores de f , f' y f'' para la capa límite a lo largo de una placa plana

η	f	f'	f''
0	0	0	0.3321
0.4	0.0266	0.133	0.3315
0.8	0.1061	0.265	
1.2	0.238	0.394	
1.6	0.420	0.517	
2.0	0.650	0.630	
2.4	0.922	0.729	
2.8	1.23	0.812	
3.2	1.57	0.876	
3.6	1.93	0.923	
4.0	2.31	0.956	
5.0	3.28	0.992	
6.0	4.28	0.999	
7.0	5.28	0.9999	
8.0	6.28	1.0000	

Los siguientes resultados son de gran interés:

- a) Normalmente se considera el espesor δ de la capa límite en donde $v_x/v_\infty = 0.99$. Un valor aceptado de η en este caso es 5.0; por tanto, en forma de ecuación

$$\delta = y|_{\eta=5.0} = 5.0 \sqrt{\frac{\nu x}{v_\infty}} \quad (5-29)$$

o

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5.0}{\sqrt{\frac{x v_\infty}{\nu}}} = 5.0 \operatorname{Re}_x^{-1/2} \quad (5-30)$$

De acuerdo con la ecuación (5-29) ó (5-30), el espesor de la capa límite es proporcional a $x^{1/2}$.

- b) El coeficiente local de la fricción superficial está relacionado con el gradiente de la velocidad en la superficie, de acuerdo con

$$C_{fx} \equiv \frac{\tau}{\frac{\rho v_\infty^2}{2}} = \frac{\mu \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0}}{\frac{\rho v_\infty^2}{2}} \quad (5-31)$$

y se puede encontrar $\partial v_x / \partial y|_{y=0}$ de la solución de Blasius en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0} &= \frac{\partial}{\partial y} v_\infty f'(0) \\
 &= v_\infty \frac{d}{d\eta} f'(0) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
 &= v_\infty f''(0) \left(\frac{v_\infty}{\nu x} \right)^{1/2} \\
 &= 0.332 v_\infty \left(\frac{v_\infty}{\nu x} \right)^{1/2} \quad (5-32)
 \end{aligned}$$

Realizando la sustitución adecuada en la ecuación (5-31), se obtiene

$$\begin{aligned}
 C_{fx} &= \frac{0.332 \mu v_\infty \left(\frac{v_\infty}{\nu x} \right)^{1/2}}{\frac{\rho v_\infty^2}{2}} \\
 &= 0.664 \left(\frac{\nu}{x v_\infty} \right)^{1/2} = 0.664 \operatorname{Re}_x^{-1/2} \quad (5-33)
 \end{aligned}$$

Se ve que el coeficiente local de fricción superficial varía en razón inversa con la raíz cuadrada del número local de Reynolds.

c) Se define el coeficiente medio de fricción superficial en la forma

$$C_{fL} = \frac{\frac{F_d}{A}}{\frac{\rho v_\infty^2}{2}}$$

en donde F_d es la fuerza total de arrastre viscoso impuesta en una superficie plana de área A . Los coeficientes medio y local están relacionados expresando la fuerza de arrastre en términos de ambos, de acuerdo con

$$F_d = C_{fL} A \frac{\rho v_\infty^2}{2} = \int_A C_{fx} \frac{\rho v_\infty^2}{2} dA \quad (5-34)$$

Cancelando términos semejantes, se puede despejar C_{fL} para obtener

$$C_{fL} = \frac{1}{A} \int_A C_{fx} dA \quad (5-35)$$

que, para una placa de ancho constante y longitud L queda

$$C_{fL} = \frac{1}{L} \int_0^L C_{fx} dx \quad (5-36)$$

Sustituyendo la expresión para C_{fx} dada por la ecuación (5-33), se tiene, para el coeficiente medio para la capa límite laminar a lo largo de una placa plana con v_∞ constante,

$$\begin{aligned} C_{fL} &= \frac{0.664}{L} \sqrt{\frac{\nu}{v_\infty}} \int_0^L x^{-1/2} dx \\ &= 1.328 \sqrt{\frac{\nu}{Lv_\infty}} = 1.328 \text{Re}_L^{-1/2} \end{aligned} \quad (5-37)$$

5.1-1.6 Análisis integral de la capa límite hidrodinámica

En la sección anterior se obtuvo una solución "exacta" para el caso de una capa límite laminar a lo largo de una placa plana con velocidad constante de corriente libre. En un caso físico con flujo o geometría de naturaleza más compleja, la solución analítica es considerablemente difícil, o del todo imposible. En tales casos se debe obtener información útil por medio de métodos aproximados. En este sentido es útil el enfoque integral presentado en la sección 2.1-2.

Las ecuaciones (2-21) y (2-28), que se repiten a continuación para referencia, son las relaciones integrales dominantes.

Conservación de la masa

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = 0 \quad (2-21)$$

Segunda ley de Newton

$$\sum \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \mathbf{v} \rho dV + \int_{cs} \mathbf{v} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA \quad (2-28)$$

Estas ecuaciones se aplican al volumen de control mostrado en la figura 5.8. En la figura, el ancho del volumen de control es Δx y su altura es Y , en donde la restricción en Y es que debe ser mayor que el espesor δ de la capa límite. El eje de las x es tangente a la superficie sólida en la esquina izquierda interior del volumen de control; el eje de las y es normal a la superficie sólida en el punto de tangencia.

La expresión integral para la conservación de la masa aplicada a este volumen de control da lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV &= 0 \quad (\text{flujo estable}) \\ \int_{cs} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA &= \int_0^Y \rho v_x dy|_{x+\Delta x} - \int_0^Y \rho v_x dy|_x - \dot{m}|_{\text{top}} \Delta x \end{aligned}$$

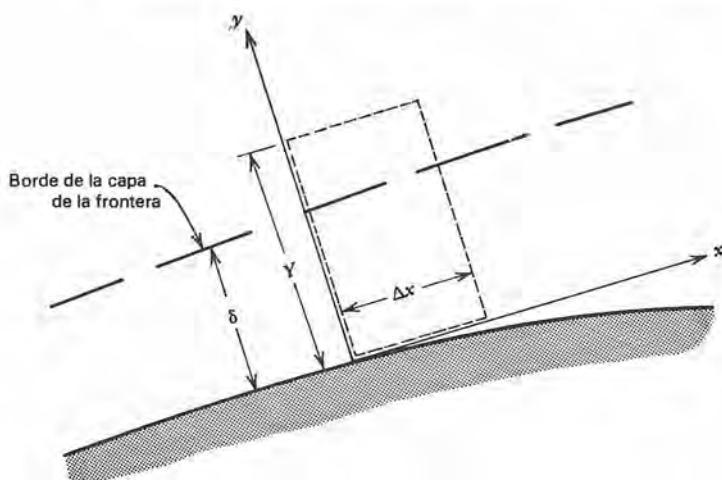


Figura 5.8 Volumen de control para el análisis integral de la capa límite hidrodinámica.

Igualando esta suma a cero, según lo exige la ecuación (2-21), y dividiendo entre Δx , se tiene

$$\frac{\int_0^Y \rho v_x dy|_{x+\Delta x} - \int_0^Y \rho v_x dy|_x}{\Delta x} - \dot{m}|_{\text{superior}} = 0$$

En el límite, conforme $\Delta x \rightarrow 0$, se puede escribir la razón de flujo de masa a través de la parte superior de la superficie de control en la forma

$$\dot{m}|_{\text{superior}} = \frac{d}{dx} \int_0^Y \rho v_x dy \quad (5-38)$$

Luego se evalúan los flujos de impulso para este volumen de control. La ecuación (2-28) es la relación dominante. Evaluando cada término de la ecuación (2-28), se tiene, en la dirección de las x ,

$$\begin{aligned} \sum F_x &= -\tau_{yx} \Delta x + \int_0^Y P dy|_x - \int_0^Y P dy|_{x+\Delta x} \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} v_x \rho dv &= 0 \quad (\text{flujo estable}) \\ \int_{cs} v_x \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA &= \int_0^Y \rho v_x^2 dy|_{x+\Delta x} - \int_0^Y \rho v_x^2 dy|_x - v_\infty \Delta x \dot{m}|_{\text{superior}} \end{aligned}$$

La expresión aplicable para el impulso en el flujo estable se logra cuando se relacionan entre sí los términos en la forma indicada por la

ecuación (2-28). Haciendo esta sustitución, e introduciendo la ecuación (5-38) para la razón de flujo de masa a través de la parte superior del volumen de control se tiene

$$\begin{aligned} -\tau_{yx} \Delta x + \int_0^Y P dy|_x - \int_0^Y P dy|_{x+\Delta x} \\ = \int_0^Y \rho v_x^2 dy|_{x+\Delta x} - \int_0^Y \rho v_x^2 dy|_x - v_\infty \Delta x \frac{d}{dx} \int_0^Y \rho v_x dy \end{aligned}$$

Luego se divide entre Δx y se evalúa en el límite conforme $\Delta x \rightarrow 0$ para obtener

$$-\tau_{yx} - \frac{d}{dx} \int_0^Y P dy = \frac{d}{dx} \int_0^Y \rho v_x^2 dy - v_\infty \frac{d}{dx} \int_0^Y \rho v_x dy \quad (5-39)$$

Conservando la suposición anterior con relación a la capa límite, de que $P \neq P(y)$, se puede describir el término de la presión en la ecuación (5-39), con lo que se obtiene

$$-\tau_{yx} - Y \frac{dP}{dx} = \frac{d}{dx} \int_0^Y \rho v_x^2 dy - v_\infty \frac{d}{dx} \int_0^Y \rho v_x dy$$

El gradiente de presión dP/dx está relacionado a la velocidad de la corriente libre de acuerdo con la ecuación de Bernoulli. Remplazando dP/dx por $-\rho v_\infty (dv_\infty/dx)$ y combinando los dos términos integrales, finalmente se tiene, para la expresión integral del impulso,

$$\tau_{yx} - Y v_\infty \rho \frac{dv_\infty}{dx} = \frac{d}{dx} \int_0^Y \rho v_x (v_\infty - v_x) dy \quad (5-40)$$

Generalmente se llama expresión integral del impulso de von Kàrmàn a la ecuación (5-40). Todo análisis que use esta ecuación requiere que se conozca el perfil de la velocidad $v_x(y)$ antes de poder evaluar el término integral. Desde el principio se debe suponer el perfil de la velocidad en la forma más razonable posible. La exactitud del resultado final depende directamente de la proximidad con que el perfil supuesto de la velocidad se compara con el real.

En el ejemplo 5.1 se ilustra el uso de la ecuación (5-40).

Ejemplo 5.1

Evaluar el espesor de la capa límite y los coeficientes local y medio de la fricción superficial para el caso de una capa límite laminar en una placa plana. Se puede suponer que el perfil de velocidad es una parábola cúbica dentro de la capa límite y uniforme fuera de la capa límite.

Primeramente se debe obtener una expresión para $v_x(y)$. De acuerdo con la información dada, el perfil de la velocidad es de la forma

$$v_x(y) = \begin{cases} a + by + cy^2 + dy^3 & 0 < y < \delta \\ v_\infty \text{ (constante)} & \delta < y \end{cases} \quad (5-41)$$

Se pueden evaluar las constantes a , b , c y d por medio de las siguientes condiciones de frontera en la velocidad:

- (1) $v_x = 0$ en $y = 0$ (no hay deslizamiento en la pared)
- (2) $v_x = v_\infty$ en $y = \delta$ (por definición de δ)
- (3) $\frac{dv_x}{dy} = 0$ en $y = \delta$ (por continuidad de la pendiente del perfil de velocidad)
- (4) $\frac{d^2v_x}{dy^2} = 0$ en $y = 0$ (requerido por la 2a. ley de Newton; ver la ecuación (5-19))

Aplicando cada una de estas condiciones de frontera, las constantes en la ecuación (5-41) quedan

$$a = 0 \quad b = \frac{3}{2\delta} v_\infty \quad c = 0 \quad d = -\frac{v_\infty}{2\delta^3}$$

y la expresión para el perfil de la velocidad queda como

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \quad 0 \leq y \leq \delta \quad (5-42)$$

$$\frac{v_x}{v_\infty} = 1 \quad \delta \leq y \quad (5-43)$$

También se puede escribir $dv_\infty/dx = 0$ para el caso descrito, el de velocidad constante de corriente libre.

Con las sustituciones adecuadas, se puede escribir la ecuación (5-40) para este caso en la forma

$$\frac{3}{2} \frac{\mu v_\infty}{\rho \delta} = \frac{d}{dx} \int_0^\delta v_\infty^2 \left[\frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right] \left[1 - \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right] dy$$

que, después de la integración, queda

$$\frac{3}{2} \nu \frac{v_\infty}{\delta} = \frac{39}{280} \frac{d}{dx} (v_\infty^2 \delta)$$

Como se hizo ver anteriormente, v_∞ es constante; en consecuencia, se obtiene δ para la ecuación diferencial simple

$$\delta d\delta = \frac{140}{13} \nu \frac{dx}{v_\infty}$$

Integrando, se obtiene, para el espesor de la capa límite

$$\frac{\delta}{x} = 4.64 \operatorname{Re}_x^{-1/2} \quad (5-44)$$

La siguiente es la forma de obtener el coeficiente local de fricción superficial:

$$\begin{aligned} C_{fx} &\equiv \frac{\tau_0}{\frac{\rho v_\infty^2}{2}} = \frac{\mu \left. \frac{dv_x}{dy} \right|_{y=0}}{\frac{\rho v_\infty^2}{2}} = \frac{2\nu}{v_\infty^2} \frac{3}{2} \frac{v_\infty}{\delta} \\ &= 0.646 \operatorname{Re}_x^{-1/2} \end{aligned} \quad (5-45)$$

El coeficiente medio de la fricción superficial se obtiene por medio de la integración de la expresión del coeficiente local desde $x = 0$ hasta $x = L$. El resultado es

$$C_{fL} = 1.292 \operatorname{Re}_L^{-1/2} \quad (5-46)$$

Se pueden comparar las ecuaciones (5-44), (5-45) y (5-46) con las equivalentes correspondientes a un análisis exacto, o sea las ecuaciones (5-30), (5-35) y (5-37), respectivamente. Note la forma idéntica de estos dos juegos de resultados. La expresión para el espesor de la capa límite es aproximadamente 7% menor que el resultado exacto, y los coeficientes de fricción superficial difieren de los resultados exactos en apenas 3%. El error se debe a la variación supuesta para $v_x(y)$, dada por la ecuación (5-42). Sin embargo, la congruencia es muy buena.

El problema ilustrado en el ejemplo 5.1 es más que un ejercicio académico. Se ha ilustrado que el enfoque integral aproximado al análisis de capa límite produce favorablemente resultados comparables con la respuesta correcta. Se conoce el resultado exacto para muy pocos casos distintos al flujo laminar sobre una placa plana con velocidad constante de corriente libre. Para la mayoría de los casos físicos, el enfoque integral es la única forma razonable de tratar el problema.⁶ Con la experiencia que se obtuvo en el ejemplo 5.1, se pueden atacar estos problemas con razonable confianza.

5.1-1.7 Consideraciones para flujo turbulento

Es más frecuente encontrar el flujo turbulento que el flujo laminar, aunque no es muy adecuado para el tratamiento analítico. Hasta el momento se ha establecido varias veces la distinción entre los dos tipos de flujo, aunque todo el análisis se ha referido solamente al

⁶ Rápidamente se están desarrollando los métodos numéricos que tratan los problemas de flujo de fluidos y de transferencia de calor; la técnica y la modelación física involucrados todavía son algo complejos e incomprensidos. Estos métodos pueden (y seguramente lo harán) remplazar técnicas aproximadas en los próximos años.

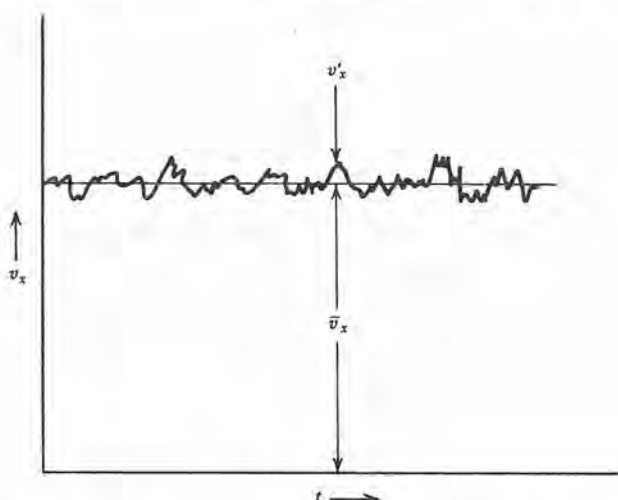


Figura 5.9 Dependencia del tiempo de la velocidad en flujo turbulento.

flujo laminar. Ahora se consideran algunos conceptos básicos relativos a la modelación analítica de los flujos turbulentos.

Las variables del fluido y el flujo en el flujo turbulento varían con el tiempo. Para el flujo en un tubo, la velocidad axial varía con el tiempo, como se muestra en la figura 5.9.

El valor medio de v_x es constante, lo que indica flujo estable en la media; sin embargo, la velocidad real en cualquier instante difiere del valor medio en la cantidad relativamente pequeña v'_x . La velocidad media, o de promedio en el tiempo, en el intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$ está representada por

$$\bar{v}_x(x, y, z) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v_x(x, y, z, t) dt \quad (5-47)$$

Entonces, en función de \bar{v}_x , se puede escribir la velocidad axial en todo momento en la forma

$$v_x(x, y, z, t) = \bar{v}_x(x, y, z) + v'_x(x, y, z, t) \quad (5-48)$$

A. la cantidad dependiente del tiempo, lado derecho de la ecuación (5-48), se llama *velocidad fluctuante* que se debe al carácter aleatorio local y a la naturaleza caótica del flujo turbulento. Estas fluctuaciones caracterizan el efecto en la velocidad axial de los torbellinos o paquetes de partículas de fluido que se mueven en direcciones normales a la del flujo volumétrico. El período de toda fluctuación de velocidad es bastante corto. En forma intuitiva se debe es-

perar que el promedio en el tiempo de v_x' en cualquier intervalo razonable sea cero. Integrando la ecuación (5-48) en el tiempo se llega al resultado que

$$\bar{v}_x' = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v_x' dt = 0 \quad (5-49)$$

Este resultado, $\bar{v}_x' = 0$, es bastante razonable, ya que en un período largo, la velocidad fluctuante $v_x' = v_x - \bar{v}_x$ es positiva y negativa en cantidades iguales. Una cantidad que comprenda el cuadrado de la velocidad no se comporta en esta misma forma. Considere la energía cinética promediada en el tiempo por volumen unitario expresada en la forma

$$\begin{aligned} \overline{KE} &= (1/2)\rho(\overline{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}) \\ &= (1/2)\rho[(\bar{v}_x + v_x')^2 + (\bar{v}_y + v_y')^2 + (\bar{v}_z + v_z')^2] \end{aligned}$$

Expresando el promedio de la suma como la suma de los promedios, también se puede escribir

$$\begin{aligned} \overline{KE} &= (1/2)\rho[(\overline{\bar{v}_x^2 + 2\bar{v}_x v_x' + v_x'^2}) + (\overline{\bar{v}_y^2 + 2\bar{v}_y v_y' + v_y'^2}) \\ &\quad + (\overline{\bar{v}_z^2 + 2\bar{v}_z v_z' + v_z'^2})] \end{aligned}$$

y, ya que $\bar{v}_x' = \bar{v}_y' = \bar{v}_z' = 0$, de acuerdo con la ecuación (5-49), se tiene

$$\overline{KE} = (1/2)\rho(\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2 + \overline{v_x'^2} + \overline{v_y'^2} + \overline{v_z'^2}) \quad (5-50)$$

En consecuencia, la energía cinética media en un flujo turbulento es mayor que la correspondiente para un flujo laminar con la misma velocidad media en la cantidad

$$\overline{v_x'^2} + \overline{v_y'^2} + \overline{v_z'^2}$$

El valor raíz media cuadrada (rms) de las fluctuaciones de velocidad es parte de un parámetro denominado la *intensidad de turbulencia*, definido como

$$I \equiv \frac{\left(\frac{\overline{v_x'^2} + \overline{v_y'^2} + \overline{v_z'^2}}{3} \right)^{1/2}}{v_{\text{prom}}} \quad (5-51)$$

en donde v_{prom} es la velocidad media del flujo.

Prestando atención ahora al efecto de estas fluctuaciones aleatorias en los parámetros pertinentes del flujo, considere el volumen de control mostrado en la figura 5.10, localizado en un campo de flujo turbulento.

Anteriormente se vió la ecuación del movimiento en forma integral como la ecuación (2-28). A continuación se repite por comodidad.

$$\sum F = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \mathbf{v} \rho \, dV + \int_{cs} \mathbf{v} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dA \quad (2-28)$$

Como caso sencillo, se considera el flujo del impulso en la dirección de las x a través de la parte superior del elemento mostrado. En esta superficie hay un flujo medio en la dirección de las x acompañado por velocidades fluctuantes v_x' y v_y' . Escribiendo la ecuación (2-28) para la dirección de las x y tomando un promedio en el tiempo de cada término se obtiene

$$\overline{\sum F_x} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{superior}} (\bar{v}_x + v_x') \rho \, dV + \int_{\text{superior}} (\bar{v}_x + v_x') \rho v_y' \, dA$$

que se reduce a

$$\sum F_x = \int_{\text{superior}} \bar{v}_x \rho v_y' \, dA + \int_{\text{superior}} v_x' \rho v_y' \, dA \quad (5-52)$$

Por tanto, se ve que la presencia de las fluctuaciones turbulentas explica la presencia de un flujo de impulso en la dirección de las x en la superficie superior en la cantidad $\rho v_x' v_y'$ por área unitaria. Se puede considerar que este término es el esfuerzo en la superficie superior

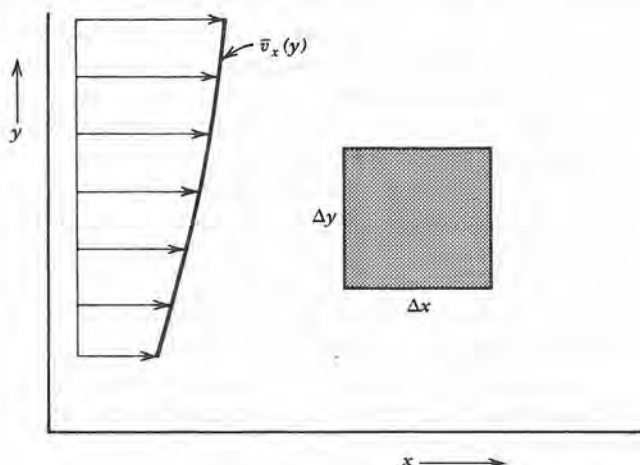


Figura 5.10 Volumen de control en flujo turbulento.

debido a los efectos turbulentos, o sea un *esfuerzo cortante turbulento*. Escribiendo el esfuerzo cortante total en la superficie total como la suma de las contribuciones molecular (laminar) y turbulenta, se tiene

$$\tau_{yx} = \mu \frac{d\bar{v}_x}{dy} + \overline{\rho v_x' v_y'} \quad (5-53)$$

A veces se llama *esfuerzo de Reynolds* a las contribuciones turbulentas $\overline{\rho v_x' v_y'}$. Hay seis componentes de corte en el esfuerzo completo de Reynolds.

Por analogía con la relación de flujo laminar, se puede escribir el esfuerzo cortante turbulento en la forma

$$\tau_{yx|\text{turbulento}} = \overline{\rho v_x' v_y'} = A_t \frac{d\bar{v}_x}{dy} \quad (5-54)$$

en donde A_t es una *viscosidad turbulenta*, o de *torbellino*. Introduciendo la densidad en la forma

$$\varepsilon_m \equiv \frac{A_t}{\rho} \quad (5-55)$$

se obtiene una *difusividad turbulenta del impulso* ε_m y la ecuación (5-54) queda

$$\tau_{yx|\text{turbulento}} = \rho \varepsilon_m \frac{d\bar{v}_x}{dy} \quad (5-56)$$

Ludwig Prandtl⁷ postuló en 1925 un modelo para la difusividad turbulenta del impulso en función de un paso medio libre de un torbellino turbulento. A este paso medio libre turbulento se le llama la *longitud de mezclado*, o, en muchas ocasiones, la *longitud de mezclado de Prandtl*. Expresado con palabras, se puede considerar que la longitud de mezclado es la distancia que recorre un grupo de partículas, en una dirección normal a la del flujo medio, a través de la cual las propiedades permanecen iguales a las del punto de origen. Para lo que sigue, se debe observar la figura 5.11.

El trozo de fluido mostrado se origina en una posición $y - l$ medida desde el eje de las x y va a su nueva posición y por medio de la acción de la velocidad $v_{y'}$ fluctuante. La velocidad en el sentido de las x del trozo de fluido difiere de la correspondiente al medio que le rodea en su punto de destino en la cantidad $\bar{v}_{x|y-l} - \bar{v}_{x|y}$. Esta diferencia en la velocidad media se debe a, y de hecho es, proporcional a la velocidad fluctuante $v_{y'}$. Manteniendo estos conceptos presentes, se puede escribir

⁷ L. Prandtl, ZAMM 5 (1925): 136

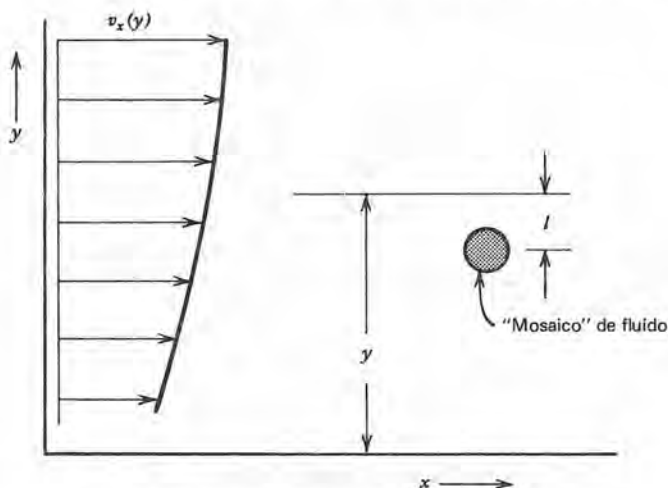


Figura 5.11 La longitud de mezclado de Prandtl.

$$v_y' = \bar{v}_x|_{y-l} - \bar{v}_x|_y = l \frac{d\bar{v}_x}{dy} \quad (5-57)$$

La ecuación (5-57) relaciona la componente v_y' de la velocidad fluctuante a la longitud de mezclado y al gradiente de la velocidad media. Suponiendo que las fluctuaciones en las direcciones de las x y de las y son aproximadamente iguales, Prandtl escribió para el esfuerzo cortante turbulento $\rho \overline{v_x' v_y'}$, dado en la ecuación (5-53),

$$\overline{\rho v_x' v_y'} = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{v}_x}{dy} \right)^2 \quad (5-58)$$

con lo que la difusividad turbulenta, expresada en la ecuación (5-56), queda

$$\varepsilon_m = l^2 \frac{d\bar{v}_x}{dy} \quad (5-59)$$

Algo que se debe notar de la ecuación (5-59) es la dependencia completa de la difusividad turbulenta en las condiciones de flujo. En consecuencia, es una propiedad de un flujo más que de un fluido dado.

Ahora se demuestra la utilidad de la hipótesis de la longitud de mezclado. Una suposición inicial que ha demostrado ser razonablemente correcta es que, en la vecindad de una pared, la longitud de mezclado es directamente proporcional a la distancia desde la pared. Por tanto, se puede escribir el esfuerzo cortante en el flujo turbulento reemplazando l por Ky , en donde K es una constante de proporcionalidad, como

$$\tau_{yx} = \rho K^2 y^2 \left(\frac{d\bar{v}_x}{dy} \right)^2 \quad (5-60)$$

Sacando raíz cuadrada se tiene

$$\frac{d\bar{v}_x}{dy} = \frac{\sqrt{\tau_{yx}/\rho}}{Ky} \quad (5-61)$$

La cantidad $\sqrt{\tau_{yx}/\rho}$ tiene las unidades de velocidad, y con frecuencia se denomina la *velocidad de corte*. Integrando la ecuación (5-61) se obtiene la expresión

$$\bar{v}_x = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{\tau_{yx}}{\rho}} \ln y + c \quad (5-62)$$

en donde c es la constante de integración.

La figura 5.12 muestra una comparación entre la ecuación (5-62) y algunos datos que obtuvo Nikuradse⁸ para el flujo en un tubo liso con $Re = 10^6$. Se ve que la congruencia es bastante buena, incluso notable, considerando la suposición necesaria que condujo a la ecuación (5-62). Experimentalmente se ha encontrado que la constante K de la ecuación (5-62) es igual a 0.4.

Hasta ahora, un resultado general del desarrollo empírico seguido es la representación del esfuerzo cortante, o flujo del impulso en función tanto de las contribuciones moleculares como turbulentas. La ecuación (5-63) da una expresión completa.

$$\frac{\tau_{yx}}{\rho} = (\nu + \varepsilon_m) \frac{d\bar{v}_x}{dy} \quad (5-63)$$

Un procedimiento usual en este punto es la definición de dos parámetros adimensionales en la forma:

$$v^+ \equiv \frac{\bar{v}_x}{\sqrt{\tau_{yx}/\rho}} \quad (5-64)$$

$$y^+ \equiv \frac{\sqrt{\tau_{yx}/\rho} y}{\nu} \quad (5-65)$$

y usar v^+ y y^+ para describir la ecuación (5-63) en la forma

$$dv^+ = \frac{dy^+}{1 + \frac{\varepsilon_m}{\nu}} \quad (5-66)$$

⁸ J. Nikuradse, VDI-Forschungsheft, 356, 1932

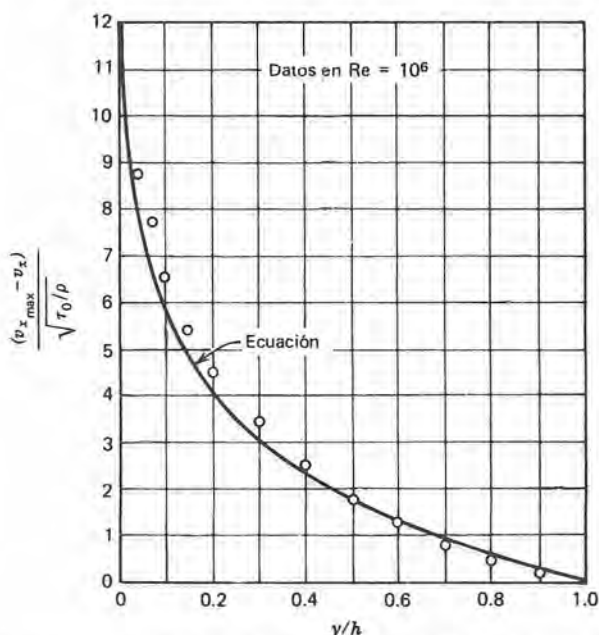


Figura 5.12 Una comparación de la ecuación (5-62) y los datos para el flujo en tubos lisos.

En la subcapa laminar, $\varepsilon_m \simeq 0$, y la ecuación (5-66) se reduce a la forma sencilla

$$dv^+ = dy^+$$

que se puede integrar para dar

$$v^+ = y^+ + c$$

La constante de integración se puede evaluar usando la condición de frontera $v^+ = 0$ at $y^+ = 0$. El resultado es que $c = 0$, y se tiene, en la subcapa laminar,

$$v^+ = y^+ \quad (5-67)$$

En una región de flujo en donde existe la turbulencia, $\varepsilon_m \neq 0$ y la razón $\varepsilon_m/\nu \gg 1$, se puede escribir la ecuación (5-66) en la siguiente forma

$$dv^+ = \frac{dy^+}{\varepsilon_m/\nu}$$

Utilizando resultados anteriores, se puede escribir la razón ε_m/ν como Ky^+ . Esta sustitución en la ecuación anterior y la siguiente integración da la ecuación (5-62) en términos de v^+ y y^+

$$v^+ = \frac{1}{K} \ln y^+ + c \quad (5-68)$$

La figura 5.13 es una gráfica de los datos de velocidad en coordenadas semilogarítmicas de v^+ contra y^+ . De gráficas como esta, se puede observar la validez de las ecuaciones (5-67) y (5-68) para representar perfiles de velocidad turbulenta. Adicionalmente, es posible determinar los valores para las constantes en la ecuación (5-68) y establecer un rango en y^+ para los que se aplican valores específicos de estas constantes.

Generalmente el régimen de flujo se descompone en tres partes, en las que participa y^+ en las siguientes ecuaciones y rangos:

la subcapa laminar, $0 < y^+ \leq 5$.

$$v^+ = y^+ \quad (5-67)$$

la capa amortiguadora, $5 \leq y^+ \leq 30$

$$v^+ = 5.0 \ln y^+ - 3.05 \quad (5-69)$$

el núcleo turbulento, $30 \leq y^+$

$$v^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5 \quad (5-70)$$

Las ecuaciones (5-67), (5-69) y (5-70) comprenden lo que se conoce como el *perfil de velocidad universal*.

Hay dos resultados empíricos adicionales de mucha utilidad para describir efectos de flujo turbulento, ambos atribuidos a Blasius. El

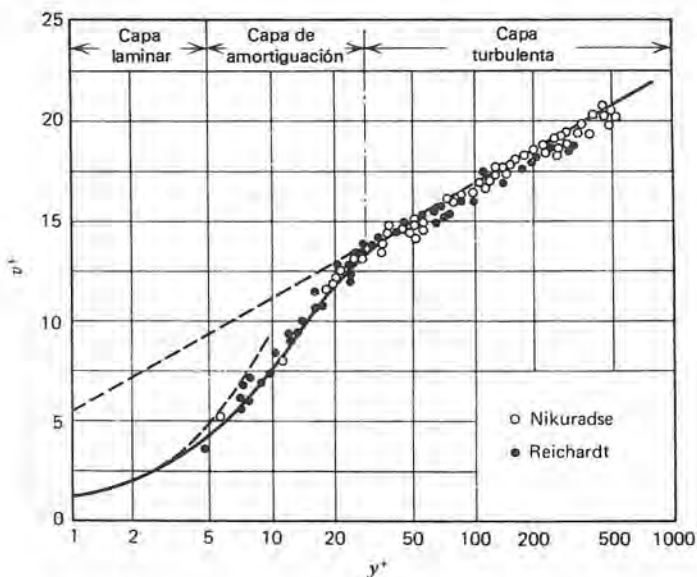


Figura 5.13 Perfil adimensional de velocidad para el flujo en tubos a números de Reynolds altos.

primero es una expresión sencilla para la velocidad en el flujo turbulento

$$\frac{\bar{v}_x}{\bar{v}_{x \text{ máx}}} = \left(\frac{y}{R}\right)^{1/7} \quad (5-71)$$

La ecuación (5-71) es la *ley de la potencia un séptimo* para los perfiles de velocidad turbulenta. La segunda observación empírica es la del esfuerzo cortante en la pared en un flujo turbulento dado por

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{0.0225 \bar{v}_{x \text{ máx}}^2}{\left(\frac{\bar{v}_{x \text{ máx}} R}{\nu}\right)^{1/4}} \quad (5-72)$$

Las dos ecuaciones anteriores están escritas para un conducto circular de radio R . Estas mismas ecuaciones se aplican para el flujo sobre una superficie plana, en donde se reemplaza R por δ , o sea el espesor de la capa límite.

La verdadera utilidad de las observaciones de Blasius, expresadas como ecuaciones (5-71) y (5-72) está en su uso en la expresión integral del impulso. Anteriormente se obtuvo la ecuación (5-40), que se aplica tanto para el flujo turbulento como para el flujo laminar. El ejemplo 5.2 ilustra el análisis de una capa límite turbulenta para el flujo sobre una superficie plana.

Ejemplo 5.2

Evaluar el espesor de la capa límite y los coeficientes local y medio de la fricción superficial para una capa límite turbulenta sobre una placa plana. El perfil de la velocidad está dado por

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \begin{cases} \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} & \text{para } 0 \leq y \leq \delta \\ 1 & \text{para } \delta \leq y \end{cases}$$

y el esfuerzo cortante de pared está dado por la ecuación (5-72). Se puede suponer que la velocidad v_∞ de la corriente libre es constante. Ahora, la ecuación integral en forma aplicable es

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{d}{dx} \int_0^Y v_x (v_\infty - v_x) dy$$

Sustituyendo el perfil dado de la velocidad y la ecuación (5-72), se tiene

$$0.0225 \left(\frac{v}{v_\infty \delta}\right)^{1/4} = \frac{d}{dx} \int_0^\delta \left[\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{2/7} \right] dy$$

Integrando, y luego diferenciando en la forma indicada se obtiene

$$0.0225 \left(\frac{v}{v_{\infty} \delta} \right)^{1/4} = \frac{7}{62} \frac{d\delta}{dx}$$

Integrando una vez más se obtiene

$$\left(\frac{v}{v_{\infty}} \right)^{1/4} x = 3.45 \delta^{5/4} + c \quad (5-73)$$

Suponer una capa límite turbulenta a partir de $x = 0$ da, para el espesor de la capa límite,

$$\frac{\delta}{x} = 0.376 \operatorname{Re}_x^{-1/5} \quad (5-74)$$

Sustituyendo esta relación para δ en la ecuación (5-72), el coeficiente de fricción superficial local queda como

$$\begin{aligned} C_{fx} &= \frac{\tau_o}{\frac{\rho}{2} v_{\infty}^2} \\ &= 0.0576 \operatorname{Re}_x^{-1/5} \end{aligned} \quad (5-75)$$

Se puede calcular el coeficiente medio de fricción superficial de esta expresión en la forma usual. La ecuación resultante para C_{fL} es

$$C_{fL} = 0.072 \operatorname{Re}_L^{-1/5} \quad (5-76)$$

Naturalmente, los resultados del ejemplo 5.2 son aproximados y limitados al rango de flujo en el cual la expresión de la ley de potencia un séptimo de Blasius es razonablemente válida, lo que restringe la utilidad de las ecuaciones (5-74), (5-75) y (5-76) a valores de $\operatorname{Re}_x < 10^7$. En todo caso, se debe observar todavía la utilidad de la integral del impulso en este caso en que no se han obtenido todavía resultados analíticos.

5.1-2 Combinado flujo-fluido; consideraciones de energía

En la sección 5.1-1 se hicieron varias consideraciones básicas con relación al flujo fluido viscoso y a la capa límite hidrodinámica. Cada una de las situaciones descritas y analizadas en la sección anterior tiene una equivalente de transferencia de calor. En seguida, se considera el caso en el que un fluido está adyacente a una pared a distinta temperatura. En gran parte, las razones resultantes de transferen-

cia de calor quedan determinadas por los fenómenos de flujo de fluido mencionados anteriormente. Ahora se consideran otros puntos con relación al intercambio de energía y las propiedades térmicas.

En el capítulo 1 se expresó la ecuación básica de la razón para el intercambio convectivo de energía. La relación es

$$q = hA \Delta T \quad (1-8)$$

en donde q es la razón de transferencia de calor entre la superficie y el fluido, A es el área de contacto, ΔT es la diferencia de temperaturas entre la superficie y el volumen del fluido, y h es el coeficiente de transferencia convectiva de calor. Básicamente, esta ecuación es la relación que define h , y es este coeficiente, o uno de sus parámetros asociados, el que se busca en la mayoría de los problemas de transferencia convectiva de calor. La ecuación (1-8) es muy sencilla, y una vez que se ha determinado el valor de h , se puede evaluar con facilidad la razón q de flujo de calor o el flujo de calor q/A . El coeficiente de película h está relacionado con el mecanismo de flujo de fluido, las propiedades del fluido y la geometría del flujo.

En todo caso de flujo, siempre hay una capa fluida, en ocasiones sumamente delgada, adyacente a una frontera sólida, en donde el flujo es laminar. Ya se señaló que las regiones de flujo laminar están caracterizadas por el intercambio molecular del impulso, lo que sucede igualmente para la energía; se transfiere el calor a través de una película laminar por efectos moleculares (conducción); esta conducción siempre está presente en un sistema clasificado como convectivo. Más aún, es cierto que la mayor resistencia a la transferencia de calor en un caso convectivo, es el que ofrece el proceso de conducción en una película laminar. En consecuencia, no solamente está presente la conducción, sino que es una cuestión importante en el análisis de la convección.

Parece razonable asociar la dificultad en la transferencia de calor entre una superficie y el fluido adyacente al espesor de la película laminar; si esta película es gruesa, entonces el camino de conducción es correspondientemente largo. Hay mucha diferencia en las razones de transferencia de calor entre los casos laminar y de flujo turbulento. En un flujo turbulento hay una transferencia de gran escala de las partículas del fluido entre las regiones a distintas temperaturas. Obviamente, se aumenta la razón de transferencia de calor en el caso del flujo turbulento comparado con el caso en que el campo completo de flujo es laminar.

Las dos clasificaciones generales de la transferencia convectiva de calor son la convección *natural o libre* y la *forzada*. En la convección natural, el movimiento del fluido es el resultado de la transferencia del calor. Al calentar o enfriar un fluido por el efecto de la interac-

ción con una frontera sólida, hay un cambio asociado en la densidad del fluido. Los efectos de boyantez provocados por este cambio en la densidad producen una circulación natural en la cual el fluido afectado se mueve por sí mismo junto a la superficie sólida; el fluido que lo reemplaza está afectado en forma semejante por la transferencia de calor y así se sigue el proceso. En la convección forzada el fluido fluye debido a la influencia de un agente externo tal como un ventilador o bomba. Generalmente se asocia la convección forzada con mayores velocidades y razones de transferencia de calor mayores que en la convección natural.

Hasta ahora, el término "capa límite" se ha referido a los efectos viscosos asociados con un fluido que fluye junto a una superficie sólida. Otra consideración es la *capa límite térmica* que es de principal interés en el análisis de transferencia de calor.

A continuación se presenta la secuencia de cobertura con relación al análisis de transferencia convectiva de calor y el coeficiente de transferencia convectiva de calor:

- a) análisis dimensional combinado con resultados experimentales
- b) análisis exacto de la capa límite
- c) análisis aproximado de la capa límite (integral)
- d) analogía entre el impulso y la transferencia de calor

5.1-2.1 *Análisis dimensional en la transferencia convectiva de calor*

No se pretende que el tratamiento dado en los análisis dimensionales de la convección en esta sección sea exhaustivo. Se incluye una introducción suficiente a esta técnica en la consideración de los casos de convección forzada de flujo interno y de convección natural de flujo externo. Conforme se avanza, se estudia el enfoque del análisis dimensional, aunque no se estudia exhaustivamente. El lector puede consultar las obras de Welty, Wicks y Wilson⁹ y de Langhaar¹⁰, en donde encontrará un tratamiento más detallado del análisis dimensional.

Caso 1

En la figura 5.14 se muestra el diagrama de este caso. El fluido que fluye y la pared del tubo están a distintas temperaturas. La velocidad promedio del flujo es v , y las propiedades de interés del fluido son la densidad, viscosidad, calor específico y con-

⁹ J. R. Welty, C. E. Wicks, y R. E. Wilson, *Fundamentals of Momentum, Heat and Mass Transfer*. (Nueva York: John Wiley and Sons, Inc., 1969).

¹⁰ H. L. Langhaar, *Dimensional Analysis and Theory of Models*, (Nueva York: John Wiley and Sons, Inc., 1951).

ductividad térmica. En la tabla siguiente se han listado todas las variables significativas, sus símbolos y las representaciones dimensionales.

En este caso se consideran fundamentales cuatro dimensiones: la masa M , la longitud L , el tiempo t y la temperatura T . Todas las dimensiones están expresadas en función de las anteriores. Las unidades de c_p , k , y h incluyen un término de calor; para esta investigación se ha representado el calor por energía con dimensiones de ML^2/t^2 .

Variable	símbolo	Dimensiones
Velocidad	v	L/t
Diámetro del tubo	D	L
Densidad del fluido	ρ	M/L^3
Viscosidad del fluido	μ	M/Lt
Calor específico del fluido	c_p	L^2/t^2T
Conductividad térmica del fl.	k	ML/t^3T
Coefficiente de transferencia de calor	h	M/t^3T

El teorema pi de Buckingham dice que el número de grupos independientes adimensionales i necesarios para correlacionar n variables dimensionales está dado por la expresión

$$i = n - r \quad (5-77)$$

es donde r es el rango de una matriz que tiene n columnas y un número de renglones equivalente al número de dimensiones fundamentales —en este caso cuatro. La matriz sujeta se forma como sigue:

	v	D	ρ	μ	c_p	k	h
M	0	0	1	1	0	1	1
L	1	1	-3	-1	2	1	0
t	-1	0	0	-1	-2	-3	-3
T	0	0	0	0	-1	-1	-1

El número en cada posición de la tabla es el exponente al que se debe elevar cada una de las dimensiones para representar adecuadamente la variable dada. Por ejemplo, se mostró que las dimensiones de k son ML/t^3T ; en consecuencia, los números

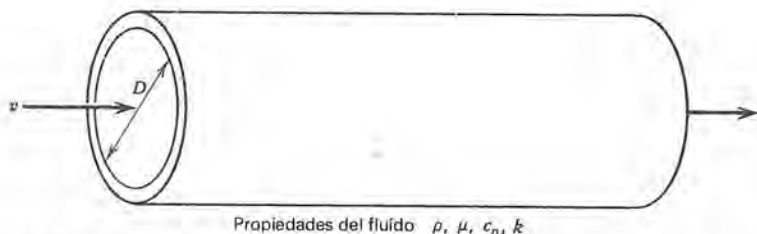


Figura 5.14 Parámetros de análisis para la convección forzada en un conducto circular.

en la columna k son, en orden, $(1, 1, -3, -1)$, ya que éstas son las potencias de M , L , t y T respectivamente.

El arreglo de números en esta tabla comprende la matriz para el caso que se está considerando. Su rango es 4, por lo que se deben formar $1 = 7 - 4 = 3$ parámetros adimensionales

Cada parámetro adimensional se forma combinando un grupo núcleo de r variables con una de las variables restantes que no estén en el núcleo. El núcleo puede incluir cualquiera de las 4 variables (en este caso) que, entre ellas, incluyan todas las dimensiones básicas. En forma arbitraria se escogen D , ρ , μ , y k como el núcleo. Ahora se representan como grupos π a los parámetros que se deben formar, en donde

$$\begin{aligned}\pi_1 &= D^a \rho^b \mu^c k^d v \\ \pi_2 &= D^e \rho^f \mu^g k^h c_p \\ \pi_3 &= D^i \rho^j \mu^k k^l h\end{aligned}$$

Cada grupo π de ser adimensional, lo que se logra seleccionando adecuadamente los exponentes a , b , c etc usando la muy sencilla técnica mecánica que ahora se ilustra.

Comenzando con π_1 se le escribe adimensionalmente en la forma

$$1 = L^a \left(\frac{M}{L^3}\right)^b \left(\frac{M}{Lt}\right)^c \left(\frac{ML}{t^3 T}\right)^d \frac{L}{t}$$

Para que se mantenga la igualdad, los exponentes en M , L , t y T deben ser iguales en ambos lados de esta expresión. Notando que los exponentes son cero en el lado izquierdo, se genera el siguiente conjunto de ecuaciones algebraicas igualando los exponentes:

$$\begin{aligned}M: \quad 0 &= b + c + d \\ L: \quad 0 &= a - 3b - c + d + 1 \\ t: \quad 0 &= -c - 3d - 1 \\ T: \quad 0 &= -d\end{aligned}$$

Se pueden resolver estas ecuaciones para dar los valores de a , b , c y d iguales a 1, 1, -1 y 0, respectivamente. Se puede escribir el primer parámetro como

$$\pi_1 = \frac{D \rho v}{\mu} \equiv \text{Re}_D$$

que se conoce como el *número de Reynolds*.

Se puede desarrollar un proceso semejante ahora para π_2 .

$$\begin{aligned}1 &= L^e \left(\frac{M}{L^3}\right)^f \left(\frac{M}{Lt}\right)^g \left(\frac{ML}{t^3 T}\right)^h \frac{L^2}{t^2 T} \\ M: \quad 0 &= f + g + h \\ L: \quad 0 &= e - 3f - g + h + 2 \\ t: \quad 0 &= -g - 3h - 2 \\ T: \quad 0 &= -h - 1\end{aligned}$$

Los valores de e , f , g y h son 0, 0, 1 y -1 respectivamente, con lo que se tiene

$$\pi_2 = \frac{\mu c_p}{k} \equiv \text{Pr}$$

El parámetro adimensional que se obtiene se llama el *número de Prandtl*, Pr , que como se ve, es igual a la razón de las difusividades moleculares del impulso y del calor. Este parámetro importante se define de acuerdo con

$$\text{Pr} \equiv \frac{\alpha}{\nu} = \frac{\mu c_p}{k} \quad (5-78)$$

Ahora se forma el tercer parámetro igual que antes,

$$1 = L^i \left(\frac{M}{L^3} \right)^j \left(\frac{M}{L t} \right)^k \left(\frac{ML}{t^3 T} \right)^l \frac{M}{t^3 T}$$

$$M: \quad 0 = j + k + 1 + 1$$

$$L: \quad 0 = i - 3j - k + 1$$

$$t: \quad 0 = -k - 3l - 3$$

$$T: \quad 0 = -1 - 1$$

Despejando los valores de i , j , k y l se obtiene 1, 0, 0 y -1 respectivamente, con lo que se puede escribir

$$\pi_3 = \frac{hD}{k} \equiv \text{Nu}_D$$

El parámetro que resulta esta vez se designa como Nu , el *número de Nusselt*, que es una forma de un coeficiente adimensional de transferencia de calor. Este parámetro se usará muchas veces; su definición es

$$\text{Nu}_L \equiv \frac{hL}{k} \quad (5-79)$$

en donde la longitud L toma distintos valores, dependiendo de la geometría del sistema. La longitud significativa empleada en el número de Nusselt es la misma que la usada en el número de Reynolds.

El análisis dimensional en este caso de flujo interno condujo a una relación de la forma

$$\text{Nu} = f(\text{Re}, \text{Pr}) \quad (5-80)$$

que es común para la transferencia de calor por convección forzada.

Si se hubiera escogido un grupo núcleo distinto para el análisis dimensional, por ejemplo D , ρ , μ , c_p , los grupos π formados hubieran sido Re , Pr y una forma dimensional del coeficiente de transferencia de calor designado como St , el *número de Stanton*. Se puede formar el número de Stanton dividiendo el Nu entre el producto RePr y se define como

$$\text{St} \equiv \frac{\text{Nu}}{\text{RePr}} = \frac{h}{\rho v c_p} \quad (5-81)$$

Usando el número de Stanton en vez de Nu , se puede escribir una expresión distinta para la ecuación (5-80) en la forma

$$St = f(Re, Pr) \quad (5-82)$$

que es otra forma común de correlacionar los datos de la transferencia de calor por convección forzada.

El análisis dimensional ha indicado una forma de reducir las siete variables significativas a este caso a tres parámetros no dimensionales. Ahora se deben obtener datos experimentales para este caso con el fin de determinar las relaciones funcionales entre los parámetros expresados en las ecuaciones (5-80) y (5-82).

Caso 2. Convección natural adyacente a una placa vertical caliente

La figura 5.15 representa este caso, en que no hay velocidad especificada; el flujo es el resultado de la transferencia de energía entre la placa a la temperatura T_0 y el fluido a la temperatura ambiente T_∞ . Las propiedades de interés del fluido son ρ , μ , c_p , k , y β . La última propiedad mencionada es el coeficiente de dilatación térmica, usado para representar la variación en la densidad del flujo con la temperatura, de acuerdo con

$$\rho = \rho_0(1 + \beta \Delta T) \quad (5-83)$$

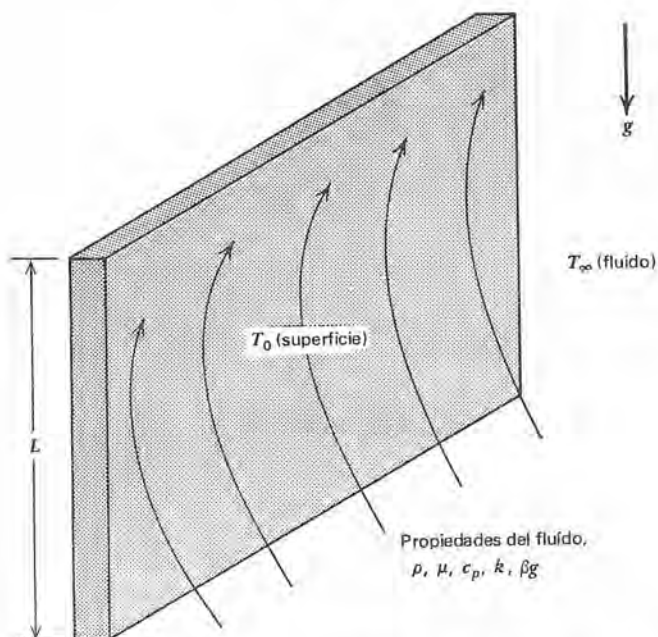


Figura 5.15 Parámetros de análisis dimensional para la convección forzada en un conducto circular.

en donde ρ_0 es la densidad de referencia dentro de la capa caliente y ΔT es la diferencia de temperaturas entre el fluido en la superficie de la placa y la correspondiente lejos de la placa.

Se puede escribir la fuerza de boyantez por volumen unitario, F_B , como

$$F_B = (\rho - \rho_0)g$$

y, con la sustitución de la ecuación (5-83),

$$F_B = \rho_0 \beta g \Delta T \quad (5-84)$$

Por la ecuación (5-84), se deben incluir las variables β , g , y ΔT en un análisis dimensional de la convección natural. Ya que β y g aparecen juntas en la expresión de la fuerza de boyantez se combinan y tratan como una sola variable en el análisis dimensional.

Más abajo se listan las variables necesarias a este caso de convección natural, junto con los símbolos y representación dimensional para cada una de ellas.

Variable	Símbolo	Dimensión
Altura	L	L
Diferencia de temperatura	ΔT	T
Coefficiente de dilatación térmica del fluido	βg	L/Tt^2
Densidad del fluido	ρ	M/L^3
Viscosidad del fluido	μ	M/Lt
Calor específico del fluido	c_p	L^2/t^2T
Conductividad térmica del fl	k	ML/t^3T
Coefficiente de transferencia de calor	h	M/t^3T

Aplicando el teorema pi de Buckingham se tiene que se deben formar cuatro grupos pi adimensionales. Si se designa como un grupo núcleo a las variables L , ρ , μ y k , los grupos pi son

$$\pi_1 = L^a \rho^b \mu^c k^d \Delta T$$

$$\pi_2 = L^e \rho^f \mu^g k^h \beta g$$

$$\pi_3 = L^i \rho^j \mu^k k^l c_p$$

$$\pi_4 = L^m \rho^n \mu^o k^p h$$

Ahora no se muestra todo el proceso mecánico de la evaluación de los exponentes a , b , c , etc. necesarios para hacer adimensionales a los grupos pi. Los resultados de este procedimiento son:

$$\pi_1 = \frac{L^2 \rho^2 k \Delta T}{\mu^3}$$

$$\pi_2 = \frac{L \mu \beta g}{k}$$

$$\pi_3 = \frac{\mu c_p}{k} \equiv \text{Pr}$$

$$\pi_4 = \frac{hL}{k} \equiv \text{Nu}_L$$

Se reconoce que los dos últimos grupos son los números de Prandtl y de Nusselt, respectivamente.

El análisis y el trabajo experimental han demostrado que siempre aparecen juntos los dos primeros grupos en forma de un solo grupo adimensional. El parámetro que se forma así es

$$\begin{aligned}\pi_1 \pi_2 &= \frac{L^2 \rho^2 k \Delta T L \mu \beta g}{\mu^3 k} \\ &= \frac{\rho^2 \beta g}{\mu^2} L^3 \Delta T\end{aligned}$$

El parámetro resultante es el *número de Grashof*, designado por Gr, y definido en la forma

$$\text{Gr} \equiv \frac{\rho^2 \beta g}{\mu^2} L^3 \Delta T \quad (5-85)$$

En este caso, el análisis dimensional ha mostrado que se pueden representar los datos de transferencia de calor por convección natural en forma adimensional como

$$\text{Nu} = f(\text{Gr}, \text{Pr}) \quad (5-86)$$

La ecuación (5-86) para la convección natural es muy semejante a la ecuación (5-80), que se aplica a la convección forzada. La velocidad del fluido se representa adimensionalmente por medio del número de Reynolds, que aparece en los análisis de la convección forzada. En la convección natural, el flujo es el resultado de los efectos de boyantez consecuencia de la diferencia en la temperatura. Estos efectos están incluidos en el número de Grashof, y este parámetro reemplaza el número de Reynolds en el caso de la convección natural. El número de Stanton no tiene significado en el caso de la convección natural.

En la sección 5.3 se incluye un estudio de las correlaciones empíricas de los datos de transferencia de calor en las formas que sugieren los análisis dimensionales. Más adelante estudian algunos enfoques analíticos a la capa límite térmica. El lector observará cuántos de los parámetros adimensionales que se desarrollan en esta sección se originan en forma natural a partir del análisis.

5.1-2.2 *Análisis exacto de la capa límite térmica*

Gran parte del estudio necesario para la capa límite térmica es idéntica a la presentada en la sección 5.1-1.4 para la capa límite hidrodinámica. El lector que lo desee puede consultar esta sección anterior, donde encontrará los detalles necesarios, con el fin de no hacer repeticiones innecesarias.

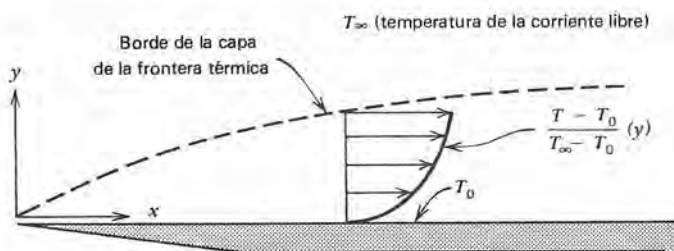


Figura 5.16 La capa límite térmica para el flujo laminar en una placa isotérmica.

El caso de la transferencia de calor que se presta directamente al análisis es el del flujo externo de un fluido paralelo a una placa plana isotérmica. En la región en que el flujo de la capa límite es laminar, tanto la transferencia de impulso como de calor son por medio de intercambio molecular. En la figura 5.16 se muestra la capa límite térmica para este caso.

Las ecuaciones que se deben resolver para este caso incluyen la forma bidimensional incompresible de la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (5-18)$$

la ecuación del movimiento con las modificaciones adecuadas para la capa límite

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (5-19)$$

y la forma aplicable de la primera ley de la termodinámica (la ecuación de la energía).

Para el flujo estable, incompresible, isobárico, bidimensional de propiedades constantes sin generación de energía o disipación viscosa, la forma diferencial de la ecuación de la energía, dada por la ecuación (2-49), se reduce a

$$\rho c_p \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (5-87)$$

Una suposición de capa límite relativa a las segundas derivadas de T en el orden de magnitud es

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

por lo que se puede simplificar y reorganizar la ecuación (5-87) en la forma

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (5-88)$$

Esta expresión, y las ecuaciones (5-18) y (5-19), comprenden el conjunto de las que se deben resolver en este caso.

Originalmente, Blasius resolvió las ecuaciones (5-18) y (5-19) para dar los resultados presentados en la sección 5.1-1.4. Las condiciones de frontera aplicables a la velocidad en la forma adimensional fueron

$$\begin{aligned} \frac{v_x}{v_\infty} = \frac{v_y}{v_\infty} &= 0 & \text{en } y = 0 \\ \frac{v_x}{v_\infty} &= 1 & \text{en } y = \infty \end{aligned}$$

Es obvio que la ecuación diferencial de la energía, ecuación (5-88), es semejante a la ecuación (5-19). Esta similitud sugiere la posibilidad de aplicar la solución de Blasius o un enfoque semejante a la capa límite térmica.

Se puede aplicar la solución de Blasius directamente a este caso si se pueden hacer equivalentes las ecuaciones de la energía y el impulso y si las condiciones de frontera son iguales en ambos casos. Estas condiciones se satisfacen si:

1. Los coeficientes de los términos de segundo orden son iguales; esto requiere que $\nu = \alpha$ ó $Pr = 1$.
2. Las formas adimensionales de las variables dependientes son equivalentes, lo que se logra tratando la velocidad como v_x/v_∞ y la temperatura como $(T - T_0)/(T_\infty - T_0)$. Ahora se pueden escribir las condiciones de frontera en la forma

$$\begin{aligned} \frac{v_x}{v_\infty} = \frac{T - T_0}{T_\infty - T_0} &= 0 & \text{en } y = 0 \\ \frac{v_x}{v_\infty} = \frac{T - T_0}{T_\infty - T_0} &= 1 & \text{en } y = \infty \end{aligned}$$

Con estas modificaciones se pueden hacer las mismas transformaciones en el caso de la ecuación de energía que se hizo antes para la ecuación del movimiento. Ahora la ecuación (5-28) se aplica tanto al impulso como al intercambio de energía. Esta relación y los parámetros asociados se repiten para ayudar en el estudio que sigue. La ecuación es

$$f''' + \frac{1}{2}ff'' = 0 \quad (5-28)$$

en donde los parámetros involucrados son

$$f'(\eta) = \frac{v_x}{v_\infty} = \frac{T - T_0}{T_\infty - T_0} \quad (5-89)$$

y

$$\eta \equiv y \left(\frac{v_\infty}{\nu x} \right)^{1/2} = \frac{y}{x} \left(\frac{x v_\infty}{\nu} \right)^{1/2} = \frac{y}{x} \text{Re}_x^{1/2} \quad (5-90)$$

En la tabla 5.1 se presentan los valores de f , f' , y f'' para distintos valores de η .

Usando el resultado de Blasius, se puede escribir

$$\begin{aligned} \frac{df'}{d\eta}(0) = f''(0) &= \frac{d\left(\frac{v_x}{v_\infty}\right)}{d\left(\frac{y}{x} \text{Re}_x^{1/2}\right)\bigg|_{y=0}} \\ &= \frac{d\left(\frac{T - T_0}{T_\infty - T_0}\right)}{d\left(\frac{y}{x} \text{Re}_x^{1/2}\right)\bigg|_{y=0}} \end{aligned} \quad (5-91)$$

Las relaciones anteriores indican que los perfiles de la velocidad y la temperatura son idénticos en la capa límite laminar para las condiciones especificadas; esta es una consecuencia directa de haber especificado $\text{Pr} = 1$. Un resultado correspondiente es que las capas límite térmica e hidrodinámica son de igual espesor. Es significativo que los números de Prandtl para la mayoría de los gases sean muy próximos a la unidad al grado que las dos capas límite corresponden muy próximamente.

Ahora se puede escribir el flujo de calor en la superficie en la forma

$$\frac{q_y}{A} = h_x(T_0 - T_\infty) = -k \frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y=0} \quad (5-92)$$

Se puede obtener el gradiente de temperatura superficial de la ecuación (5-91) de acuerdo con

$$\frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y=0} = (T_\infty - T_0) \left(\frac{0.332}{x} \text{Re}_x^{1/2} \right) \quad (5-93)$$

que se puede sustituir en la ecuación (5-92) para obtener

$$\frac{q_v}{A} = h_x(T_0 - T_\infty) = -k(T_\infty - T_0)\left(\frac{0.332}{x} \text{Re}_x^{1/2}\right)$$

Despejando h_x , se obtiene

$$h_x = 0.332 \frac{k}{x} \text{Re}_x^{1/2} \quad (5-94)$$

o, finalmente, en forma adimensional

$$\text{Nu}_x = \frac{h_x x}{k} = 0.332 \text{Re}_x^{1/2} \quad (5-95)$$

Se debe tener presente el hecho que la ecuación (5-95) se aplica específicamente a los casos en donde $\text{Pr} = 1$. Un análisis más completo permitiría otros valores para el número de Prandtl. Pohlhausen¹¹ relacionó los espesores de las capas límite hidrodinámica y térmica con el número de Prandtl según la expresión

$$\frac{\delta}{\delta_t} = \text{Pr}^{1/3} \quad (5-96)$$

Esta función, $\text{Pr}^{1/3}$, incluida en el parámetro η , permite extender la solución para la capa límite térmica para que incluya valores de Pr distintos a la unidad. En la figura 5.17 se muestra una gráfica de temperaturas adimensionales contra la η redefinida. Con la η redefinida, el flujo de calor en la superficie expresado como antes lleva a la siguiente expresión para h_x :

$$h_x = 0.332 \frac{k}{x} \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3} \quad (5-97)$$

como para Nu_x , se tiene

$$\text{Nu}_x \equiv \frac{h_x x}{k} = 0.332 \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3} \quad (5-98)$$

Se pueden usar las ecuaciones (5-97) y (5-98) para el rango de números de Prandtl de $0.6 < \text{Pr} < 50$.

Estas ecuaciones relacionan los valores locales de h y de Nu , o sea los que se aplican en un valor específico de x . En la práctica de la ingeniería, se tiene mayor interés en un valor promedio o medio de h o de Nu que se aplique a una placa de determinada longitud L y ancho W . Se puede obtener un valor medio para estos parámetros de los valores locales por el proceso de integración. Para una placa que tiene las dimensiones especificadas arriba, se puede escribir

¹¹ E. Pohlhausen, *ZAMM* 1 (1921): 115

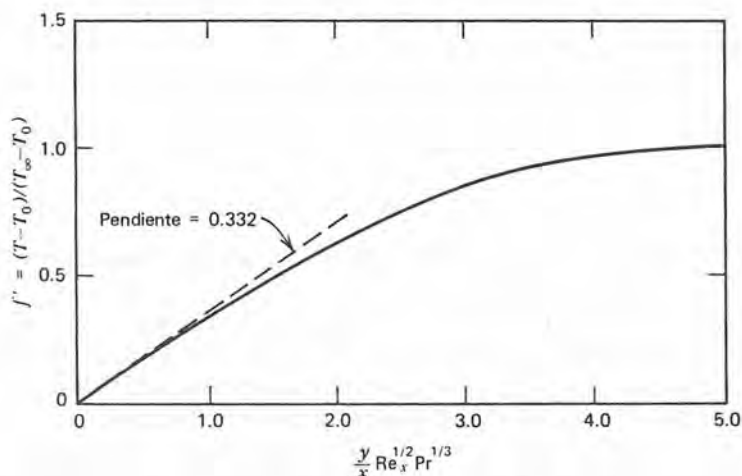


Figura 5.17 Perfil adimensional de temperatura en el flujo laminar en una placa plana.

$$q_y = h_L A (T_0 - T_\infty) = \int_A h_x (T_0 - T_\infty) dA$$

Se puede usar la ecuación (5-97) para expresar h_x en la integral; continuando, se tiene

$$\begin{aligned} h_L &= \frac{1}{A} \int_A h_x dA \\ &= \frac{1}{WL} \int_0^L 0.332 \frac{k}{x} \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3} W dx \\ &= \frac{0.332k}{L} \left(\frac{v_\infty}{\nu} \right)^{1/2} \text{Pr}^{1/3} \int_0^L [x^{-1/2}] dx \\ &= 0.664k \left(\frac{v_\infty}{\nu L} \right)^{1/2} \text{Pr}^{1/3} \end{aligned} \quad (5-99)$$

En términos del número de Nusselt, queda

$$\text{Nu}_L \equiv \frac{h_L L}{k} = 0.664 \text{Re}_L^{1/2} \text{Pr}^{1/3} \quad (5-100)$$

por tanto, en forma análoga al coeficiente de fricción superficial media, el número medio de Nusselt en una placa plana de longitud L tiene un valor igual al doble del número local de Nusselt evaluado en $x = L$.

En todas las ecuaciones anteriores se recomienda evaluar las propiedades del fluido a la *temperatura T_f de película*, definida en la forma

$$T_f \equiv \frac{T_0 + T_\infty}{2} \quad (5-101)$$

5.1-2.3 *Análisis integral aproximado de la capa límite térmica*

Al igual que en la sección anterior, el enfoque que se considera ahora a la capa límite térmica tiene una equivalente en el caso hidrodinámico. El desarrollo de esta sección es paralelo al análisis integral de la capa límite hidrodinámica considerada en la sección 5.1-1.6. El razonamiento que fundamenta un análisis integral está dentro del alcance muy limitado de las técnicas analíticas disponibles. A la fecha, los análisis exactos están limitados al flujo laminar y a muy simples geometrías. Todo caso de mayor complejidad requiere un enfoque integral o numérico.

En la figura 5.18 aparece el volumen de control que se debe considerar para fines de ilustración. A continuación se repite la forma aplicable de la expresión integral para la primera ley de la termodinámica para mayor claridad. Para este caso, cada término de la relación se evalúa en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q}{dt} &= -k \Delta x \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \\ \frac{\delta W_s}{dt} &= \frac{\delta W_u}{dt} = 0 \\ \int_{cs} \left(e + \frac{P}{\rho} \right) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA &= \int_0^Y \left(\frac{v^2}{2} + gy + u + \frac{P}{\rho} \right) \rho v_x dy \Big|_{x+\Delta x} \\ &\quad - \int_0^Y \left(\frac{v^2}{2} + gy + u + \frac{P}{\rho} \right) \rho v_x dy \Big|_x \\ &\quad - \frac{d}{dx} \int_0^Y \rho v_x \left(\frac{v^2}{2} + gy + u + \frac{P}{\rho} \right) dy \Delta x \\ \int_{cv} \frac{\partial}{\partial t} e \rho dV &= 0 \end{aligned}$$

En ausencia de efectos gravitacionales se pueden escribir los términos de flujo de energía convectiva en la forma

$$\frac{v^2}{2} + u + \frac{P}{\rho} \equiv h_0 \simeq c_p T$$

en donde h_0 y T son la entalpía de estancamiento y la temperatura, respectivamente. Con esta sustitución, la expresión de la energía se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} -k \Delta x \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} &= \int_0^Y \rho v_x c_p T dy \Big|_{x+\Delta x} - \int_0^Y \rho v_x c_p T dy \Big|_x \\ &\quad - \rho c_p \Delta x \frac{d}{dx} \int_0^Y v_x T_\infty dy \quad (5-102) \end{aligned}$$

En la ecuación (5-102) se designa por T_∞ a la temperatura de estancamiento de la corriente libre. Se ha sacado de la integral al producto ρc_p ; cada propiedad se evalúa en condiciones "promedio". Ahora se sigue el procedimiento usual; cada término se divide entre Δx y se evalúa la expresión en el límite conforme $\Delta x \rightarrow 0$. El resultado es

$$\frac{k}{\rho c_p} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{d}{dx} \int_0^Y v_x (T_\infty - T) dy \quad (5-103)$$

Esta es la forma integral de la ecuación de energía, que es una equivalente de la ecuación (5-40) para el impulso. El procedimiento para resolver la ecuación (5-103) es suponer funciones para $v_x(y)$ y $T(y)$ que se puedan sustituir en el término integral y luego resolver toda la expresión despejando las cantidades deseadas. Note que se deben suponer tanto el perfil de la velocidad como el de la temperatura en este caso, en comparación con la ecuación integral del impulso, en que se requirieron solamente los perfiles de la velocidad.

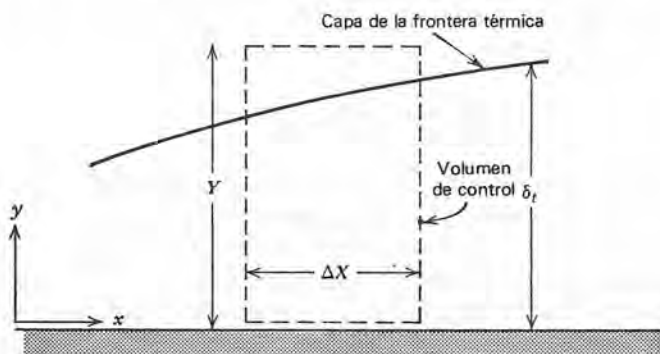


Figura 5.18 Volumen de control para el análisis integral de la capa límite térmica.

Las condiciones de frontera que debe satisfacer un perfil supuesto de la temperatura incluyen

- (1) $T - T_s = 0$ en $y = 0$
- (2) $T - T_s = T_\infty - T_s$ en $y = \delta_t$
- (3) $\frac{\partial}{\partial y}(T - T_s) = 0$ en $y = \delta_t$
- (4) $\frac{\partial^2(T - T_s)}{\partial y^2} = 0$ en $y = 0$ [vea la ecuación (5-88)]

En la sección 5.1-1.6 se supuso una parábola cúbica como la forma del perfil de la velocidad. Aquí se supone una forma semejante para la distribución de temperatura en la capa límite térmica. Al hacerlo, el perfil de la temperatura tiene la forma

$$T - T_s = \begin{cases} A + By + Cy^2 + Dy^3 & 0 < y < \delta_t \\ T_\infty - T_s & \delta_t < y \end{cases} \quad (5-104)$$

Aplicando las condiciones de frontera se obtiene la siguiente expresión para $T - T_s$:

$$\frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_t} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3 \quad (5-105)$$

La expresión correspondiente de la velocidad, que se obtuvo antes, es

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \quad (5-42)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5-42) y (5-104) en la expresión integral y suponiendo $\delta = \delta_t$, la solución subsecuente da

$$\text{Nu}_x = 0.36 \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3} \quad (5-106)$$

que es un resultado idéntico en forma aunque aproximadamente 8% mayor que el análisis exacto de la ecuación (5-98).

Aquí también se aplican las conclusiones enunciadas antes para el análisis integral del impulso. En muchos casos de interés práctico, este es el único enfoque razonable que se puede emplear. El resultado logrado, ecuación (5-106), es bastante próximo al del análisis exacto para dar confianza en la aplicación de esta técnica a problemas a los que todavía no se haya encontrado un resultado analítico.

5.1-2.4 Transferencia de energía en el flujo turbulento

En la sección 5.1-1.7 se estudiaron algunos conceptos y modelos del flujo turbulento. La mayoría de los conceptos presentados en esta sección anterior se refieren a las velocidades y al intercambio del impulso. La discusión que se presenta aquí se refiere al caso de las temperaturas y el transporte de la energía térmica. Se sugiere al lector ver la discusión anterior, donde encontrará muchos de los detalles que se aplican a este desarrollo.

En la figura 5.19 se muestra un perfil de temperatura en flujo turbulento. La nomenclatura y los conceptos son semejantes a los empleados en las figuras 5.10 y 5.11.

Un "trozo" de fluido como el mostrado, que se origina en una posición $y - l$ medida a partir del eje de las x , se mueve a una nueva posición y debido a la presencia de la velocidad fluctuante v_y' , característica del flujo turbulento. Anteriormente se ha denominado como la longitud de mezclado de Prandtl a la distancia l , recorrida por el "trozo" de fluido normal a la dirección del flujo medio a través de la cual las propiedades del fluido permanecen iguales a las del punto de origen.

La razón instantánea de transporte de energía en la dirección de las y es

$$(\rho v_y')(c_p T)$$

en donde la temperatura en $y - l$ está formada por componentes media y fluctuante; se puede expresar en la forma

$$T = \bar{T} + T' \quad (5-107)$$

en la cual el significado de cada término es evidente de la ilustración de la variación de la temperatura con el tiempo en el punto mostrado

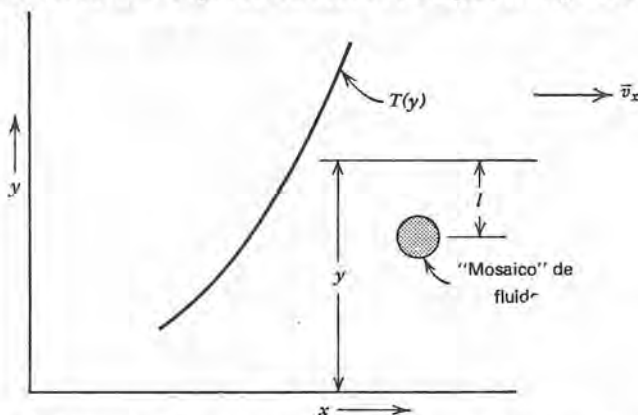


Figura 5.19 La longitud de mezclado de Prandtl en el transporte turbulento de energía.

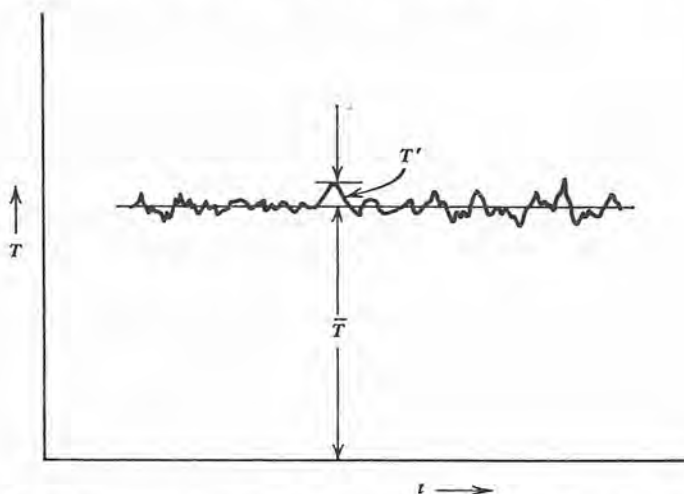


Figura 5.20 Histograma temperatura-tiempo en un punto en flujo turbulento.

en la figura 5.20. Completamente análoga a una componente de velocidad fluctuante es la fluctuación de la temperatura escrita en la forma

$$T' \simeq -l \frac{d\bar{T}}{dy} \quad (5-108)$$

Tomando en cuenta estos conceptos, se puede escribir la transferencia de calor en la dirección de las y en la forma

$$\frac{q_y}{A} = \rho c_p v_y' (\bar{T} + T')$$

Un promedio en el tiempo de esta expresión da el transporte de energía debido a efectos turbulentos; se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} \left. \frac{q_y}{A} \right|_{\text{turbulento}} &= \rho c_p \overline{(v_y' \bar{T} + v_y' T')} \\ &\quad \downarrow 0 \\ &= \rho c_p \overline{v_y' T'} \end{aligned} \quad (5-109)$$

Sustituyendo la ecuación (5-108) en vez de T' se tiene

$$\left. \frac{q_y}{A} \right|_{\text{turbulento}} = -\rho c_p \overline{v_y' l} \frac{d\bar{T}}{dy} \quad (5-110)$$

Se ve que en el flujo turbulento el término $\overline{v_y' l}$ tiene el mismo papel que α , la difusividad molecular del calor, en el flujo laminar. Por es-

ta razón se designa la cantidad ε_H como la *difusividad turbulenta del calor*, definida con la expresión

$$\varepsilon_H \equiv \overline{v'l} \quad (5-111)$$

y se escribe la expresión del flujo de energía turbulenta en la forma

$$\frac{q_y}{A} \Big|_{\text{turbulento}} = -\rho c_p \varepsilon_H \frac{dT}{dy} \quad (5-112)$$

Una expresión completa para el flujo de calor, que incluye tanto los efectos moleculares como los turbulentos es

$$\frac{q_y}{A} = -\rho c_p (\alpha + \varepsilon_H) \frac{dT}{dy} \quad (5-113)$$

El lector recordará que la razón de las difusividades moleculares del impulso y del calor, ν/α recibe el nombre de *número de Prandtl*. En forma análoga, se puede definir un *número de Prandtl de turbulencia* como la razón de las difusividades turbulentas

$$\text{Pr}_t \equiv \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_H} \quad (5-114)$$

5.1-2.5 Analogías de la transferencia de la energía y del impulso

En las discusiones y análisis que se han seguido hasta ahora, se han hecho notar muchas semejanzas en los mecanismos y las técnicas analíticas entre el impulso y la transferencia de energía. En esta sección se usa este comportamiento análogo para obtener parámetros aplicables de la transferencia de calor de sus equivalentes análogas de la transferencia del impulso.

La analogía de Reynolds. Osborne Reynolds notó primero en 1874 las semejanzas entre el impulso y la transferencia de calor.¹² En 1883, Reynolds elaboró la primera relación cuantitativa entre ambas.¹³

En la sección anterior se hizo notar que hay un número de Prandtl tanto en el flujo turbulento como en el laminar. El parámetro de turbulencia es la razón de ε_m a ε_H , en donde se encuentra que estas dos difusividades turbulentas son iguales a $\overline{lv_x'}$. Suponiendo que son correctas todas las hipótesis en las que se basa el modelo de la longitud de mezclado, entonces el número de Prandtl turbulento, que es

¹² O. Reynolds, *Proc. Manchester Lit. Phil. Soc.* 14 (1874): 7.

¹³ O. Reynolds, *Trans. Roy. Soc. (Londres)* 174A (1883): 935.

la razón de cantidades iguales, debe ser la unidad. Jenkins¹⁴ calculó la razón de $\varepsilon_H/\varepsilon_m$ para distintos valores del número de Prandtl molecular y de intensidad de turbulencia. Sus resultados indican que $\varepsilon_H/\varepsilon_m$ se aproxima a la unidad para grandes valores de ε_m/ν para todos los valores de Pr. En un régimen totalmente turbulento, es bastante razonable suponer un valor de 1 para Pr_t .

En un caso en que $Pr = 1$, ya sea que haya un flujo totalmente turbulento o un flujo laminar para el que $\nu/\alpha \simeq 1$, los gradientes sin dimensiones de la velocidad y la temperatura están relacionados de acuerdo con

$$\left. \frac{d}{dy} \left(\frac{v_x}{v_\infty} \right) \right|_{y=0} = \left. \frac{d}{dy} \left(\frac{T - T_0}{T_\infty - T_0} \right) \right|_{y=0} \quad (5-115)$$

Con $Pr = 1$ se puede escribir $k = \mu c_p$, y se puede alterar la ecuación (5-125) en la forma

$$\mu c_p \left. \frac{d}{dy} \left(\frac{v_x}{v_\infty} \right) \right|_{y=0} = k \left. \frac{d}{dy} \left(\frac{T - T_0}{T_\infty - T_0} \right) \right|_{y=0}$$

que se puede escribir como

$$\left. \frac{\mu c_p}{v_\infty} \frac{dv_x}{dy} \right|_{y=0} = - \frac{k}{T_0 - T_\infty} \left. \frac{d(T - T_0)}{dy} \right|_{y=0} \quad (5-116)$$

Por definición del coeficiente de transferencia convectiva de calor h , se tiene

$$\frac{q_y}{A} = h(T_0 - T_\infty) = -k \left. \frac{d}{dy} (T - T_0) \right|_{y=0}$$

o sea

$$h = - \frac{k}{T_0 - T_\infty} \left. \frac{d}{dy} (T - T_0) \right|_{y=0}$$

Ahora se puede escribir la ecuación (5-116) en la forma

$$h = \frac{\mu c_p}{v_\infty} \left. \frac{dv_x}{dy} \right|_{y=0} \quad (5-117)$$

Luego se recuerda la definición del coeficiente de fricción

$$C_f \equiv \frac{F/A}{\frac{\rho v_\infty^2}{2}} = \frac{\tau_0}{\frac{\rho v_\infty^2}{2}} \quad (5-4)$$

¹⁴ R. Jenkins, *Ht. Trans Fl. Mech. Inst.* Stanford, Calif.: Stanford Univ. Press, (1951): 147.

6

$$C_f = \frac{\mu \left. \frac{dv_x}{dy} \right|_{y=0}}{\frac{\rho v_\infty^2}{2}}$$

Haciendo la sustitución apropiada en la ecuación (5-117), se obtiene

$$h = (\rho v_\infty c_p) \frac{C_f}{2}$$

o, en forma adimensional,

$$\frac{h}{\rho c_p v_\infty} \equiv St = \frac{C_f}{2} \quad (5-118)$$

La ecuación (5-118) es la *analogía de Reynolds* entre la transferencia energía y la transferencia del impulso. Esta sencilla expresión permite determinar el coeficiente h del parámetro de flujo fluido C_f . La analogía de Reynolds es válida, supuesto que (1) $Pr = 1$; esto ya se discutió antes; y (2) que las fuerzas del arrastre sean totalmente de clase viscosa; esto es obvio, ya que se emplea C_f . Si el arrastre no es totalmente viscoso, entonces no son válidas la ecuación (5-5) y la analogía de Reynolds. Los casos de flujo que satisfacen el requerimiento de nada de arrastre de forma son el flujo en un conducto cerrado o todo flujo exterior en el cual no exista separación de capas límites.

La analogía de Prandtl. La restricción en la analogía de Reynolds que $Pr = 1$ es una seria limitación, por lo que se han empleado distintas técnicas para generar una expresión que pueda ser válida en un rango razonable de números de Prandtl.

En la sección 5.1-2.4 se hizo notar que el número efectivo de Prandtl en el flujo turbulento es la razón de las difusividades turbulentas y que esta razón, basada en la hipótesis de la longitud de mezclado, es aproximadamente 1. Por tanto, la analogía de Reynolds es válida en una región en que el flujo es totalmente turbulento. Sin embargo, es cierto que en todo caso de transferencia convectiva de calor hay una capa límite en la interfase sólido-fluido en que ocurre la transferencia molecular y predominan las propiedades moleculares, más que las turbulentas. Se debe dar margen para esta región en que es significativo el número de Prandtl molecular y que puede tener valores considerablemente distintos a la unidad.

En la primera aproximación a esta clase de análisis, las consideraciones se dividen en dos partes; la primera está en la región en la

cual el flujo es laminar y no hay efectos turbulentos, y en la segunda está en la región del flujo totalmente turbulento en la cual son despreciables los efectos moleculares. Estos dos regímenes de flujo se unen en alguna distancia hipotética con respecto a la frontera sólida en que $y = \xi$.

Dentro de la región del flujo laminar, las ecuaciones aplicables del impulso y del transporte de la energía son

$$\frac{\tau}{\rho} = \nu \frac{dv_x}{dy}$$

$$\frac{q_y}{A} = -\rho c_p \alpha \frac{dT}{dy}$$

Separando las variables e integrando entre $y = 0$ y $y = \xi$ se tiene en ambos casos

$$\int_0^{\nu \xi} dv_x = \frac{\tau}{\rho \nu} \int_0^{\xi} dy$$

$$\int_{T_0}^{T_\xi} dT = -\frac{q_y}{A \rho c_p \alpha} \int_0^{\xi} dy$$

Las diferencias de la velocidad y la temperatura a través de la capa laminar quedan como

$$v_\xi = \frac{\tau}{\rho \nu} \xi \quad (5-119)$$

y

$$T_\xi - T_0 = -\frac{q_y}{A \rho c_p \alpha} \xi \quad (5-120)$$

Se puede eliminar la distancia hipotética ξ entre estas dos ecuaciones para que quede

$$\frac{\rho \nu v_\xi}{\tau} = \frac{A \rho c_p \alpha}{q_y} (T_0 - T_\xi) \quad (5-121)$$

Ahora se vuelve la atención a la región del flujo totalmente turbulento donde se aplica la analogía de Reynolds. Se puede escribir la ecuación (5-118) en la forma

$$\frac{h}{\rho c_p (v_\infty - v_\xi)} = \frac{C_f}{2} \quad (5-118)$$

y, expresando h y C_f en función de sus definiciones, se obtiene

$$\frac{q_y/A}{\rho c_p (v_\infty - v_\xi)(T_\xi - T_\infty)} = \frac{\tau}{\rho(v_\infty - v_\xi)^2}$$

Un simple rearrreglo de esta expresión da una forma modificada de la analogía de Reynolds en la región de $\xi \leq y \leq \infty$.

$$\frac{\rho(v_\infty - v_\xi)}{\tau} = \frac{A\rho c_p}{q_y} (T_\xi - T_\infty) \quad (5-122)$$

Ahora se elimina T_ξ entre las ecuaciones (5-121) y (5-122) con lo que se obtiene:

$$\frac{\rho}{\tau} \left[v_\infty + v \left(\frac{v}{\alpha} - 1 \right) \right] = \frac{A\rho c_p}{q_y} (T_0 - T_\infty) \quad (5-123)$$

En este punto se introducen las definiciones de C_f y h , que son

$$C_f = \frac{\tau}{\frac{\rho v_\infty^2}{2}}$$

y

$$h = \frac{q_y/A}{T_0 - T_\infty}$$

con lo que la ecuación (5-123) se reduce a

$$\frac{v_\infty + v_\xi \left(\frac{v}{\alpha} - 1 \right)}{\frac{C_f}{2} v_\infty^2} = \frac{\rho c_p}{h}$$

Invirtiendo ambos lados de esta expresión y dividiendo entre v_∞ se obtiene la forma adimensional

$$\frac{h}{\rho c_p v_\infty} = \frac{\frac{C_f}{2}}{1 + \frac{v_\xi}{v_\infty} \left(\frac{v}{\alpha} - 1 \right)} \quad (5-124)$$

En la ecuación (5-124) son aparentes las formas conocidas sin dimensiones $St \equiv h/\rho c_p v_\infty$ y $Pr \equiv \nu/\alpha$. También es claro que, en el caso que $Pr \equiv \nu/\alpha = 1$, esta relación se reduce a la ecuación (5-118), la analogía de Reynolds. Para un número de Prandtl distinto a la unidad, el número de Stanton es una función de C_f , Pr , y la razón de la velocidad v_ξ/v_∞ . Esta última cantidad es inconveniente, por lo que se elimina en la forma que sigue.

La ecuación (5-67) expresa la condición en el borde de la subcapa laminar en la forma

$$v^+ = y^+ = 5 \quad (5-67)$$

Se puede introducir la definición de v^+ para obtener

$$v^+ \equiv \frac{v_\xi}{\sqrt{\tau/\rho}} = 5$$

junto con la del coeficiente de fricción superficial

$$C_f = \frac{\tau}{\frac{\rho v_\infty^2}{2}}$$

del que se puede escribir

$$\left(\frac{\tau}{\rho}\right)^{1/2} = v_\infty \left(\frac{C_f}{2}\right)^{1/2}$$

Ahora se puede recombinar esta expresión con la anterior para obtener

$$\frac{v_\xi}{v_\infty} = 5 \left(\frac{C_f}{2}\right)^{1/3} \quad (5-125)$$

y, con la ecuación (5-125) sustituida en la forma adecuada, la ecuación (5-124) queda

$$St = \frac{C_f/2}{1 + 5 \left(\frac{C_f}{2}\right)^{1/2} (Pr - 1)} \quad (5-126)$$

La relación anterior es la *analogía de Prandtl*. Se escribe en la forma $St = f(C_f, Pr)$, por lo que es relativamente fácil de usar. Se aplica al caso de transferencia de calor, con la condición que (1) no haya separación de capa límite, y (2) que el número de Prandtl esté en el rango moderado $0.5 < Pr < 30$.

La analogía de Prandtl es una mejora obvia a la de Reynolds, ya que se aplica a casos donde $Pr \neq 1$. Sin embargo, todavía es aproximada, ya que se hizo la suposición de que en $y^+ = 5$ hay una transición repentina de flujo completamente laminar a completamente turbulento. Un modelo más realista incluye consideraciones de la subcapa laminar, la capa de amortiguación y el núcleo turbulento, en la forma descrita y analizada en la sección 5.1-1.7. T. von Kár-

mán presentó esta clase de consideración, y el resultado, la *analogía de von Kármán*,¹⁵ fué

$$\text{St} = \frac{C_f/2}{1 + 5\left(\frac{C_f}{2}\right)^{1/2} \{\text{Pr} - 1 + \ln [1 + \frac{1}{6}(5 \text{Pr} - 5)]\}} \quad (5-127)$$

La analogía de von Kármán está sujeta a las mismas restricciones que la analogía de Prandtl. Como con la analogía de Prandtl, la ecuación (5-127) se reduce a la analogía de Reynolds para $\text{Pr} = 1$.

En la obra de Kays¹⁶ se presentan varias depuraciones a las analogías de Prandtl y de von Kármán, al igual que otras analogías basadas en distintos modelos turbulentos.

La analogía de Colburn. En 1933, A. P. Colburn¹⁷ presentó una forma analógica que defiere de las antes mencionadas. Ahora se examina el caso en el cual la analogía de Colburn tiene determinada base analítica.

El lector recuerda la discusión de la sección 5.1-2.2, en que para una capa límite laminar en una placa plana, el resultado exacto es

$$\text{Nu}_x = 0.332 \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3} \quad (5-98)$$

y, en la sección 5.1-1.5, se obtuvo el resultado

$$C_{fx} = 0.664 \text{Re}_x^{-1/2} \quad (5-33)$$

Si se dividen ambos lados a la ecuación (5-98) entre el producto $\text{Re}_x \text{Pr}^{1/3}$, y se aplica la ecuación (5-33) al resultado, se obtiene

$$\frac{\text{Nu}_x}{\text{Re}_x \text{Pr}^{1/3}} = \frac{0.332}{\text{Re}_x^{1/2}} = \frac{C_{fx}}{2} \quad (5-128)$$

Multiplicando y dividiendo el lado izquierdo de esta expresión por $\text{Pr}^{2/3}$, se tiene

$$\frac{\text{Nu}_x}{\text{Re}_x \text{Pr}^{1/3}} \frac{\text{Pr}^{2/3}}{\text{Pr}^{2/3}} = \frac{\text{Nu}_x}{\text{Re}_x \text{Pr}} \text{Pr}^{2/3} = \text{St} \text{Pr}^{2/3}$$

y la ecuación (5-128) queda

$$\text{St} \text{Pr}^{2/3} = \frac{C_f}{2} \quad (5-129)$$

La ecuación (5-129) es la expresión de la *analogía de Colburn* y se ve que es exacta para la capa límite externa laminar. Colburn

¹⁵ T. von Kármán, *Trans. ASME* 61 (1939): 705.

¹⁶ Kays, capítulo 9.

¹⁷ A. P. Colburn, *Trans. AIChE* 29 (1933): 174.

demostró que esta relación es muy efectiva para correlacionar datos para un amplio rango de casos de transferencia convectiva de calor, incluyendo distintas geometrías y casos de flujo. Concluyó que esta expresión predice valores confiables para el número de Stanton, con la condición que (1) no haya separación de capa límite y (2) que el número de Prandtl esté dentro del rango $0.5 < Pr < 50$. Como con las otras analogías presentadas, la de Colburn se reduce a la de Reynolds para $Pr = 1$.

Cada una de las expresiones de analogías presentada en esta sección ha sido de la forma $St = f(C_f, Pr)$. El requerimiento que $Pr = 1$ hace que la de Reynolds solamente sea útil a manera de aproximación general en casi todos los casos prácticos. Las expresiones de Prandtl y de von Kármán son más útiles, aunque también más complejas, que la expresión de la analogía de Reynolds. La analogía de Colburn incluye la mejor combinación de las propiedades; es válida en un rango de números de Prandtl y es una expresión muy simple.

En este punto cabe hacer otra observación relativa al número de Prandtl. El rango de números de Prandtl para los que son válidas las expresiones presentadas hasta este momento está entre 0.5 y 50. Este rango es adecuado para los gases y la mayoría de los líquidos usados con mayor frecuencia. Los líquidos cuyos números de Prandtl están fuera de este rango varían entre los metales líquidos, cuyos valores típicos de Pr están en 0.01 a 0.03 y los aceites pesados, cuyos valores de Pr son de 10^5 y mayores.

5.1-2.6 Flujo en un tubo: soluciones para el flujo de calor constante de pared y temperatura constante de superficie de pared

El problema básico para el que son útiles las expresiones análogas de la sección anterior es del flujo en un conductor cerrado. El flujo en un conductor, cuyo tipo más común es dentro de un tubo, es totalmente de naturaleza viscosa, con lo que satisface el requerimiento en todas las expresiones analógicas que no exista separación de capa límite. En la práctica, pueden existir casi cualesquiera variaciones o combinaciones de condiciones de frontera en una superficie de tubo. Los casos límites son los del flujo constante de calor y de temperatura constante de superficie. La primera condición se puede lograr experimentalmente calentando eléctricamente a través de una funda de calentador o enrollado de manera uniforme en listón o alambre de calentamiento alrededor de un tubo. En la práctica casi se logra la condición de temperatura constante condensando vapor saturado en la superficie exterior del tubo. Ahora se obtienen las expresiones correspondientes a cada una de estas condiciones.

Flujo de calor de pared especificado. Las consideraciones se basan en el volumen de control de espesor Δx y limitado por las paredes del tubo en la forma mostrada en la figura 5.21.

Un análisis de la primera ley de la termodinámica para el caso de estado estable da

$$q_1 - q_2 + q_3 = 0$$

en donde q_1 y q_2 representan la energía transportada hacia y desde el volumen de control por el flujo del fluido y q_3 es la que se transfiere al volumen de control por la condición en la pared. Se pueden evaluar individualmente los términos como sigue

$$q_1 = \rho \frac{\pi D^2}{4} v_x c_p T|_x$$

$$q_2 = \rho \frac{\pi D^2}{4} v_x c_p T|_{x+\Delta x}$$

$$q_3 = \frac{q_r}{A} \pi D \Delta x$$

Haciendo las sustituciones en la expresión de la primera ley, se tiene

$$\rho \frac{\pi D^2}{4} c_p (v_x T|_{x+\Delta x} - v_x T|_x) - \frac{q_r}{A} \pi D \Delta x = 0$$

Para el flujo totalmente desarrollado, $v_x \neq v_x(x)$; en consecuencia, se puede reorganizar la expresión en la forma

$$\rho \frac{\pi D^2}{4} c_p v_x \frac{T|_{x+\Delta x} - T|_x}{\Delta x} - \frac{q_r}{A} \pi D = 0$$

y tomando el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, se tiene

$$\rho c_p v_x \frac{D}{4} \frac{dT}{dx} - \frac{q_r}{A} = 0$$

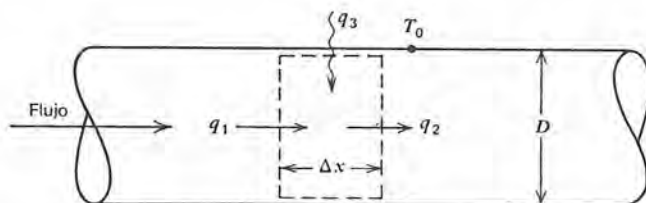


Figura 5.21 Volumen de control para el análisis de transferencia de calor en flujo de tubo con flujo especificado de calor de pared.

Ahora se puede obtener el gradiente de temperatura:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{\rho c_p v_x} \frac{q_r}{\frac{D}{4}} \quad (5-130)$$

y, después de separar las variables e integrar, se obtiene una expresión para la temperatura media del fluido en función de la posición a lo largo del tubo

$$T - T_e = \frac{1}{\rho c_p v_x} \frac{D}{4} \int_0^x \frac{q_r}{A} dx \quad (5-131)$$

que, para el caso de flujo constante de calor de pared es

$$T - T_e = 4 \frac{q_r/A}{\rho c_p v_x} \frac{x}{D} \quad (5-132)$$

A la entrada, $x = 0$, la temperatura es T_e .

Se puede emplear la ecuación (5-131) con cualquier función conocida para el flujo de calor de la pared. Kays¹⁸ da un análisis muy completo de la transferencia de calor en un tubo con distintas distribuciones de flujo superficial de calor.

Una cantidad que con frecuencia interesa a un ingeniero es la temperatura superficial de un tubo en el que fluye un refrigerante. En este caso, conociendo el flujo de calor y disponiendo de la temperatura media por medio de la ecuación (5-132), se puede encontrar la temperatura superficial por medio de la ecuación

$$T_0 = T_\infty + \frac{q_r/A}{h} \quad (5-133)$$

Usando la expresión analógica aplicable de la sección anterior se puede evaluar el coeficiente de transferencia convectiva de calor.

Ejemplo 5.3

El flujo de calor a lo largo de un tubo varía senoidalmente de acuerdo con la expresión

$$\frac{q}{A} = 600 + 1800 \sin \frac{\pi x}{L}$$

¹⁸ Kays, capítulo 10.

en donde q/A está en Btu/hr-ft². La longitud del tubo es igual a 10 ft y su diámetro igual a 1 in. Mostrar, en función de x ,

- el flujo local de calor.
- la temperatura media del fluido.
- la temperatura superficial local.

Se puede suponer que es válida la condición totalmente desarrollada tal que h_x es constante. El fluido que fluye es agua que entra a la velocidad de 1 ft/seg a la temperatura de 50°F.

Se pueden calcular los niveles de flujo de calor directamente de la expresión dada. Sustituyendo las propiedades aplicables, se tiene

$$\frac{q}{A} = 600 + 1800 \sin \pi \frac{x}{10}$$

en donde x está en pies.

La ecuación (5-131) da la temperatura media del fluido. Después de sustituir las cantidades adecuadas, la expresión de la temperatura media es

$$\begin{aligned} T_x - 50 &= \left[\frac{1}{\left(62.4 \frac{\text{lb}_m}{\text{ft}^3} \right) \left(1 \frac{\text{Btu}}{\text{lb}_m \cdot ^\circ\text{F}} \right) \left(1 \frac{\text{ft}}{\text{seg}} \right) \left(\frac{1 \text{ ft}}{48} \right) \left(\frac{3600 \text{ seg}}{\text{hr}} \right)} \right] \\ &\quad \left[\int_0^x \left(600 + 1800 \sin \frac{\pi x}{L} \right) dx \frac{\text{Btu}}{\text{hr-ft}} \right] \\ &= \left(\frac{1}{4680} \right) \left[600x - 1800 \frac{L}{\pi} \cos \frac{\pi x}{L} \right]_0^x \\ T_x - 50 &= 0.128 \left[x - \frac{30}{\pi} \cos \frac{\pi x}{L} \right]_0^x \\ &= 0.128 \left[x + 9.54 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{L} \right) \right] \end{aligned}$$

Más adelante se tabulan los valores de q_x/A y de T_x y aparecen graficados en la figura 5.22. Se ve que la temperatura del fluido cambia en menos de 4°F en los 10 ft de longitud de tubo.

Usando la ecuación (5-133) se determina la temperatura de la superficie del tubo; se usa la analogía de Colburn para predecir un valor de h .

Primeramente se obtiene el valor del número de Reynolds

$$\text{Re} = \frac{Dv_x}{\nu} = \frac{(1/12 \text{ ft}) \left(1 \frac{\text{ft}}{\text{seg}} \right)}{1.25 \times 10^{-5} \text{ ft}^2/\text{seg}} = 6.66 \times 10^3$$

Al leer el valor de ν en la tabla del apéndice se supuso una temperatura promedio de película de 55°F. Con este valor para Re , suponiendo tubería lisa de 1 in, se puede

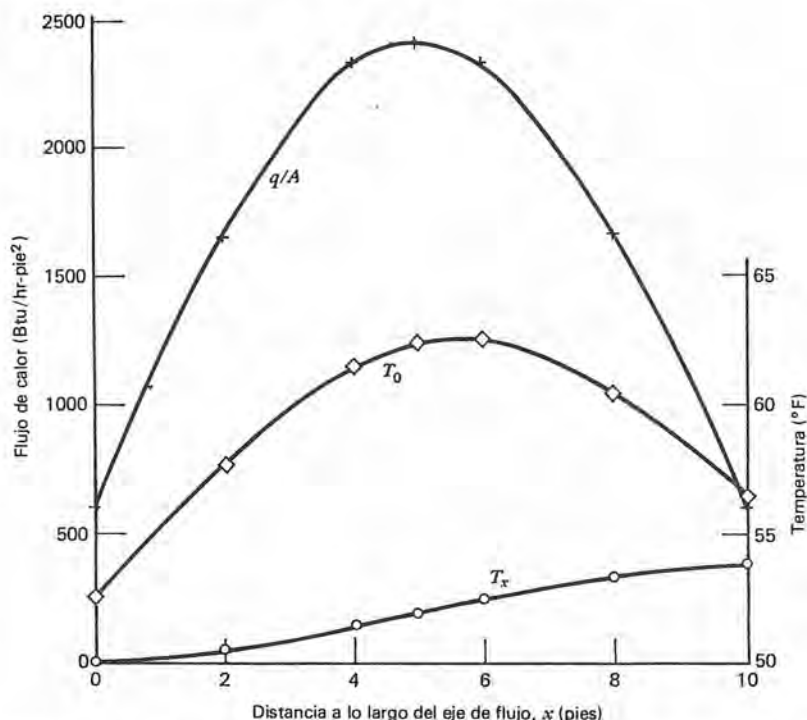


Figura 5.22 Flujo de calor, temperatura de fluido y temperatura de superficie de pared para agua que fluye en un tubo de una pulgada de diámetro.

usar la figura 5.6 para obtener C_f ; el valor aplicable es 0.0084. A 55°F, Pr para el agua es 8.2. Ahora se puede determinar el número de Stanton como sigue

$$\text{StPr}^{2/3} = \frac{C_f}{2}$$

$$\text{St} = \frac{0.0084}{2} (8.2)^{-2/3} = 0.00103$$

Luego se obtiene el coeficiente de transferencia de calor

$$h = \text{St} \rho c_p v_x = (1.03 \times 10^{-3}) \left(62.4 \frac{\text{lb}_m}{\text{ft}^3} \right) \left(\frac{1 \text{ Btu}}{\text{lb}_m \cdot ^\circ\text{F}} \right) \left(\frac{1 \text{ ft}}{\text{sec}} \right) \left(\frac{3600 \text{ sec}}{\text{hr}} \right)$$

$$= 231 \text{ Btu/hr-ft}^2 \cdot ^\circ\text{F}$$

Ahora se puede usar este valor de h en la ecuación (5-133) para obtener las temperaturas superficiales del tubo. A continuación se muestra la tabla de valores de T_0 y la gráfica de los mismos con q/A y T_x .

x	q/A	T_x	T_0
0	600	50	52.6
2	1658	50.5	57.7
4	2312	51.4	61.4
5	2400	51.9	62.2
6	2312	52.4	62.4
8	1658	53.2	60.4
10	600	53.7	56.3

Temperatura constante de superficie de pared. La figura 5.23 ayudará en la obtención de una expresión analítica adecuada para el caso de temperaturas constantes de superficie.

Como en el caso considerado antes, en el estado estable

$$q_1 - q_2 + q_3 = 0$$

Evaluando las q 's por separado se obtiene:

$$q_1 = \rho \frac{\pi D^2}{4} c_p v_x T|_x$$

$$q_2 = \rho \frac{\pi D^2}{4} c_p v_x T|_{x+\Delta x}$$

$$q_3 = h\pi D \Delta x (T_0 - T)$$

Sustituyendo en forma adecuada en la expresión para la primera ley se tiene

$$\rho \frac{\pi D^2}{4} c_p (v_x T|_{x+\Delta x} - v_x T|_x) - h\pi D \Delta x (T_0 - T) = 0$$

Nuevamente considerando que se ha desarrollado totalmente el flujo en donde $v_x \neq v_x(x)$, dividiendo entre Δx y reorganizando, se obtiene

$$\rho c_p v_x \frac{D}{4} \frac{T|_{x+\Delta x} - T|_x}{\Delta x} + h(T - T_0) = 0$$

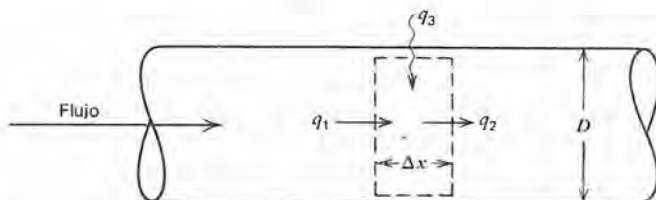


Figura 5.23 Volumen de control para el análisis de la transferencia de calor en flujo de tubo con una temperatura constante de superficie de tubo.

En el límite, cuando $\Delta x \rightarrow 0$, queda

$$\rho c_p v_x \frac{D}{4} \frac{dT}{dx} + h(T - T_0) = 0$$

con lo que se puede escribir el gradiente de la temperatura en la forma

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{h}{\rho c_p v_x} \frac{4}{D} (T - T_0) \quad (5-134)$$

Ahora se separan las variables y se integra desde la entrada hasta alguna posición x a lo largo del eje de flujo en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \int_{T_e - T_0}^{T - T_0} \frac{dT}{T - T_0} &= -\frac{h}{\rho c_p v_x} \frac{4}{D} \int_0^x dx \\ \ln \frac{T - T_0}{T_e - T_0} &= -\frac{h}{\rho c_p v_x} \frac{4}{D} x \end{aligned} \quad (5-135)$$

con lo que se puede expresar la variación de la temperatura con x como sigue

$$\frac{T - T_0}{T_e - T_0} = e^{-St \ 4(x/D)} \quad (5-136)$$

Es necesario que x/D sea mayor que 60 con el fin de que sea válida la suposición de condiciones totalmente desarrolladas (esto es $h \neq h(x)$).

Note que del análisis el número de Stanton apareció en forma bastante natural en la ecuación (5-136). La determinación final de $T(x)$ requiere que se evalúe St . Se pueden usar algunas de las expresiones análogas presentadas en la sección anterior para este propósito.

En el ejemplo 5.4 se ilustra el uso de la ecuación (5-136) y las analogías presentadas en la sección 5.1-2.5.

Ejemplo 5.4

Se hace entrar agua a 10 ft/seg en un tubo de 1 in de diámetro a 50°F. Por fuera del tubo, en la pared del mismo, se está condensando vapor saturado de pentano a 96°F. Se puede suponer que esta temperatura es constante a lo largo de la superficie interior del tubo. Determinar la temperatura de salida del agua y la transferencia total de calor en los 10 ft de tubo a) la analogía de Reynolds, b) la analogía de Prandtl, c) la analogía de von Kármán y d) la analogía de Colburn.

Cada una de estas expresiones análogas involucra la evaluación de C_f de la figura 5.6 después de calcular Re . El número de Reynolds incluye ν que es una

ción fuerte de la temperatura. Todas las expresiones, excepto la analogía de Reynolds, involucran Pr , que también depende de la temperatura. Entonces, en este punto se puede llegar a la conclusión que antes de resolver el problema para determinar la temperatura de salida, conviene tener una buena estimación de la misma. Se debe emplear un procedimiento de prueba error para resolver este problema y otros semejantes. El procedimiento aparece ilustrado en el diagrama de flujo de la figura 5.24.

En este ejemplo está muy simplificado el uso de este algoritmo debido a que los extremos de temperaturas están a 46°F entre sí. Se supone inicialmente que $T_{\text{salida}} = 78^{\circ}\text{F}$. Por tanto, la temperatura promedio del fluido es de 64°F y la temperatura promedio de película es de 80°F . Inicialmente se evalúan las propiedades de la película a 80°F ; el número de Reynolds es

$$Re = \frac{Dv}{\nu} = \frac{(1/12 \text{ ft})(10 \text{ ft/seg})}{(0.929 \times 10^{-5} \text{ ft}^2/\text{seg})} = 8.97 \times 10^4$$

De la figura 5.6 se tiene que el valor correspondiente de C_f para un tubo liso es 0.0046. Para el número de Stanton se tiene, por cada una de las cuatro analogías,

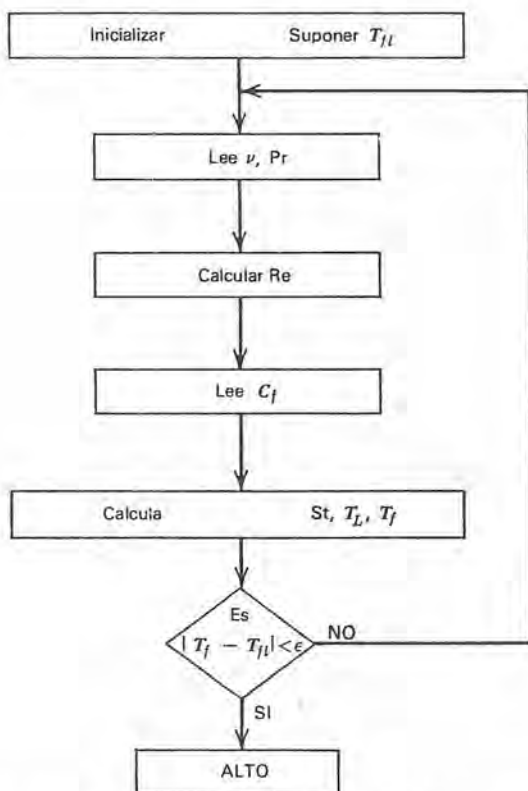


Figura 5.24 Diagrama de flujo para la evaluación de la temperatura de salida del fluido en un tubo con temperatura constante de pared.

a) Analogía de Reynolds

$$St = \frac{C_f}{2} = 0.0023$$

b) Analogía de Prandtl

$$St = \frac{C_f/2}{1 + 5\sqrt{\frac{C_f}{2}}(Pr - 1)}$$

$$= \frac{0.0023}{1 + 5(0.048)(4.89)} = 0.00106$$

c) Analogía de von Kármán

$$St = \frac{C_f/2}{1 + 5\sqrt{\frac{C_f}{2}} \left[Pr - 1 + \ln \left[1 + \frac{1}{6}(5Pr - 5) \right] \right]}$$

$$= \frac{0.0023}{1 + 5(0.048)[(4.89) + \ln(5.08)]} = 0.000897$$

d) Analogía de Colburn

$$StPr^{2/3} = \frac{C_f}{2}$$

$$St = 0.0023(5.89)^{-2/3} = 0.000705$$

Sustituyendo cada uno de estos valores de St en la ecuación (5-136), uno a la vez, se tiene para T_L ,

a) $T_L = 65.3^\circ\text{F}$

b) $T_L = 77.6^\circ\text{F}$

c) $T_L = 80.0^\circ\text{F}$

d) $T_L = 82.7^\circ\text{F}$

Los resultados de las analogías de Prandtl, von Kármán y Colburn dan resultados razonablemente consistentes. El resultado de la analogía de Reynolds difiere mucho del resto, debido al valor de $Pr = 5.87$. La temperatura de salida resultante es muy cercana a la supuesta para que no se requieran pruebas adicionales.

Se puede calcular fácilmente la transferencia de calor del aumento en la temperatura del agua, de acuerdo con

$$q = \rho A v c_p (T_L - T_e)$$

En la tabla siguiente se resumen los resultados de este ejemplo.

	$T_{\text{salida}} (^{\circ}\text{F})$	q (Btu/seg)
Analogía de Reynolds	65.3	52
Analogía de Prandtl	77.6	93.9
Analogía de von Kármán	80.0	102.0
Analogía de Colburn	82.7	111.2

5.2 CONVECCION NATURAL: CONSIDERACIONES TEORICAS Y EXPERIMENTALES

Gran parte de la teoría de la sección anterior desarrollada específicamente para la convección forzada sigue siendo válida para la convección natural. Sin embargo, hay algunas diferencias obvias, que se señalarán en breve. Se presenta algo de teoría limitada para la convección natural, junto con resultados empíricos aceptados, suficientes para resolver la mayoría de los problemas que se puedan encontrar con relación a la transferencia del calor por el mecanismo de la convección natural.

Se mencionó que el fenómeno de convección natural involucra el intercambio de calor entre un fluido y una frontera adyacente cuando ocurre movimiento del fluido debido a las diferencias de densidad como resultado del intercambio de energía. Esencialmente, el espesor de las capas límite térmica e hidrodinámica es igual en la convección natural, ya que los gradientes de velocidad son el resultado de gradientes de temperatura. La orientación y la geometría del límite sólido son de primordial importancia. Las consideraciones a seguir se presentan de acuerdo con la geometría.

5.2-1 Convección en fluidos adyacentes a una sola pared vertical

En la figura 5.25 se presentan esta geometría y la geometría asociadas. Las siguientes son las ecuaciones diferenciales dominantes aplicables en la región de la capa límite:

continuidad

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (5-137)$$

ecuación del movimiento

$$\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + (\rho_\infty - \rho)g \quad (5-138)$$

ecuación de energía

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (5-139)$$

En este conjunto de ecuaciones se hacen las aproximaciones usuales de capa límite, incluyendo la suposición de que el flujo es incompresible;

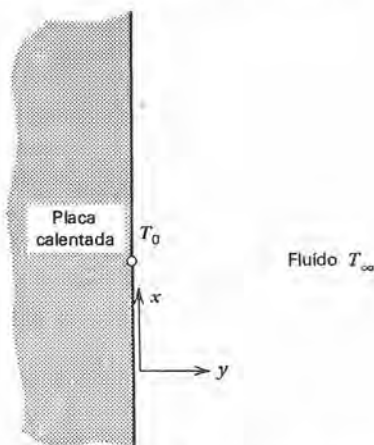


Figura 5.25 Coordenadas para el tratamiento de la convección natural adyacente a una pared vertical.

los efectos de disparidad de densidad solamente están presentes en el término de boyantez, que está en la ecuación del movimiento, ecuación (5-138). Este tratamiento de la densidad comprende la llamada *aproximación de Boussinesq*.

Las condiciones de frontera que son aplicables a este problema son

$$\begin{aligned} T(x, y) &= T_0 && \text{en } (x, 0) \\ T(x, y) &= T_\infty && \text{en } (x, \infty) \\ T(x, y) &= T_\infty && \text{en } (0, y) \\ v_x(x, y) &= 0 && \text{en } (x, 0) \\ v_x(x, y) &= 0 && \text{en } (x, \infty) \end{aligned}$$

Lorenz¹⁹ y Schmidt y Beckmann²⁰ han logrado soluciones a estas ecuaciones con distintas suposiciones de simplificación. La solución de Lorenz está basada en la suposición de que v_x y T son solamente funciones de y . Schmidt y Beckmann midieron tanto el perfil de velocidad como el de la temperatura dentro de la capa límite y encontraron que estos perfiles varían significativamente en distintos lugares a lo largo de la placa. En las figuras 5.26 y 5.27 se muestran los datos de Schmidt y Beckmann para una placa calentada de 12.5 cm de altura.

¹⁹ L. Lorenz, *Wiedemann Ann. d. Phys.* 13 (1881): 582.

²⁰ E. Schmidt y W. Beckmann, *Tech. Mech. u. Thermodynamik* 1 (1930): 341, 391.

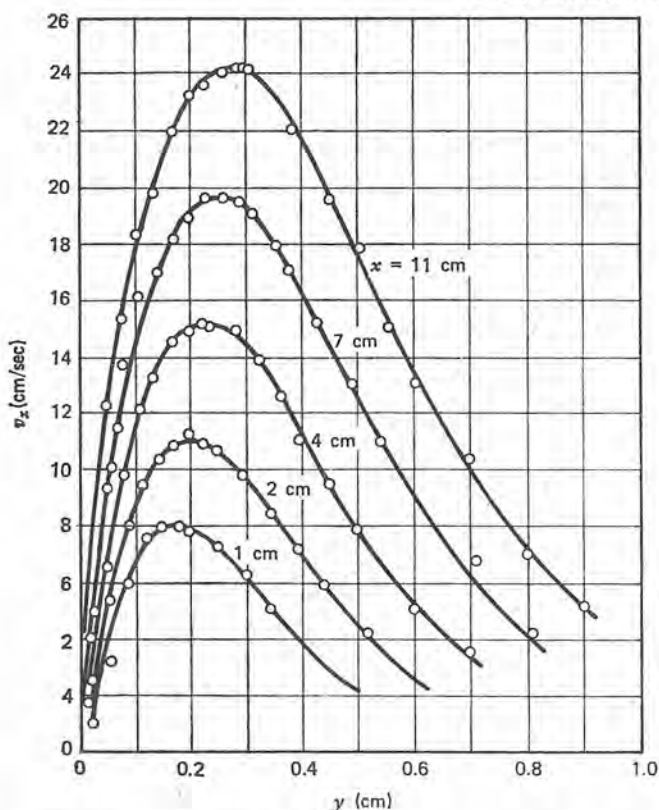


Figura 5.26 Perfiles de velocidad en el aire adyacente a una placa vertical calentada.

E. Pohlhausen²¹ y Ostrach²² lograron soluciones de similitud a las ecuaciones (5-137), (5-138) y (5-139). El lector puede consultar la obra de Schlichting²³, donde encontrará los detalles del análisis. Para un fluido con $Pr = 0.733$, los resultados para la placa vertical calentada son

$$Nu_x = 0.359 Gr_x^{1/4} \quad (5-140)$$

en donde Gr_x es el número local de Grashof, definido en la forma

$$Gr_x \equiv \frac{gx^3(T_0 - T_\infty)}{\nu^2 T_\infty} \quad (5-141)$$

²¹ E. Pohlhausen, 115.

²² S. Ostrach, *NACA Report 1111* (1953).

²³ Schlichting, pág. 332.

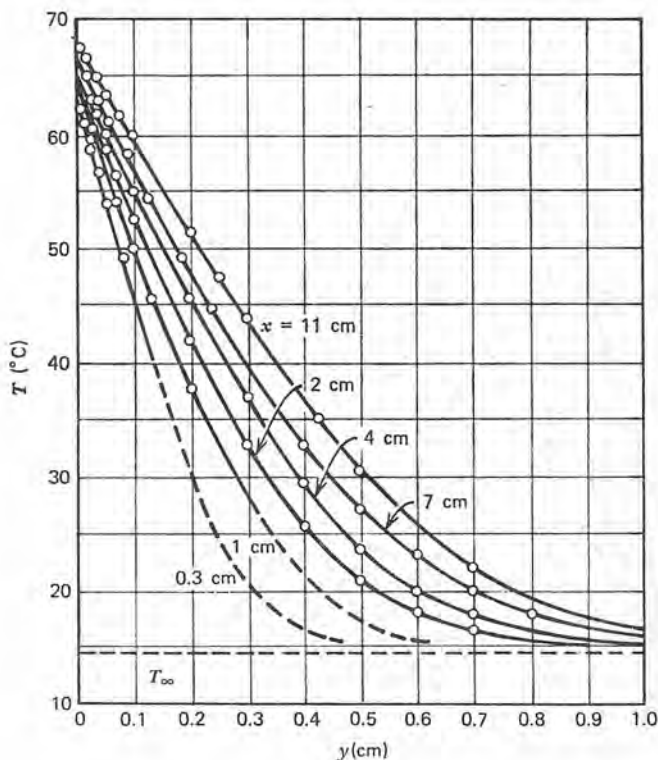


Figura 5.27 Perfiles de temperatura en el aire adyacente a una placa vertical calentada.

Se puede determinar el número medio de Nusselt en la forma usual de la expresión para el parámetro local; el resultado es

$$\text{Nu}_L = 0.478 \text{Gr}_L^{1/4} \quad (5-142)$$

Schuh²⁴ extendió los resultados de Pohlhausen para $\text{Pr} = 0.733$ para que se aplicaran a mayores valores del número de Prandtl. En la tabla 5.2 se dan los valores apropiados de Nu_L para valores Pr hasta 1000.

Tabla 5.2 Valores de Nu_m para convección natural adyacente a una placa vertical calentada

Pr	$\text{Nu}_L/\text{Gr}_L^{1/4}$	$\text{Nu}_L/\text{Gr}_L^{1/4}\text{Pr}^{1/4}$
0.73	0.478	0.517
10	1.09	0.612
100	2.06	0.652
1000	3.67	0.653

²⁴ H. Schuh, sin publicar; vea Schlichting, pág. 335.

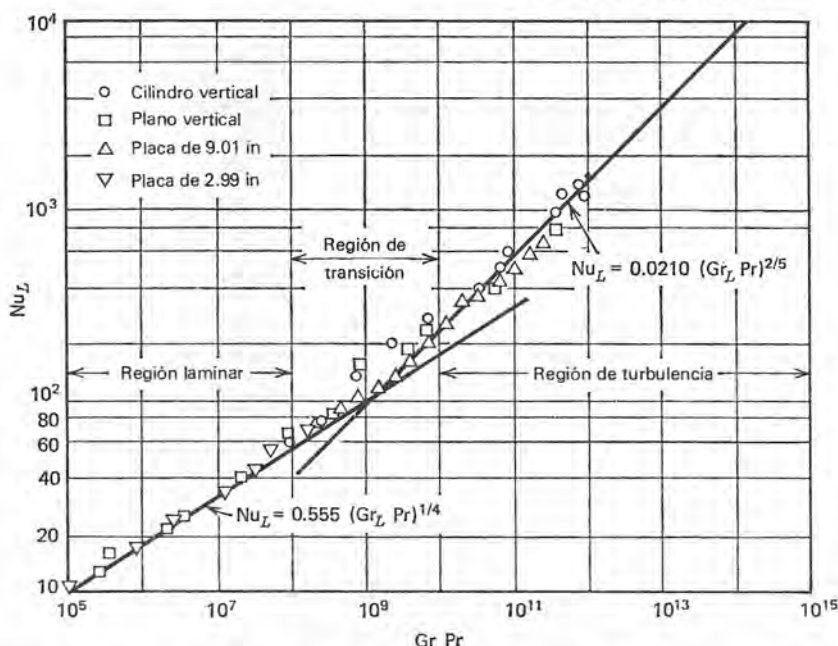


Figura 5.28 Correlación de datos de convección natural para superficies verticales (De E. R. G. Eckert y T. W. Jackson, NACA RFM 50 D25, julio de 1950. Con autorización del editor.)

En la figura 5.28 se muestran los datos de Eckert y Jackson²⁵ en forma de gráfica de Nu_L contra $GrPr$ tanto para placas verticales como para cilindros. Es evidente un cambio en los datos en $GrPr \cong 10^9$, lo que se atribuye a una transición de flujo laminar a turbulento en la capa límite. Las relaciones de correlación sugeridas por Eckert y Jackson son

$$Nu_L = 0.555(GrPr)^{1/4} \text{ para } GrPr < 10^9 \quad (5-143)$$

y

$$Nu_L = 0.0210(GrPr)^{2/5} \text{ para } GrPr > 10^9 \quad (5-144)$$

Eckert²⁶ presenta un análisis integral del caso de la capa límite laminar para una temperatura constante de pared. Al final de este capítulo se sugiere duplicar este trabajo a manera de ejercicio. La expresión resultante para el número local de Nusselt es

$$Nu_x = 0.508 \frac{Pr^{1/2} Gr_x^{1/4}}{(0.952 + Pr)^{1/4}} \quad (5-145)$$

²⁵E. R. G. Eckert y T. W. Jackson, *NACA Rept. 1015* (1951).

²⁶E. R. G. Eckert, *Introduction to the Transfer of Heat and Mass* (Nueva York: McGraw-Hill, 1951).

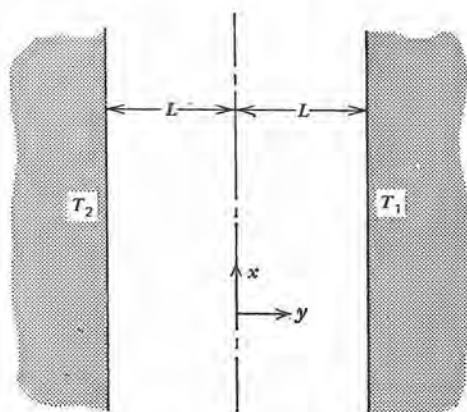


Figura 5.29 Convección natural entre paredes planas verticales paralelas.

y la expresión

$$\text{Nu}_L = 0.678 \frac{\text{Pr}^{1/2} \text{Gr}_L^{1/4}}{(0.952 + \text{Pr})^{1/4}} \quad (5-146)$$

da el número medio de Nusselt para una placa de altura L .

Sparrow y Gregg ²⁷ resolvieron el caso de la convección natural laminar adyacente a una placa vertical con flujo de calor superficial uniforme.

White ²⁸ ha investigado este problema para el caso de fluidos de bajo número de Prandtl tanto para condiciones de superficie de temperatura constante, como de flujo constante de calor.

5.2-2 Convección natural en canales verticales

En el caso de dos paredes verticales planas, una calentada y otra enfriada con efectos extremos despreciables es posible tener una solución analítica simple. En la figura 5.29 se muestra el sistema con la nomenclatura adecuada. La pared calentada está a una temperatura constante T_1 , y la pared enfriada está a una temperatura constante T_2 . Despreciando los efectos en los extremos, la temperatura promedio T_{prom} es $(T_1 + T_2)/2$.

Suponiendo flujo laminar estable, la forma aplicable de la primera ley es

²⁷ E. M. Sparrow y J. L. Gregg, *Trans ASME* 78 (1956): 435.

²⁸ D. H. White, "An Experimental Investigation of Natural Convection Heat Transfer from Vertical Flat Plates in Mercury" (Tesis para doctorado, Oregon State University, 1971).

$$\frac{d^2T}{dy^2} = 0 \quad (5-147)$$

expresión que se puede separar e integrar dos veces para obtener, para la variación de la temperatura,

$$T = c_1 y + c_2$$

Aplicando las condiciones de frontera $T(L) = T_1$ y $T(-L) = T_2$, se obtiene

$$T = \frac{\Delta T}{2} \frac{y}{L} + T_{\text{prom}} \quad (5-148)$$

en donde ΔT es la diferencia $T_1 - T_2$.

Suponiendo que el flujo es estable, laminar y unidimensional, y despreciando los efectos en los extremos, la ecuación del movimiento es

$$\mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} = \frac{dp}{dx} + \rho g \quad (5-149)$$

Se puede desarrollar la densidad ρ en una serie de Taylor alrededor de la temperatura promedio, de acuerdo con

$$\rho = \rho_{\text{prom}} + \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_{T_{\text{prom}}} (T - T_{\text{prom}}) + \dots$$

Expresando la derivada de la densidad en función del coeficiente de dilatación térmica β y despreciando los términos de mayor orden, se puede escribir

$$\rho = \rho_{\text{prom}} - \rho \beta|_{T_{\text{prom}}} (T - T_{\text{prom}}) \quad (5-150)$$

Para el caso en el cual la presión solamente es hidrostática, el gradiente de la presión se escribe en la forma

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g \quad (5-151)$$

Se pueden sustituir las ecuaciones (5-150) y (5-151) en la ecuación (5-149) para obtener

$$\mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} = -\rho \beta g (T - T_{\text{prom}}) \quad (5-152)$$

que indica precisamente la igualdad entre las fuerzas viscosa y boyante.

Ahora se puede sustituir la ecuación (5-148), con lo que se tiene

$$\mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} = -\rho \beta g \frac{\Delta T}{2} \frac{y}{L} \quad (5-153)$$

luego se separa e integra dos veces esta relación para obtener

$$v_x = -\frac{\rho \beta g \Delta T}{\mu} \frac{y^3}{12 L} + c_1 y + c_2$$

Las condiciones de frontera que se aplican son $v_x(\pm L) = 0$; cuando se sustituyen, la expresión del perfil de velocidad queda como

$$v_x = \frac{\rho \beta g \Delta T L^2}{12 \mu} \left[\frac{y}{L} - \left(\frac{y}{L} \right)^3 \right] \quad (5-154)$$

Cuando se sustituyen las velocidad y longitud adimensionales, definidas como

$$v_x^* \equiv \frac{L v_x \rho}{\mu}$$

y

$$y^* \equiv y/L$$

la expresión de la velocidad queda como

$$v_x^* = \frac{1}{12} \left[\frac{\rho^2 \beta g L^3 \Delta T}{\mu^2} \right] (y^* - y^{*3})$$

ó como

$$v_x^* = \frac{\text{Gr}}{12} (y^* - y^{*3}) \quad (5-155)$$

en donde se observa que el término entre corchetes es el número de Grashof.

En la figura 5.30 se muestra la variación de la temperatura y la velocidad entre dos placas verticales paralelas. Los perfiles son representaciones gráficas de las ecuaciones (5-148) para la temperatura y (5-154) para la velocidad.

Varios investigadores se han preocupado por el caso de fluidos con encierros rectangulares de altura H y ancho L para una pared vertical calentada y otra enfriada. En estos casos, normalmente se expresan las correlaciones de la transferencia del calor en la forma $\text{Nu} = \text{Nu}(\text{Gr}, \text{Pr}, H/L)$. Pagnani²⁹ presenta un resumen de las corre-

²⁹ B. R. Pagnani, "An Explicit Finite-Difference Solution for Natural Convection in Air in Rectangular Enclosures" (Tesis para doctorado, Oregon State University, 1968).

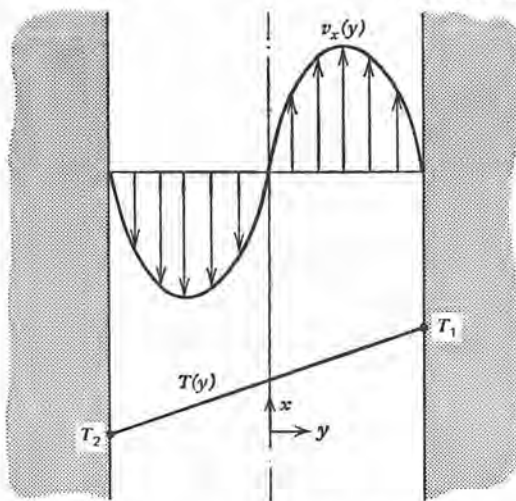


Figura 5.30 Perfiles de temperatura y velocidad en la convección natural entre dos paredes verticales planas.

laciones para esta geometría. Una correlación empírica por Jakob³⁰ de datos experimentales, principalmente de Mull y Reiher³¹, incluye tres regiones en que los efectos dominantes fueron la conducción, el flujo laminar y el flujo turbulento, respectivamente. Las correlaciones y los números correspondientes de Grashof son

conducción: $Gr_L < 2 \times 10^3 \quad Nu_L = 1 \quad (5-156)$

flujo laminar: $2 \times 10^3 \leq Gr_L \leq 2 \times 10^5 \quad Nu_L = 0.18 Gr^{1/4} \left(\frac{H}{L}\right)^{-1/9} \quad (5-157)$

flujo turbulento: $2 \times 10^5 \leq Gr_L \leq 2 \times 10^7 \quad Nu_L = 0.065 Gr^{1/3} \left(\frac{H}{L}\right)^{-1/9} \quad (5-158)$

Elenbaas³² desarrolló la gráfica mostrada en la figura 5.31 para canales abiertos entre paredes planas verticales paralelas. Los valores de esta gráfica solamente son válidos para el flujo laminar.

³⁰ M. Jakob, *Trans ASME* 68 (1946): 189.

³¹ W. Mull y H. Reiher, *Beihefte Z. Gesundheits-ingenieure* 28 (1930): 126.

³² W. Elenbaas, *Phillips Research Rept.* 3, N. V. Phillips Gloeilamp-enfabrieken, Eindhoven, Neth. (1948).

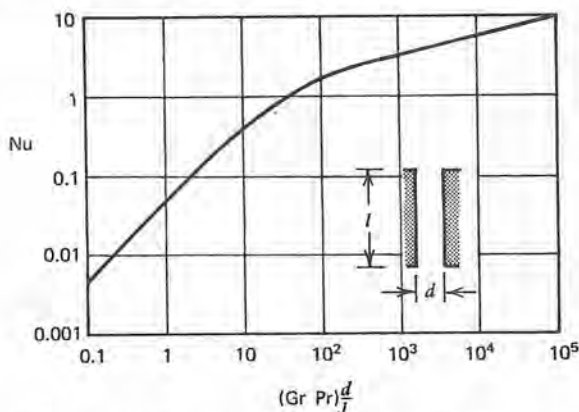


Figura 5.31 Correlación para la convección natural de flujo laminar entre dos paredes planas verticales.

Colwell³³ obtuvo datos de transferencia de calor junto con perfiles de velocidad para el caso de convección natural con mercurio en un canal vertical con fronteras con flujo de calor constante. Colwell y Welty³⁴ presentaron correlaciones para flujos de convección natural laminar en un canal vertical de extremo abierto que se obtuvieron para un rango de anchos de canales. La figura 5.32 muestra los datos y las correlaciones generalizadas para los casos en que se calentó una pared del canal a la vez que la otra se mantuvo aislada, y cuando ambas paredes se calentaron uniforme y simétricamente. El fluido en cuestión fué el mercurio con $Pr = 0.022$. El comportamiento que muestra el mercurio es típico del que se espera para otros fluidos de bajo número de Prandtl (metales líquidos).

Se obtuvieron las correlaciones de los datos, incluyendo condiciones de ambas paredes, integrados en la altura del canal, en la forma

$$Nu_D = 0.438 \left(Gr_D^* \frac{D}{L} \right)^{0.141} \quad 10^{-2} < Gr_D^* \frac{D}{L} \leq 10^3 \quad (5-159)$$

$$Nu_D = 1.16 + 0.269 \left(Gr_D^* \frac{D}{L} \right)^{0.180} \quad 10^{-3} \leq Gr_D^* \frac{D}{L} \leq 10^9 \quad (5-160)$$

en donde

$$Nu_D = \frac{hD}{k}, \quad \text{Formula en número medio de Nusselt}$$

³³R. G. Colwell, "Experimental Investigation of Natural Convection of Mercury in an Open, Uniformly Heated, Vertical Channel" (Tesis para doctorado Oregon State University, 1974).

³⁴R. G. Colwell y J. R. Welty, "An Experimental Study of Natural Convection with Low Prandtl Number Fluids in a Vertical Channel with Uniform Wall Heat Flux," publicación de ASME 73-HT-52, presentado en la 14 Conferencia Nacional de Transferencia de Calor, Atlanta, Georgia, agosto 1973.

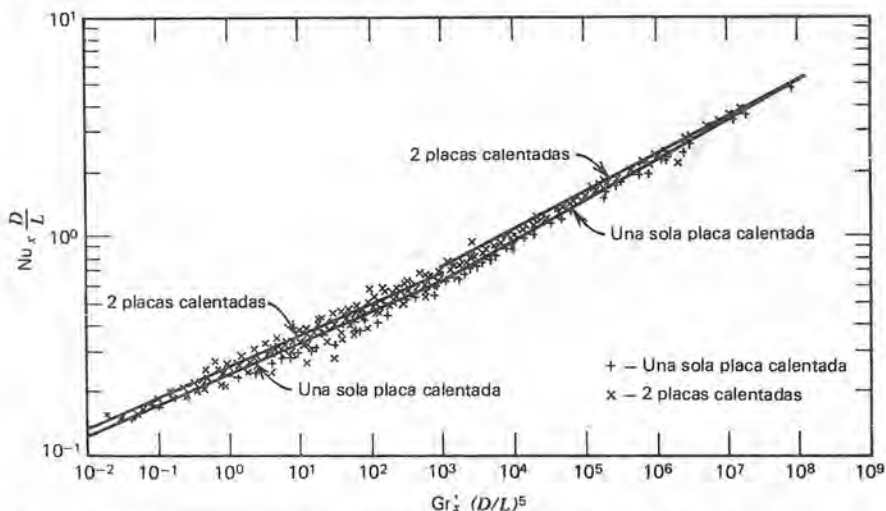


Figura 5.32 Correlaciones de transferencia generalizada de calor para la convección natural con mercurio en un canal vertical (R. G. Clowell y J. R. Welty, publicación ASME 73-HT-52, presentada en la 14 Conferencia Nacional de la Transferencia de Calor, Atlanta, Georgia, agosto 1973).

D = ancho del canal

L = altura del canal

$$Gr_D^* = \frac{\beta g q / A}{\nu^2 k} D^4, \text{ el número modificado de Grashof}$$

La figura 5.33 muestra dos perfiles de velocidad que se obtuvieron a una distancia de 1.5 in medida desde el fondo del canal a dos anchos distintos de canal, con ambas paredes calentadas. En ambos casos fué igual el número local modificado de Grashof Gr_x^* . Es interesante notar que, para condiciones dinámicamente semejantes, una disminución en el ancho del canal aumenta la razón de flujo. La implicación es que las fuerzas viscosas no tienen un papel importante, al menos para los anchos de canal que se consideraron aquí, de 0.6175 in y 1.235 in respectivamente.

Otros datos presentados por Colwell y Welty mostraron que, para un flujo dado de calor, la temperatura de la pared decrece conforme se hace más estrecho el canal, lo que contrasta con el comportamiento del aire, agua y otros fluidos con números de Prandtl moderadamente altos. Entonces se estableció que, en un fluido con bajo número de Prandtl en flujo natural (boyante), el flujo es esencialmente viscoso. La región de alto esfuerzo cortante está próxima a la fuente de flotabilidad, y la fricción de la pared afecta el flujo en forma apreciable solamente cuando se hace muy estrecho el canal.

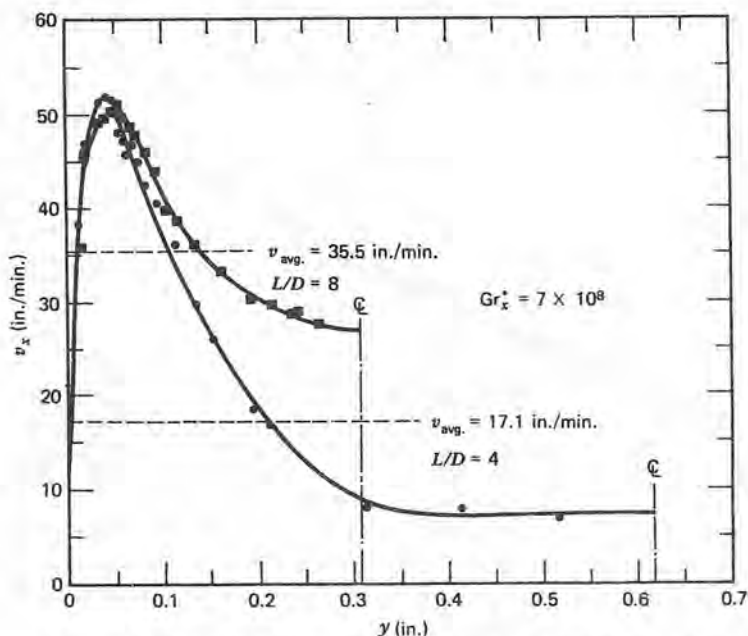


Figura 5.33 Perfiles de velocidad para la convección natural con mercurio en un canal vertical, $x = 1.5$ pulg. (R. G. Cowell y J. R. Welty, publicación ASME 73-HT-52, presentado en la 14 Conferencia Nacional de transferencia de Calor, Atlanta, Georgia, agosto de 1973).

Cuando participan las fuerzas de fricción, una disminución subsecuente en el ancho del canal produce un aumento en la temperatura de la pared.

5.2-3 Convección natural para superficies horizontales

Cilindros horizontales. McAdams³⁵ correlacionó datos de convección natural para el caso de cilindros horizontales calentados tanto en líquidos como en gases, como se muestra en la figura 5.34. En esta gráfica se muestran los valores de Nu_D recomendados para distintos productos de $Gr_D Pr_f$; en el rango de $10^4 < Gr_D Pr < 10^9$, McAdams sugiere la correlación

$$Nu_D = 0.53(Gr_D Pr)^{1/4} \quad (5-161)$$

Cuando disminuye el diámetro del cilindro, como en el caso de un alambre, el número de Grashof se hace muy pequeño. Para los casos en que $Gr_D Pr < 10^4$, Elenbaas³⁶ obtuvo la ecuación

³⁵ W. H. McAdams, *Heat Transmission*, 3a. ed. (Nueva York: McGraw-Hill, 1954).

³⁶ W. Elenbaas, *J. Appl. Phys.* 19 (194): 1148; *Phillips Res. Dept.* 3 (1948): 338 y 450.

$$Nu^3 e^{-6/Nu} = \frac{Gr_D Pr}{235} \quad (5-162)$$

que concuerda bien con los datos experimentales.

En el caso de flujo aerodinámico en la convección natural de fluidos metálicos y no metálicos adyacentes a cilindros horizontales mayores que los alambres, Hsu³⁷ recomienda una correlación de la forma

$$Nu_D = 0.53 \left(\frac{Pr}{0.952 + Pr} Gr_D Pr \right)^{1/4} \quad (5-163)$$

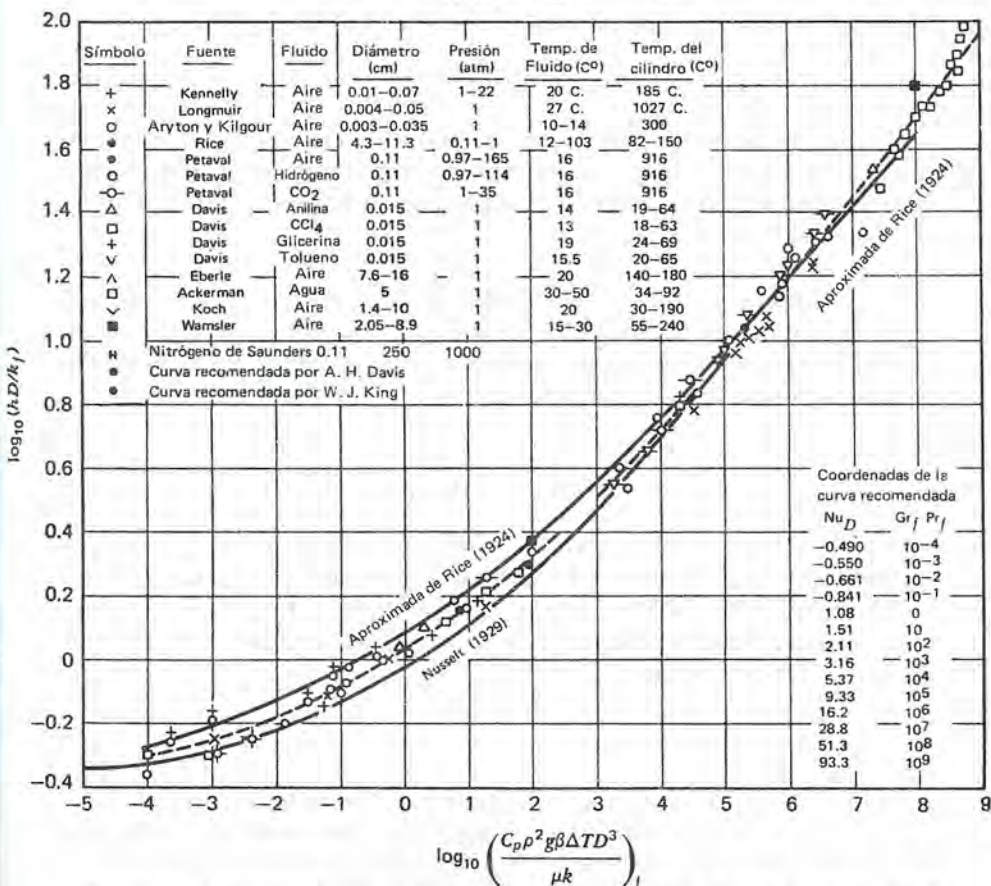


Figura 5.34 Convección natural de cilindros horizontales a líquidos y gases. (Todas las cantidades con un subíndice f se deben evaluar a la temperatura de la película.) [De W. H. McAdams, *Heat Transmission*, 3a. edición. (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1954), pág. 176. Con permiso del editor.]

37 S. T. Hsu, *Engineering Heat Transmission*, 3a. ed. (Nueva York: McGraw-Hill, 1954).

Superficies planas horizontales. McAdams³⁸ recomienda las siguientes expresiones para el caso de la convección natural adyacente a placas horizontales. Para placas calientes dirigidas hacia arriba o placas frías dirigidas hacia abajo, en el rango $10^5 < Gr_L Pr < 2 \times 10^7$,

$$Nu_L = 0.54(Gr_L Pr)^{1/4} \quad (5-164)$$

y, en el rango $2 \times 10^7 < Gr_L Pr < 3 \times 10^{10}$,

$$Nu_L = 0.14(Gr_L Pr)^{1/3} \quad (5-165)$$

Con placas calientes hacia abajo y placas frías hacia arriba, la expresión recomendada, en el rango $3 \times 10^5 < Gr_L Pr < 10^{10}$, es

$$Nu_L = 0.27(Gr_L Pr)^{1/4} \quad (5-166)$$

En las ecuaciones anteriores, la longitud característica L es la longitud de un lado de una superficie cuadrada, la media de las dimensiones de una superficie rectangular, ó 0.9 por el diámetro de un área circular.

Esferas y sólidos rectangulares. King³⁹ sugiere utilizar las expresiones para los cilindros horizontales cuando se trabaje con convección natural que involucre esferas y sólidos rectangulares. Su sugerencia incluye usar una longitud significativa L , determinada de

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_{\text{horiz}}} + \frac{1}{L_{\text{vert}}} \quad (5-167)$$

en donde L_{horiz} y L_{vert} son las dimensiones horizontal y vertical, respectivamente, del sólido. Es obvio que para una esfera, L es $D/2$.

En el ejemplo 5.5 se ilustra la forma de determinar la intormación de transferencia de calor, usando correlaciones del tipo presentadas hasta el momento.

Ejemplo 5.5

Se transporta vapor saturado por un tubo de acero de 2 in de diámetro calibre 80 con aislante exterior de 1 1/2 in de 85% de magnesia. Se desea conocer la razón de pérdida de calor por unidad de longitud del tubo aislado si la línea de vapor está (a) horizontal y (b) vertical, en una distancia de 20 ft. El tubo está en aire inmóvil a 40°F. La temperatura de saturación del vapor a 500 psi es de 467°F. En los apéndices A-1 y F-1 están los datos necesarios para este problema. A continuación se presenta la información para las necesidades inmediatas.

³⁸ McAdams, op. cit.

³⁹ W. J. King, Mech. Engr. 54 (1932): 347.

tubo de 5 cm calibre 80	ID = 1.939 in. OD = 2.375 in.
capa aislante de 1/2 in	ID = 2.375 in. OD = 5.375 in.
acero dulce	$k \cong 23 \text{ Btu/hr-ft-}^{\circ}\text{F}$
magnesio 85 %	$k = 0.041 \text{ Btu/hr-ft-}^{\circ}\text{F}$

La resistencia térmica por unidad de longitud de cada parte del camino de transferencia de calor se determina en la forma siguiente:

Pared interior (vapor en condensación)

$$R_t = \frac{1}{h_i A_i} \quad (h_i \text{ es grande; entonces se desprecia este término})$$

Tubo de acero (conducción)

$$R_t = \frac{\ln(D_o/D_i)}{2\pi k L}$$

$$R_t = \frac{\ln(2.375/1.939)}{2\pi(23)(1)} = 0.00141 \frac{\text{hr-}^{\circ}\text{F}}{\text{Btu}}$$

Capa aislante (conducción)

$$R_t = \frac{\ln(D_o/D_i)}{2\pi k L}$$

$$= \frac{\ln(5.375/2.375)}{2\pi(0.041)(1)} = 3.16 \frac{\text{hr-}^{\circ}\text{F}}{\text{Btu}}$$

Superficie exterior (convección natural)

$$R_t = \frac{1}{h_o A_o} = \frac{1}{h_o (\pi) \left(\frac{5.375}{12} \right) (1)} = \frac{0.71 \text{ hr-}^{\circ}\text{F}}{h_o \text{ Btu}}$$

Entre el vapor y el aire exterior, la pérdida de calor por unidad de longitud del tubo es

$$q = \frac{\Delta T}{R_t} = \frac{427}{3.161 + 0.71/h_o} \quad (\text{I})$$

También se puede expresar esta pérdida de calor en función de la conducción entre las superficies interna y externa en la forma

$$q = \frac{467 - T_o}{3.161} \quad (\text{II})$$

o, en términos de la convección en la superficie exterior, en la forma

$$q = \frac{h_o}{0.71} (T_o - 40) \quad (\text{III})$$

En las dos últimas expresiones, T_o es la temperatura en la superficie exterior del aislante.

El lector notará que el coeficiente de transferencia de calor es una función de la temperatura desconocida T_o . Ahora el problema es de pruebas sucesivas en que se supone inicialmente la temperatura de la superficie y luego se verifica. El problema queda terminado cuando sean congruentes los valores supuesto y calculado de T_o .

Se sabe que en la convección natural, el coeficiente de transferencia de calor es relativamente pequeño. Para un valor de $h_o = 10 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^\circ\text{F}$, los valores correspondientes de q y T_o son aproximadamente 132 Btu/hr y 49°F , respectivamente. Una h de $1 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^\circ\text{F}$ da valores correspondientes de 110 Btu/hr y 118°F respectivamente. El rango de valores que se puede considerar en la suposición de T_o se reduce considerablemente por esta clase de cálculos preliminares.

Se escoge $T_o = 100^\circ\text{F}$ para la suposición inicial; los valores correspondientes de Gr_D y Pr son

$$\begin{aligned} Gr_D &= \frac{\beta g}{\nu^2} D^3 \Delta T \\ &= \left(2.29 \times 10^6 \frac{1}{^\circ\text{F-ft}^3} \right) \left(\frac{5.375}{12} \text{ ft} \right)^3 (60^\circ\text{F}) \\ &= 12.35 \times 10^6 \\ Pr &= 0.710 \end{aligned}$$

Se empleó una temperatura de película de 70°F para determinar las propiedades necesarias del aire.

De acuerdo con la ecuación (5-161), el valor de Nu_D que se aplica al caso de una línea horizontal de vapor es

$$\begin{aligned} Nu_D &= 0.53[(12.35 \times 10^6)(0.71)]^{1/4} \\ &= 28.8 \end{aligned}$$

y el coeficiente de transferencia de calor es

$$\begin{aligned} h_o &= \frac{k}{D} Nu = \frac{(0.0149 \text{ Btu/hr-ft-}^\circ\text{F})(28.8)}{5.375/12 \text{ ft}} \\ &= 0.959 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^\circ\text{F} \end{aligned}$$

La razón de flujo de calor y la temperatura de la superficie exterior correspondientes a este valor de h son

$$q = 109.5 \text{ Btu/hr por pie}$$

y

$$T_o = 121^\circ\text{F}$$

Usando este valor de T_o en una segunda serie de cálculos se obtiene, para el caso horizontal,

$$Gr_D = 15.05 \times 10^6$$

$$Pr = 0.708$$

$$Nu_D = 30.3$$

$$h = 1.03$$

$$q = 111 \text{ Btu/hr}$$

$$T_o = 116.5$$

Es claro que un cálculo adicional producirá un valor refinado de T_o ; sin embargo, se cambia el valor de pérdida de calor en muy pequeña magnitud; en consecuencia, la respuesta de este problema a (a) es $q = 111 \text{ Btu/hr}$ por unidad de longitud de tubo.

En el caso de un tubo vertical, la longitud significativa en Gr_L y Nu_L se convierte en la altura en lugar del diámetro. Todavía se aplican las ecuaciones (I), (II) y (III).

Si se supone un valor inicial de 120°F para T_o , se determinan los parámetros importantes en la forma:

$$Gr_L = \frac{\beta g}{\nu^2} L^3 \Delta T$$

$$\begin{aligned} Gr_L &= \left(2.09 \times 10^6 \frac{1}{^\circ\text{F}\cdot\text{ft}^3} \right) (20 \text{ ft})^3 (80^\circ\text{F}) \\ &= 1.338 \times 10^{12} \end{aligned}$$

$$Pr = 0.708$$

Ahora se puede determinar el número de Nusselt de la ecuación (5-135) o leerlo de la figura 5.29. Usando la ecuación (5-135) se obtiene

$$\begin{aligned} Nu_L &= 0.0210(Gr_L Pr)^{2/5} \\ &= 0.0210[(1.338 \times 10^{12})(0.708)]^{2/5} \\ &= 1300 \end{aligned}$$

y de aquí se obtiene el valor del coeficiente de transferencia de calor

$$\begin{aligned} h &= \frac{k}{L} Nu_L \\ &= \frac{0.0152 \text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}\cdot^\circ\text{F}}{20 \text{ ft}} (1300) \\ &= 0.988 \text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}^2\cdot^\circ\text{F}. \end{aligned}$$

Ahora se pueden determinar los valores para q y T_o de las expresiones (I) y (III). Son

$$q = \frac{427}{3.161 + \frac{0.71}{0.988}} = 110 \text{ Btu/hr}$$

$$T_o = 40 + \frac{0.71}{0.988} (q) = 119^\circ\text{F}$$

Esta congruencia con el valor supuesto para T_o de 120°F es excelente; no es necesario hacer más cálculos. La respuesta de (b) para este problema, para una línea vertical de vapor, es $q = 110 \text{ Btu/hr por pie}$. No hay diferencia en la pérdida de calor para este caso entre una configuración vertical y otra horizontal.

5.2-4 Expresiones simplificadas para la convección natural en el aire

En la mayoría de los casos reales, el fluido involucrado en un caso de convección natural es el aire a presión atmosférica. Ya que así sucede, se han modificado las expresiones anteriores para que se apliquen específicamente al aire y se ha escrito una expresión simplificada para el coeficiente de transferencia de calor en la forma

$$h = A \left(\frac{\Delta T}{L} \right)^b \quad (5-168)$$

en donde A y b son constantes, dependiendo de la geometría y condiciones de flujo, y L es la longitud significativa, que también es función de la geometría y del flujo.

La tabla 5.3 da los valores sugeridos por McAdams⁴⁰ para distintas orientaciones, geometrías y condiciones de flujo según se indica por la magnitud del producto GrPr . Los valores de h determinados, usando las constantes de la tabla 5.3 en la ecuación (5-168), tienen las dimensiones de $\text{Btu/hr-ft}^2\text{-}^\circ\text{F}$. La diferencia de temperaturas mencionada es la que hay entre la superficie y el volumen del aire en unidades de temperatura.

El ejemplo 5.6 ilustra los ahorros que se pueden lograr cuando se usa la ecuación (5-168) en vez de las correlaciones más complejas de secciones anteriores.

Ejemplo 5.6

Para la línea de vapor descrita en el ejemplo 5.5, con todas las especificaciones y condiciones sin cambio, determinar la pérdida de calor por longitud de tubo, del tubo aislado a aire a 4.44°C para orientaciones a) horizontal y b) vertical usando las relaciones simplificadas para el aire dadas por la ecuación (5-168).

⁴⁰ McAdams, op. cit.

Tabla 5.3 Constantes necesarias en la ecuación (5-168) para la convección natural en el aire

Geometría	Rango aplicable	A	b	L
Superficies verticales (planos y cilindros)	$10^4 < Gr_L Pr < 10^9$	0.29	1/4	altura
	$10^9 < Gr_L Pr < 10^{12}$	0.19	1/3	1
Cilindros horizontales	$10^3 < Gr_D Pr < 10^9$	0.27	1/4	diámetro
	$10^9 < Gr_D Pr < 10^{12}$	0.18	1/3	1
Planos horizontales				
placas calientes hacia arriba	$10^5 < Gr_L Pr < 2 \times 10^7$	0.27	1/4	longitud de lado
6 placas frías hacia abajo	$2 \times 10^7 < Gr_L Pr < 3 \times 10^{10}$	0.22	1/3	1
placas frías hacia arriba ó placas calientes hacia abajo	$3 \times 10^5 < Gr_L Pr < 3 \times 10^{10}$	0.12	1/4	longitud de lado

Todavía es aplicable el análisis de transferencia global de calor. A continuación se repiten las expresiones (I), (II) y (III) del ejemplo 5.5 para referencias:

$$q = \frac{427}{3.161 + 0.71/h_o} \quad (I)$$

$$q = \frac{467 - T_o}{3.161} \quad (II)$$

$$q = \frac{h_o}{0.71} (T_o - 40) \quad (III)$$

De nuevo es necesario calcular h_o antes de completar la solución de q . La conveniencia que tiene usar la ecuación (5-168) estriba primordialmente en el mínimo esfuerzo de pruebas de "tanteo" necesarias y la menor carga para calcular y manipular parámetros incómodos sin dimensiones.

Primeramente se considera la configuración horizontal. Suponiendo que $Gr_D Pr < 10^9$, se puede escribir h_o en la forma de la ecuación (5-168) como sigue

$$h_o = 0.27 \left(\frac{\Delta T}{5.375/12} \right)^{1/4} = 0.33 \Delta T^{1/4}$$

Ahora se escribe la razón de flujo de calor en la forma de las dos expresiones (I) y (III):

$$q = \frac{427}{3.161 + 2.15/\Delta T^{1/4}} = 0.465 \Delta T^{5/4}$$

Resolviendo la ecuación con relativa facilidad, se obtiene el siguiente resultado $\Delta T \simeq 80^\circ\text{F}$. El valor correspondiente de q es 111.8 Btu/hr, que se compara muy bien con el valor de 111 Btu/hr que se obtuvo en el ejemplo anterior por un proceso considerablemente más elaborado.

El último paso es verificar, usando el resultado para ΔT , que Gr_DPr cae dentro del rango especificado en la tabla 5.3.

Para la configuración vertical, ya que la longitud significativa es de 20 ft, se supone el rango más elevado de Gr_LPr por lo que respecta a los valores leídos de la tabla 5.3.

Por tanto, la expresión para h_o queda

$$h_o = 0.19(\Delta T)^{1/3}$$

Igualando las expresiones (I) y (III) e incorporando este valor de h_o se obtiene

$$q = \frac{427}{3.161 + 3.74/\Delta T^{1/3}} = 0.268 \Delta T^{4/3}$$

El valor que satisface esta expresión es $\Delta T \simeq 90^\circ\text{F}$, y la razón de flujo de calor correspondiente es aproximadamente 107 Btu/hr pie. En el ejemplo 5.5, el resultado para el caso vertical fué de 110 Btu/hr por pie.

Rápidamente se puede verificar que Gr_LPr para este caso vertical está dentro del rango $10^9 < \text{Gr}_L\text{Pr} < 10^{12}$ especificado en la tabla 5.3.

El ejemplo anterior ilustró la gran utilidad de la ecuación (5-168) en los casos aplicables. Se recuerda al lector que esta expresión simplificada solamente se aplica cuando el fluido involucrado es aire a presión atmosférica.

5.3 CONVECCION FORZADA: CONSIDERACIONES TEORICAS Y EMPIRICAS

En los problemas prácticos de ingeniería es frecuente encontrar la transferencia de calor por convección forzada. Uno de los parámetros más fácilmente controlables en un caso de transferencia de calor que involucra un fluido es la razón de flujo del fluido a través de un tubo o junto a una superficie; a esos casos se les clasifica como de convección forzada.

En la sección 5.1 se consideraron algunos conceptos básicos relativos a la convección forzada. En esta sección se usa algo de la información que se desarrolló antes, a la vez que se extiende considerablemente la cobertura de la convección forzada. En la siguiente sección se establece una distinción entre el flujo interno y el externo,

5.3-1 Convección forzada en el flujo interno

Se establecerá una distinción entre los flujos laminar y turbulento. Al principio de este capítulo se estudió a fondo la muy distinta naturaleza de estos dos tipos de flujo.

5.3-1.1 Flujo laminar dentro de tubos y ductos

Para el caso de flujo laminar de tubo con simetría radial, la ecuación de movimiento para el flujo estable, totalmente desarrollado se reduce a

$$\frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_x}{dr} \right) - \frac{dP}{dx} = 0 \quad (5-169)$$

que se puede separar e integrar dos veces, para obtener

$$v_x = \frac{r^2}{4\mu} \frac{dP}{dx} + c_1 \ln r + c_2$$

Las condiciones de frontera necesarias para evaluar las constantes de integración c_1 y c_2 son

$$\frac{dv_x}{dr} = 0 \quad \text{en } r = 0$$

y

$$v_x = 0 \quad \text{en } r = R$$

Sustituyendo estas condiciones límites en el desarrollo del perfil de velocidad se obtiene

$$v_x = -\frac{dP}{dx} \frac{R^2}{4\mu} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (5-170)$$

que es una parábola simétrica alrededor de la línea de centros del tubo. Ya que $v_x = v_{\max}$ en $r = 0$, el coeficiente $-(dP/dx)(R^2/4\mu)$ es igual a la máxima velocidad. Por tanto, se puede escribir la ecuación (5-170) en otra forma como se expresa a continuación

$$v_x = v_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (5-171)$$

Se puede determinar una velocidad promedio por una aplicación sencilla de la ecuación de continuidad para obtener la expresión

$$v_{\text{prom}} = \frac{1}{A} \int_A v_x dA \quad (5-172)$$

Si se sustituye el valor de v_x , por el dado en la ecuación (5-171), se obtiene el resultado

$$v_{\text{prom}} = \frac{v_{\text{max}}}{2} \quad (5-173)$$

por lo que se tiene que una expresión para el perfil de velocidad laminar totalmente desarrollado en un tubo circular equivalente a los ya presentados es

$$v_x = 2v_{\text{prom}} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (5-174)$$

La forma aplicable de la ecuación de energía que se aplica al flujo estable, laminar, totalmente desarrollado con transferencia simétrica de calor es

$$\frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho c v_x \frac{\partial T}{\partial x} \quad (5-175)$$

Para el caso en que la conducción axial es despreciable comparada con la correspondiente en la dirección radial, $\partial^2 T / \partial x^2 = 0$; la expresión resultante es

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{v_x}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (5-176)$$

en la cual se ha remplazado la razón de las propiedades físicas $k/\rho c$ por α , o sea la difusividad térmica.

Para un *perfil de temperatura totalmente desarrollado*, se requiere que el perfil de temperatura generalizado no varíe a lo largo del eje de flujo. El perfil generalizado es la razón de las temperaturas $(T_o - T)/(T_o - T_m)$, en donde T_o es la temperatura superficial, T es la temperatura del fluido en un punto y T_m es la *temperatura media mezclada, de razón de mezcla*, definida en la forma

$$T_m = \frac{1}{Av_{\text{prom}}} \int_A v_x T \, dA \quad (5-177)$$

Un perfil de temperatura totalmente desarrollado ahora requiere que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{T_o - T}{T_o - T_m} \right) = 0 \quad (5-178)$$

Diferenciando esta expresión y despejando $\partial T / \partial x$, se obtiene

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_o}{dx} + \frac{T_o - T}{T_o - T_m} \left(\frac{dT_m}{dx} - \frac{dT_o}{dx} \right) \quad (5-179)$$

Se puede sustituir este resultado en el segundo miembro de la expresión de la energía, ecuación (5-176). Se considerarán dos casos especiales: flujo constante de calor de pared y temperatura constante de superficie de pared.

Flujo constante de calor de pared. Un ejercicio al final de este capítulo requiere demostrar que, para un perfil totalmente desarrollado de temperatura, $h \neq h(x)$. Suponiendo que se puede demostrar, se puede escribir el resultado que $T_o - T_m = \text{constante}$ para el caso de flujo constante de calor, en el cual

$$\frac{q_o}{A} = h(T_o - T_m) = \text{constante}$$

Entonces, la ecuación (5-179) se reduce a la forma

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_o}{dx} = \frac{dT_m}{dx} \quad (5-180)$$

y se puede escribir la ecuación de la energía en la forma

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = \frac{v_x}{\alpha} \frac{dT_m}{dx} \quad (5-181)$$

Tanto la temperatura superficial como la media del fluido varían linealmente en este caso; la figura 5.35 muestra esta distribución.

Se puede resolver la ecuación (5-181), usando las condiciones de frontera $T(R) = T_o$, $(dT/dr)(0) = 0$ para obtener una expresión para $T(r)$. Una manipulación posterior lleva al número de Nusselt, cálculo que queda como ejercicio al final del capítulo; el resultado de este cálculo es

$$\text{Nu}_D = \frac{hD}{k} = 4.364 \quad (5-182)$$

Kays⁴¹ presenta un estudio exhaustivo del caso de flujo constante de calor de pared, incluyendo los efectos en los extremos. En la tabla 5.4 se da el número de Nusselt para distintos valores del parámetro adimensional $(x/R)/\text{RePr}$, desde 0 hasta ∞ . Para valores de este parámetro mayores que 0.100, la condición se aproxima a aquella de totalmente desarrollada

La figura 5.36 muestra una variación representativa en la temperatura media del fluido a lo largo del eje de flujo para el caso de flujo constante de calor. Para $(x/R)/\text{RePr}$ mayor que 0.100 se logra una diferencia constante entre la temperatura de la pared y la temperatura media del fluido.

⁴¹ Kays, op. cit.

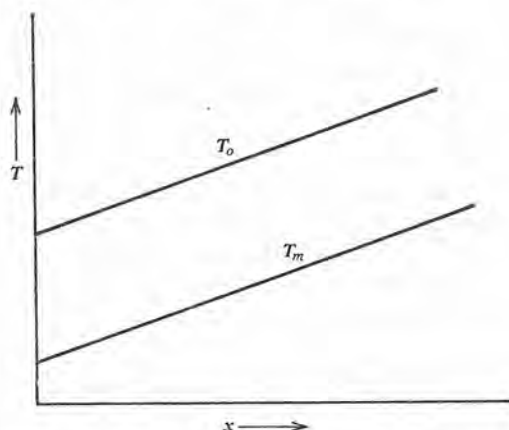


Figura 5.35 Variación axial de la temperatura de la pared y la temperatura media del fluido para flujo laminar estable totalmente desarrollado con flujo constante de calor de pared.

Temperatura constante de la pared. En la sección 5.1-2.6 se desarrolló la variación en la temperatura media del fluido a lo largo del eje de flujo para una temperatura constante y h constante. Aquí se repite el resultado dado por la ecuación (5-136) para referencia:

$$\frac{T - T_o}{T_e - T_o} = e^{-(h/\rho c_p v_x)(4x/D)} \quad (5-136)$$

El número de Nusselt para un perfil de temperatura totalmente desarrollado en el caso de temperatura constante de pared comprende las ecuaciones (5-174), (5-176), (5-177) y (5-179) en la forma

Tabla 5.4 Números de Nusselt en la región de entrada de un tubo circular con flujo laminar y flujo constante de calor de pared

$\frac{x/R}{\text{RePr}}$	Nu_x
0	∞
0.002	12.00
0.004	9.93
0.010	7.49
0.020	6.14
0.040	5.19
0.100	4.51
∞	4.36

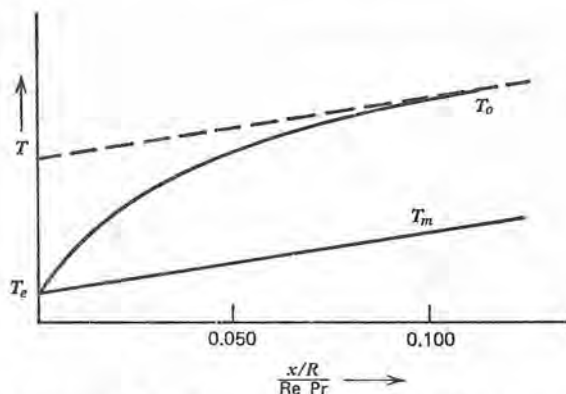


Figura 5.36 Variación en la temperatura axial con flujo constante de calor de pared para flujos estables, laminares de tubo.

desarrollada anteriormente. Para T_o constante, la derivada axial de T , $\partial T/\partial x$, en la forma expresada en la ecuación (5-179), queda

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_o - T}{T_o - T_m} \frac{dT_m}{dx} \quad (5-183)$$

Sustituyendo la ecuación (5-183) en lugar de la expresión $\partial T/\partial x$ y la ecuación (5-174) en lugar de $v_x(r)$ en la expresión de la energía, ecuación (5-181), se tiene

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{2v_{prom}}{\alpha} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \left[\frac{T_o - T}{T_o - T_m} \right] \frac{dT_m}{dx} \quad (5-184)$$

Esta expresión es más difícil de resolver que el caso para flujo constante de calor de pared y está más allá del alcance de este texto. El resultado, expresado como Nu_x , obtenido por medios iterativos, es

$$Nu_D = 3.658 \quad (5-185)$$

que, como el lector notará, es aproximadamente 16% menor que el resultado para el caso de flujo constante de calor de pared.

Graetz⁴² fué el primero en considerar el problema completo para temperatura constante de pared, incluyendo los efectos en los extremos. Sellars, Tribus y Klein⁴³ resolvieron el problema en forma muy completa. En la tabla 5.5 se muestran los valores del número local de Nusselt para $(x/R)/RePr$ desde 0 hasta ∞ . Se llega a una condición totalmente desarrollada para $(x/R)/RePr$ mayor de 0.10.

L. Graetz, *Ann. Phys. u. Chem.* 25 (1885): 337.

⁴³ J. R. Sellars, M. Tribus, y J. S. Klein, *Trans. ASME* 78 (1956): 441.

Tabla 5.5 Números de Nusselt en la región de entrada de un tubo circular con flujo laminar y temperatura constante de pared

$\frac{x/R}{\text{RePr}}$	Nu_x
0	∞
0.001	12.86
0.004	7.91
0.01	5.99
0.04	4.18
0.08	3.79
0.10	3.71
∞	3.66

Seider y Tate⁴⁴ correlacionaron datos experimentales para el flujo laminar en un tubo con temperatura constante en la pared. Su expresión, bastante bien aceptada es

$$\text{Nu}_L = 1.86 \left(\text{RePr} \frac{D}{L} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu_m}{\mu_o} \right)^{0.14} \quad (5-186)$$

con la que se evalúan todas las propiedades del fluido en el promedio de las temperaturas medias del fluido, excepto μ_o que es la viscosidad evaluada en la temperatura T_o de la pared.

En la figura 5.37 se muestra una comparación entre la ecuación de Seider-Tate y los resultados teóricos de Graetz.

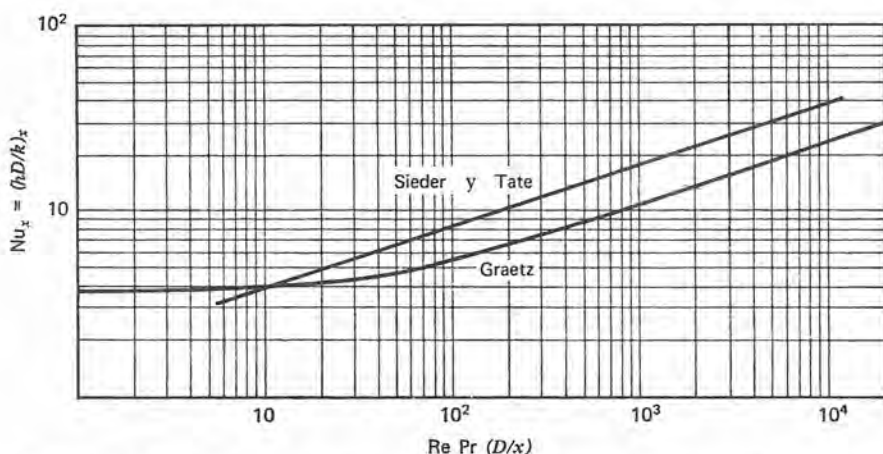


Figura 5.37 Comparación entre resultados empíricos y analíticos para la convección forzada, laminar en tubos.

⁴⁴ E. N. Seider y G. E. Tate, *Ind. Eng. Chem.* 28 (1936): 1429.

Ejemplo 5.7

Se usa un tubo de cobre de 1 in de diámetro, 14 BWG para calentar fluido hidráulico (MIL-M-5606) desde 60 a 150°F. Se enrolla un calentador eléctrico de tira, enredado uniformemente alrededor de la superficie exterior del tubo para proporcionar un flujo uniforme de calor de pared. El fluido hidráulico fluye a 10 ft/min. Determinar a) el flujo requerido de calor para producir el cambio especificado de temperatura y b) la temperatura superficial en la salida del tubo de 10 ft de longitud.

La determinación del flujo de calor es directa. La energía transmitida al fluido hidráulico es

$$\begin{aligned} q &= \rho A v_{avg} c_p (T_L - T_e) \\ &= \left(50.9 \frac{\text{lb}_m}{\text{ft}^3} \right) (0.00379 \text{ ft}^2) \left(10 \frac{\text{ft}}{\text{min}} \right) \left(0.502 \frac{\text{Btu}}{\text{lb}_m \cdot ^\circ\text{F}} \right) \\ &\quad \times (150 - 60)^\circ\text{F} \left(\frac{60 \text{ min}}{\text{hr}} \right) \\ &= 5230 \text{ Btu/hr} \end{aligned}$$

El área superficial exterior de 10ft de tubo de lin 14-BWG es

$$A = \pi D L = \pi \left(\frac{1}{12} \text{ ft} \right) (10 \text{ ft}) = 2.62 \text{ ft}^2$$

y el flujo requerido de calor de pared es

$$\frac{q}{A} = \frac{5230 \text{ Btu/hr}}{2.62 \text{ ft}^2} = 2000 \frac{\text{Btu}}{\text{hr} \cdot \text{ft}^2}$$

Se determina la temperatura de la superficie de la pared en la salida a partir de la ecuación

$$\frac{q}{A} = h(T_o|_L - T_m)$$

que requiere determinar h

Para este caso se encuentra que el número de Reynolds es

$$\text{Re}_D = \frac{D v}{\nu} = \frac{\left(\frac{0.834}{12} \text{ ft} \right) \left(\frac{10}{60} \frac{\text{ft}}{\text{seg}} \right)}{10.2 \times 10^{-5} \text{ ft}^2/\text{seg}} = 113.6$$

que está en el rango laminar.

Ahora se determina que el parámetro $(x/R)/\text{RePr}$ es

$$\frac{x/R}{\text{RePr}} = \frac{10 \text{ ft} / \frac{0.834}{2 \times 12} \text{ ft}}{113.6(130)} = 0.0195$$

Interpolando los valores en la tabla 5.4, se obtiene, como valor aproximado para el número local de Nusselt,

$$\text{Nu}_x = 6.3$$

del que

$$\begin{aligned} h_x &= \frac{k}{D} \text{Nu}_x \\ &= \frac{0.0685 \text{ Btu/hr-ft} \cdot ^\circ\text{F}}{0.834/12 \text{ ft}} \quad (6.3) \\ &= 6.21 \text{ Btu/hr-ft}^2 \cdot ^\circ\text{F} \end{aligned}$$

Ahora se calcula la temperatura en la superficie a la salida

$$\begin{aligned} T_o|_L &= T_m + \frac{q/A}{h_x} \\ &= 150 + \frac{2000 \text{ Btu/hr-ft}^2}{6.21 \text{ Btu/hr-ft}^2 \cdot ^\circ\text{F}} = 472^\circ\text{F} \end{aligned}$$

5.3-1.2 Flujo turbulento dentro de tubos y ductos

No hay una solución analítica para el caso de la transferencia de calor en el flujo turbulento de tubos. Las técnicas para predecir las razones de transferencia de calor en este caso son las expresiones de analogías consideradas en la sección 5.1-2.5 y las correlaciones de datos experimentales. Se da como referencia al lector una sección anterior en donde encontrará las expresiones análogas adecuadas. Ahora se consideran algunas de las expresiones empíricas más usadas.

Una correlación de frecuente uso para el flujo turbulento de tubería es la ecuación de Dittus-Boelter⁴⁵

$$\text{Nu}_D = 0.023 \text{Re}_D^{0.8} \text{Pr}^n \quad (5-187)$$

en donde

- 1) $n = 0.3$ si se está enfriando el fluido
 $= 0.4$ si se está calentando el fluido
- 2) se evalúan todas las propiedades a la temperatura promedio del fluido medio
- 3) $\text{Re}_D > 10^4$
- 4) $0.7 < \text{Pr} < 100$
- 5) $L/D > 60$

⁴⁵ F. W. Dittus y L. M. K. Boelter, *Univ. of California Publ. Eng.* 2(1930): 443.

Colburn⁴⁶ sugirió una correlación semejante, empleando un número de Stanton en vez de Nu_D y un exponente constante en Pr ,

$$St = 0.023 Re_D^{-0.2} Pr^{-2/3} \quad (5-188)$$

en que

- 1) se evalúa St a la temperatura promedio de las medias del fluido.
- 2) se evalúan Re_D y Pr a la temperatura promedio de la película
- 3) $Re_D > 10^4$
- 4) $0.7 < Pr < 160$
- 5) $L/D > 60$

McAdams⁴⁷ modificó la expresión de Colburn, usando un término de corrección de viscosidad del tipo de Seider y Tate⁴⁸ para lograr una expresión que se aplica en un rango de números de Prandtl mucho más grande; su expresión es

$$St = 0.023 Re_D^{-0.2} Pr^{-2/3} \left(\frac{\mu_m}{\mu_o} \right)^{0.14} \quad (5-189)$$

en que

- 1) se evalúan todas las propiedades del fluido a la temperatura promedio de las medias, excepto μ_o , que se evalúa en T_o
- 2) $Re_D > 10^4$
- 3) $0.7 < Pr < 17,000$
- 4) $L/D > 60$

A continuación se presenta un problema típico que emplea una expresión empírica para h .

Ejemplo 5.8

Se introduce agua a 50°F en un tubo de 1/2 in calibre 40 a razón de 60 gal/min condensando vapor se mantiene la pared del tubo a 210°F. Para un tubo de 5 ft de largo, encontrar la temperatura de salida del agua y el calor total transferido.

Se usa la ecuación (5-136) para determinar la temperatura de salida del agua

$$\frac{T_L - T_o}{T_e - T_o} = e^{-St4L/D} \quad (5-136)$$

⁴⁶ Colburn, op. cit.

⁴⁷ McAdams, op. cit.

⁴⁸ Seider y Tate, op. cit.

y se puede determinar la transferencia de calor, usando la primera ley de la termodinámica una vez conocida T_L , de acuerdo con

$$q = \rho A v_{\text{prom}} c_p (T_L - T_e)$$

Ahora el problema se reduce a determinar el número de Stanton necesario para obtener el valor de T_L . Hay una complicación, ya que las propiedades de fluido incluidas en toda correlación de número de Stanton dependen de la temperatura, y por el momento no se conoce el valor de temperatura de salida. En consecuencia, se debe emplear un procedimiento de prueba y error semejante al diagrama de la figura 5.24. Se hace una estimación inicial para T_L ; luego se evalúa St y se obtiene el valor de T_L de la ecuación (5-136). El problema queda terminado cuando son congruentes los valores supuesto y calculado de T_L .

Primero se obtiene la velocidad

$$v_m = \frac{\left(\frac{60 \text{ gal}}{\text{min}}\right) \left(\frac{\text{min}}{60 \text{ seg}}\right) \left(\frac{\text{ft}^3}{7.48 \text{ gal}}\right)}{\frac{\pi}{4} \left(\frac{0.622}{12} \text{ ft}\right)^2} = 63.4 \text{ ft/seg}$$

Inicialmente se supone que $T_L = 60^\circ\text{F}$ y que las temperaturas correspondientes media promedio y de película son 55 y 132.5°F respectivamente. Usando la temperatura de la película para evaluar ν , se tiene, para Re_D ,

$$\begin{aligned} Re_D = \frac{Dv}{\nu} &= \frac{\left(\frac{0.622}{12} \text{ ft}\right) (63.4 \text{ ft/seg})}{0.57 \times 10^{-5} \text{ ft}^2/\text{seg}} \\ &= 5.76 \times 10^5 \end{aligned}$$

con lo que definitivamente el flujo es turbulento.

Usando la correlación de Colburn, ecuación (5-188), se calcula el número de Stanton

$$\begin{aligned} St &= 0.023(5.76 \times 10^5)^{-0.2} (3.35)^{-2/3} \\ &= 7.24 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

Luego se calcula la temperatura de salida

$$\begin{aligned} T_L &= 210 - (210 - 50) \exp \left[-(7.24 \times 10^{-4}) \left(\frac{4 \times 60}{0.622} \right) \right] \\ &= 210 - 160 e^{-0.279} \\ &= 210 - 121 = 91^\circ\text{F} \end{aligned}$$

Una segunda serie de cálculos, suponiendo que $T_L = 91^\circ\text{F}$, da los siguientes valores:

$$\begin{aligned} T_{m\text{prom}} &= 70.5^\circ\text{F}, \quad T_f = 140.3^\circ\text{F} \\ Re_D &= \frac{\left(\frac{0.622}{12} \text{ ft}\right) (63.4 \text{ ft/seg})}{0.525 \times 10^{-5} \text{ ft}^2/\text{seg}} = 6.26 \times 10^5 \end{aligned}$$

$$Pr = 3.05$$

$$St = 0.023(6.25 \times 10^5)^{-0.2}(3.05)^{-2/3}$$

$$= 7.58 \times 10^{-4}$$

$$T_L = 210 - 160 e^{-0.292} = 90.6^\circ\text{F}$$

que es bastante próximo al valor supuesto de T_0 para los propósitos de la ilustración. El calor transferido es

$$\begin{aligned} q &= \left(60 \frac{\text{gal}}{\text{min}}\right) \left(\frac{60 \text{ min}}{\text{hr}}\right) \left(\frac{\text{ft}^3}{7.48 \text{ gal}}\right) \left(62.2 \frac{\text{lb}_m}{\text{ft}^3}\right) \\ &\quad (1 \text{ Btu/lb}_m \cdot ^\circ\text{F})(90 - 50)^\circ\text{F} \\ &= 12 \times 10^5 \text{ Btu/hr} \end{aligned}$$

En consecuencia, las respuestas a este problema son 90°F para la temperatura existente del fluido y una transferencia total de calor de $12 \times 10^5 \text{ Btu/hr}$.

5.3-2 Convección forzada para el flujo externo

Muchos casos prácticos en ingeniería tratan acerca del flujo de un fluido en la superficie exterior de un sólido. Las formas de mayor interés son los cilindros y las esferas; con frecuencia se encuentra la transferencia de calor entre estas superficies y fluidos en flujo cruzado.

En este punto conviene hacer referencia a algunos de los fenómenos asociados con el flujo de fluidos en cuerpos planos y anchos, descritos en la sección 5.1. El lector recordará que se puede encontrar el fenómeno de la separación de capas límites en el flujo externo; esto ocurre en casi todos los casos prácticos que involucran cuerpos romos.

5.3-2.1 Transferencia de calor para cilindros en flujo cruzado

Cilindros solos. El trabajo de Eckert y Soehngen⁴⁹ y de Giedt⁵⁰ es aplicable al caso de los fluidos que fluyen normalmente al eje de cilindros solos. En la figura 5.38 se muestran los valores de Eckert y Soehngen de los números locales de Nusselt alrededor de la periferia de un cilindro para números de Reynolds que varían entre 20 y 600. Giedt investigó casos más elevados de número de Reynolds; en la figura 5.39 se muestran sus resultados.

⁴⁹ E. R. G. Eckert y E. Soehngen, *Trans. ASME* 74 (1952): 343.

⁵⁰ W. H. Giedt, *Trans. ASME* 71 (1949).

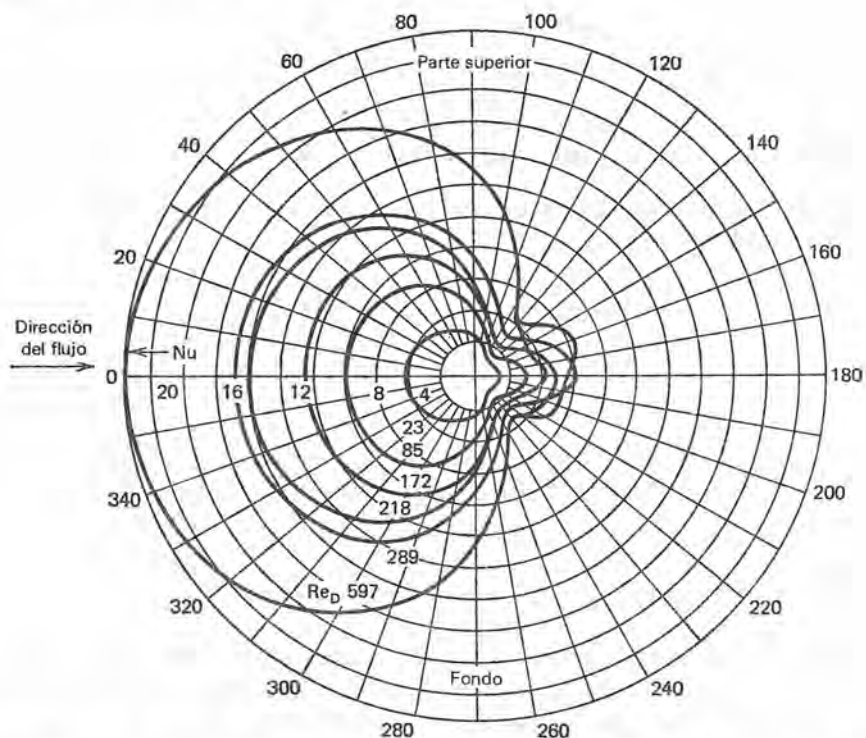


Figura 5.38 Números locales de Nusselt para un solo cilindro con flujo cruzado a números de Reynolds bajos. De E. R. Eckert y E. Soehngen, *Trans. A.S.M.E.* 74 (1952): 346. Con permiso del editor.

Se ve que el número de Nusselt varía suavemente de un valor relativamente grande próximo al punto de estancamiento. A números más bajos de Reynolds, el número de Nusselt disminuye regularmente alrededor de la superficie del punto de estancamiento al punto en que sucede la separación de la capa límite; en esta posición, el número de Reynolds aumenta ligeramente. A mayores números de Reynolds ocurre el mismo comportamiento cerca del punto de estancamiento; sin embargo, el número de Nusselt se aumenta repentinamente dos veces, una en el punto de separación y otro en donde la capa límite sufre una transición de flujo, de laminar a turbulento.

En la figura 5.39 se observa que a números de Reynolds inferiores a 10^5 , la capa límite laminar sufre la separación en una posición aproximadamente a 80° del punto de estancamiento sin que haya cambio en el número local de Nusselt. Para $Re_D > 1.5 \times 10^5$, parte de la capa límite está en flujo turbulento. Para este caso, el punto de separación se mueve más allá de los 90° , y la estela separada abarca menos superficie. En la región en que el flujo es turbulento,

el número local de Nusselt alcanza un valor máximo debido a la mayor conductancia de la capa límite turbulenta.

Aunque son útiles las gráficas como las de las figuras 5.38 y 5.39 para predecir condiciones locales alrededor de un cilindro en flujo cruzado no isotérmico, generalmente se tiene mayor interés en describir la transferencia total de calor, que incluye todos los efectos locales alrededor del cilindro. Obviamente, las condiciones físicas son tales que el análisis es de valor mínimo; en consecuencia, se deben usar correlaciones empíricas para predecir valores promedio del coeficiente de transferencia de calor. McAdams⁵¹ graficó los datos de 13 distintos investigadores en la forma Nu_D contra Re_D . Se ha encontrado excelente correlación; en la figura 5.40 se muestra esta gráfica.

Los valores mostrados en esta figura están expresados en forma empírica como sigue

$$Nu_D = B Re^n \quad (5-190)$$

con valores de las constantes B y n dados en la tabla 5.6 para distintos números de Reynolds. Se deben evaluar las propiedades de fluido en la ecuación (5-190) a la temperatura de la película. Los valores de h determinados de la figura 5.40 o de la ecuación (5-190) se aplican a los gases. Cuando se usa la ecuación (5-190) para líquidos en flujo externo, su lado derecho se debe modificar agregando el término $(1.1 Pr^{1/3})$.

Bancos de cilindros en flujo cruzado. Con frecuencia se arreglan los cilindros circulares en paquetes o bancos para lograr una transferencia total deseada de calor en un espacio relativamente pequeño. Un buen ejemplo de ello es el arreglo de tubos en muchos intercambiadores de calor.

Cuando se arreglan en bancos, la transferencia de calor de cada cilindro involucra algunas de las consideraciones que se acaban de

Tabla 5.6 Valores de las constantes B y n para la ecuación (5-190)

Re_D	B	n
0.4-4	0.891	0.330
4-40	0.821	0.385
40-4,000	0.615	0.466
4,000-40,000	0.174	0.618
40,000-400,000	0.0239	0.805

⁵¹ McAdams, op. cit.

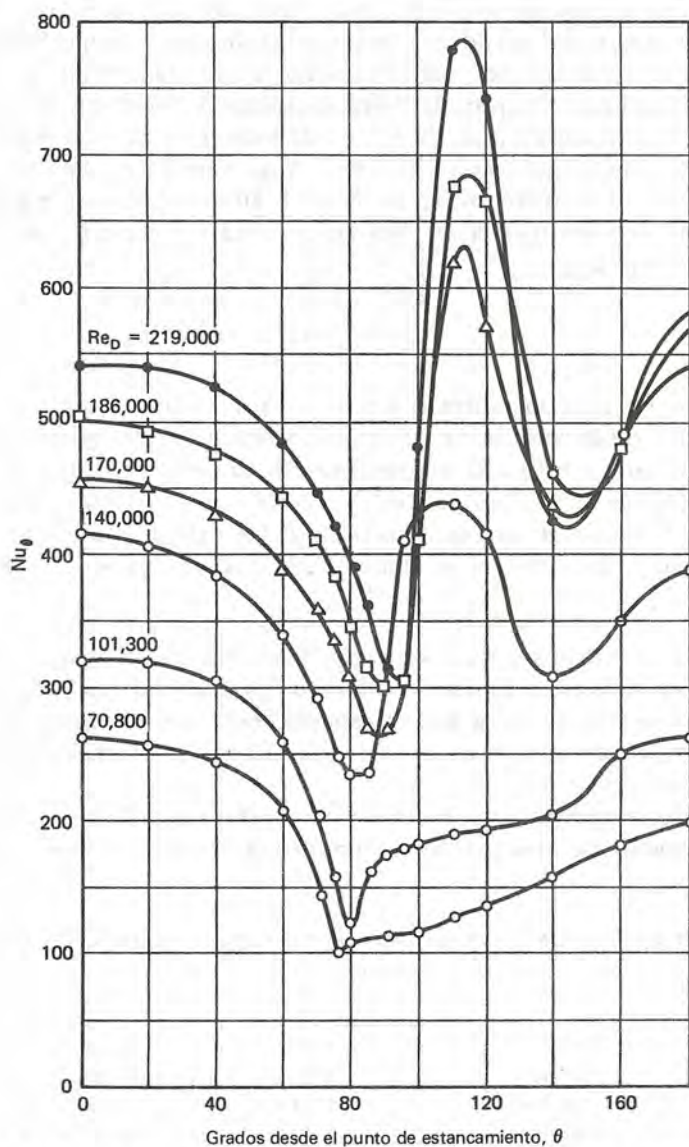


Figura 5.39 Números locales de Nusselt alrededor de un solo cilindro en flujo cruzado a altos números de Reynolds. De W. H. Giedt, *Trans. A.S.M.E.* 71 (1949): 378. Con permiso del editor.

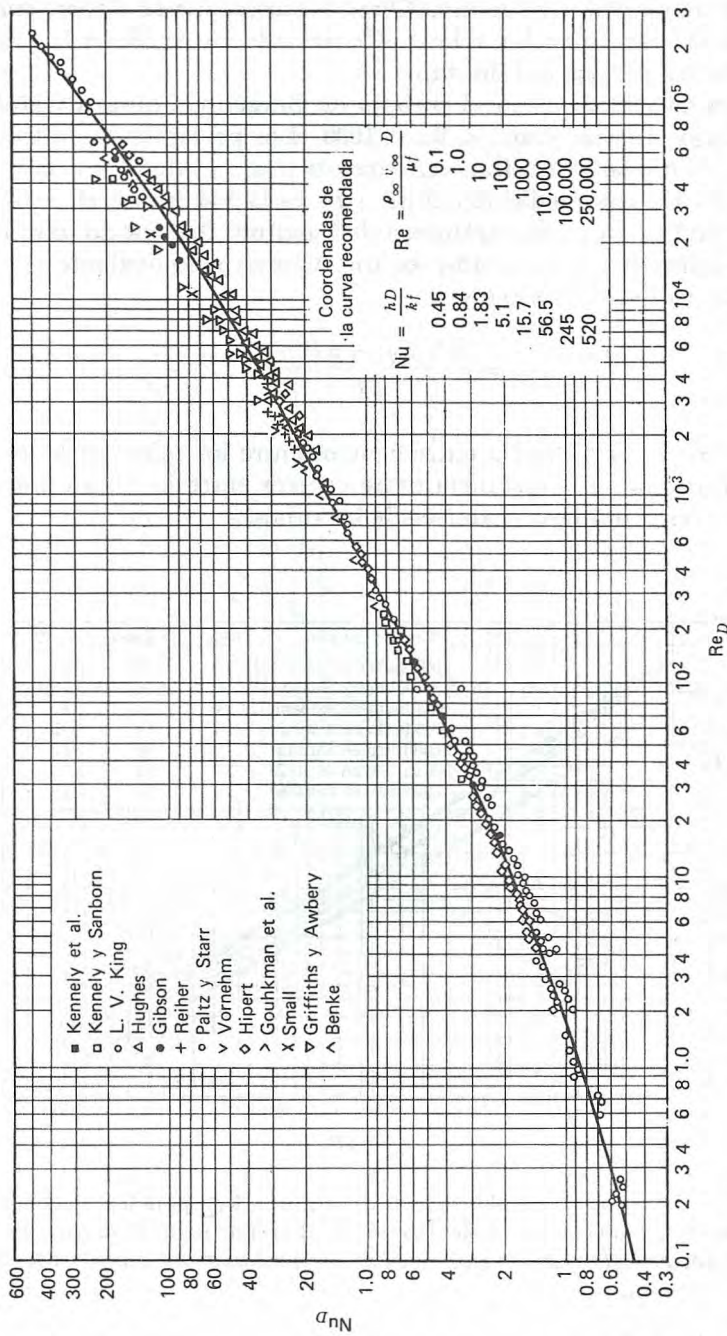


Figura 5.40 Números medios de Nusslet contra Re para el flujo normal a cilindros solos. [De W. H. McAdams, *Heat Transmission*, 3a. edición. (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1954), pág. 259. Con permiso del editor.

mencionar; sin embargo, hay interacción considerable entre un cilindro y los que están adyacentes. Otros factores que se deben considerar son el arreglo de los tubos, el espaciado entre ellos y la orientación relativa al flujo del fluido.

La figura 5.41 muestra el trabajo de Bergelin, Colburn y Hull⁵² para el flujo laminar con $1 < Re < 1000$. Los parámetros graficados incluyen propiedades de fluidos, excepto a μ_o , evaluados a la temperatura media promedio del fluido; μ_o es la viscosidad en la temperatura de la pared. El parámetro de longitud D_{eq} , usado para calcular el número de Reynolds, es un diámetro equivalente de un paquete de tubos, definido según

$$D_{eq} = \frac{4(S_L S_T - \pi D^2/4)}{\pi D} \quad (5-191)$$

en donde S_L es la distancia entre centros entre los tubos en la *dirección de flujo*, S_T es la distancia entre centros entre los tubos *normal al flujo* y D es el diámetro exterior de los tubos.

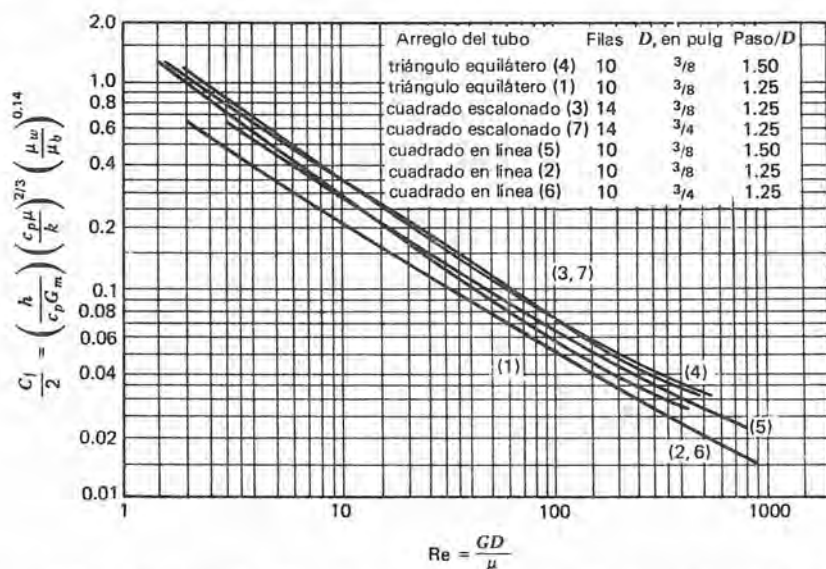


Figura 5.41 Coeficiente de transferencia de calor contra Re_D para líquidos en flujo laminar normal a paquetes de tubos. [De O. P. Bergelin, A. P. Colburn y H. L. Hull, Universidad de Delaware, *Engineering Experiment Station Bulletin No. 2* (1950). Con permiso del editor.]

⁵² O. P. Bergelin, A. P. Colburn, H. L. Hull, *Univ. of Delaware Engr. Exp. Sta. Bulletin No. 2* (1950).

Bergelin, Brown y Doberstein⁵³ realizaron gráficas tanto para la determinación de transferencia de calor como de caída de presión para valores de Re_D hasta de 10^4 . La figura 5.42 muestra las curvas para evaluar h y f en distintos arreglos de tubos. En esta figura se calcula el número de Reynolds, usando D_t , el diámetro del tubo.

Es aparente que puedan existir combinaciones casi ilimitadas de espaciados de tubos y arreglos. Ninguna gráfica por sí sola puede mostrar todas las posibilidades. Probablemente la fuente más productiva de esta clase, incluyendo datos para gases que fluyen a través de paquetes de tubos, es el libro *Compact Heat Exchangers*, de Kays

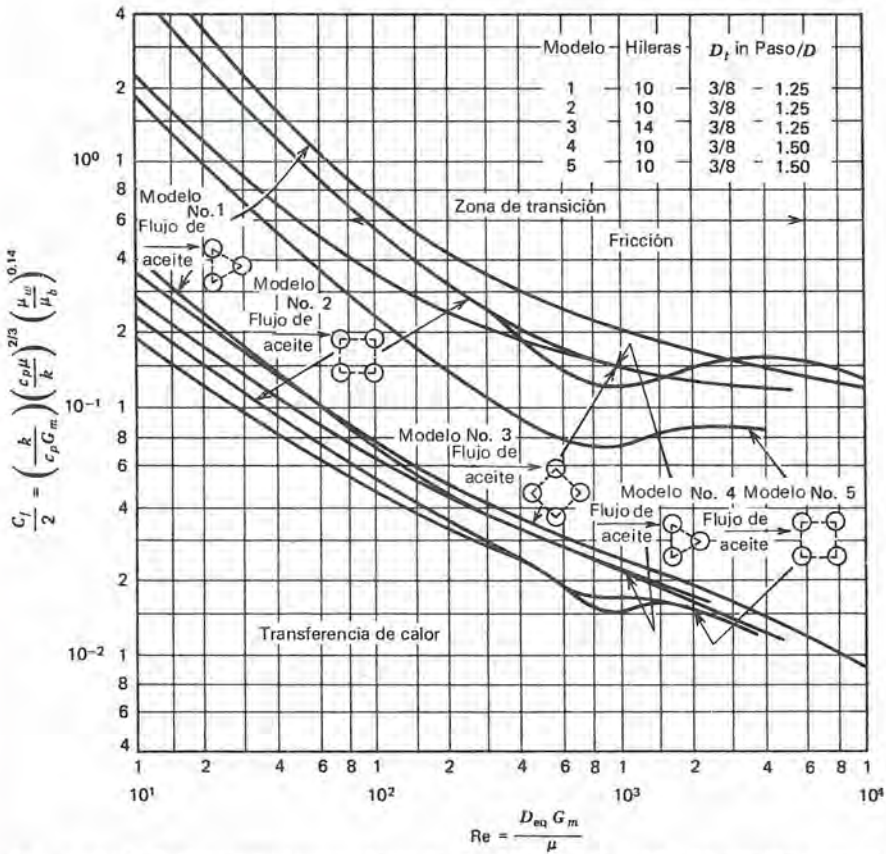


Figura 5.42 Parámetros de transferencia de calor y de caída de presión para líquidos que fluyen a través de paquetes de tubos para números de Reynolds hasta 10^4 . De O. P. Bergelin, G. A. Brown y S. C. Doberstein, *Trans. A.S.M.E.* 74 (1952): 1958. Con permiso del editor.]

⁵³ O. P. Bergelin, G. A. Brown, y S. C. Doberstein, *Trans. ASME* 74 (1952): 1958.

y London.⁵⁴ Todavía es difícil predecir los coeficientes de transferencia de calor para el lado del envolvente en intercambiadores de calor de coraza y tubo; afortunadamente, en la práctica, la resistencia térmica de control es la que está en la pared interior del tubo, que es relativamente fácil de evaluar.

5.3-2.2 *Transferencia de calor para flujo alrededor de esferas*

Los fenómenos locales de transferencia de calor local alrededor de una superficie esférica ocurren en forma semejante al caso de los cilindros mencionado antes. En la figura 5.43 se muestra el trabajo de Cary⁵⁵ para coeficientes de transferencia local de calor con flujo junto a una superficie esférica.

McAdams presentó una correlación del trabajo de varios investigadores para el flujo junto a esferas. La figura 5.44 muestra la gráfica de McAdams para Nu_D contra Re_D .

Las ecuaciones empíricas sugeridas para el flujo sobre esferas son las siguientes:

para líquidos con $1 < Re_D < 70,000$

$$Nu_D = 2.0 + 0.60 Re_D^{1/2} Pr^{1/3} \quad (5-192)$$

para aire con $20 < Re_D < 150,000$

$$Nu_D = 0.33 Re_D^{0.6} \quad (5-193)$$

para gases distintos al aire, con $1 < Re_D < 25$

$$St = \frac{2.2}{Re_D} + 0.48 Re_D^{-1/2} \quad (5-194)$$

y con $25 < Re_D < 150,000$

$$Nu_D = 0.37 Re_D^{0.6} Pr^{1/3} \quad (5-195)$$

En todas las ecuaciones anteriores se debe usar la temperatura de la película para la evaluación de las propiedades del fluido.

5.3-2.3 *Transferencia de calor con flujo alrededor de superficies planas*

Los resultados analíticos de la sección 5.1-2 se aplican en el caso de flujo paralelo a una pared plana recta. Aquí se repiten las ecuaciones apropiadas para completar esta sección.

⁵⁴ W. M. Kays y A. L. London, *Compact Heat Exchangers*, (Nueva York: McGraw-Hill, 1958).

⁵⁵ J. R. Cary, *Trans. ASME* 75 (1953): 483.

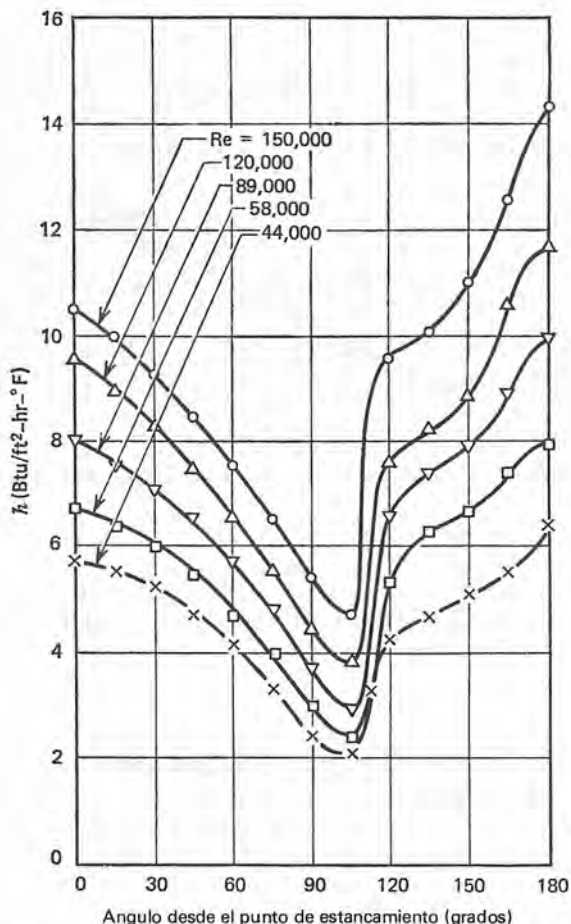


Figura 5.43 Coeficientes de transferencia local de calor para flujo sobre una esfera. [De J. R. Cary, *Trans. A. S. M. E.* 75 (1953): 485. Con permiso del editor.]

Para el flujo de capa límite laminar en una placa plana isotérmica, los números local y medio de Nusselt están dados por

$$Nu_x = 0.332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3} \quad (5-98)$$

y

$$Nu_L = 0.664 Re_L^{1/2} Pr^{1/3} \quad (5-100)$$

respectivamente, usando la temperatura de la película para la evaluación de la propiedad. Estas ecuaciones son válidas para fluidos con números de Prandtl en el rango de $0.6 < Pr < 50$.

Para los casos en que no hay separación de capa límite, se aplican las analogías entre el impulso y la transferencia de calor de la sección

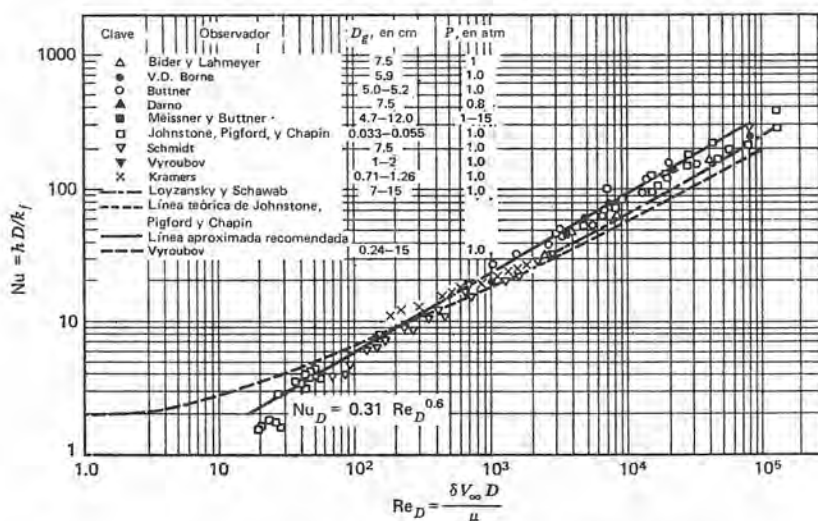


Figura 4.44 Números medios de Nusselt para el flujo de aire sobre una esfera. [De W. H. McAdams, *Heat transmission*, 3a. ed. (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1954), pág. 266. Con permiso del editor.]

5.1-2.5. Los atributos combinados de simplicidad y exactitud razonable hacen que la analogía de Colburn sea la más conveniente de todas las que se han visto. La expresión de la analogía de Colburn es

$$\text{StPr}^{2/3} = \frac{C_f}{2} \quad (5-129)$$

Con esta expresión análoga y las ecuaciones (5-75) y (5-76) para la capa límite turbulenta en una placa plana se puede expresar el coeficiente de transferencia de calor en una capa límite turbulenta en forma adimensional como sigue

$$\text{Nu}_x = 0.0288 \text{Re}_x^{4/5} \text{Pr}^{1/3} \quad (5-196)$$

y

$$\text{Nu}_L = 0.036 \text{Re}_L^{4/5} \text{Pr}^{1/3} \quad (5-197)$$

Cuando se considera una superficie sobre la que el flujo de capa límite es tanto laminar como turbulento, se debe usar una combinación de las ecuaciones (5-100) y (5-197). La transición entre flujo laminar y turbulento dentro de la capa límite ocurre en donde el número local de Reynolds Re_x llega a un valor de aproximadamente 10^6 .

Son posibles muchas variaciones en las condiciones de la pared. Kays⁵⁶ estudia los casos de temperaturas superficiales especificadas arbitrariamente y de flujos de calor de pared. Un resultado específico de interés en el estudio de Kays se aplica al caso de un incremento en la temperatura de la pared por encima del valor del de la corriente libre en el borde de ataque, seguido por un aumento lineal en la temperatura de la pared desde el borde de ataque. Las constantes a y b se refieren al cambio en incrementos y a la variación incremental en la temperatura de la pared, respectivamente; en consecuencia

$$T_o = T_\infty + a + bx \quad (5-198)$$

$$\frac{dT_o}{dx} = b \quad (5-199)$$

En la figura 5.45 se muestra el perfil de la temperatura a lo largo de la dirección de flujo. Para este caso, el flujo de calor queda

$$\frac{q}{A} = 0.332 \frac{k}{x} \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3} (a + 1.612bx) \quad (5-200)$$

y el número local de Nusselt es

$$\text{Nu}_x = \frac{0.332 \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3} (a + 1.612bx)}{a + bx} \quad (5-201)$$

Cuando en estas expresiones $b = 0$ se logra el caso de temperatura constante de pared. Para la constante $a = 0$, el caso es el de aumento lineal en la temperatura de la superficie desde un valor de T_∞ en el borde de ataque. El resultado es 61% más alto que para el caso en que la temperatura de la pared es constante. En consecuen-

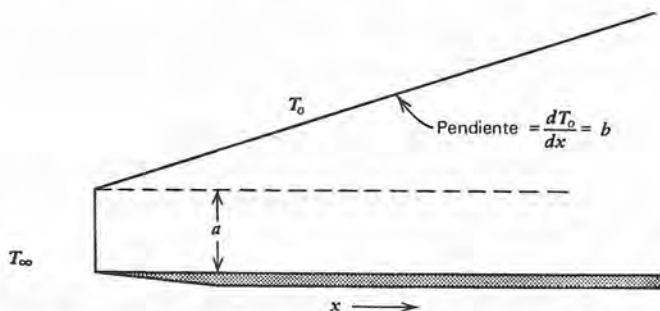


Figura. 5. 45 Variación de la temperatura a lo largo de una placa plana con un incremento de escalón a en el borde de ataque y un incremento lineal bx desde el borde de ataque.

⁵⁶ Kays, págs. 218-222.

cia, es bastante clara la necesidad de tener en cuenta la variación de la temperatura de la pared al predecir o evaluar razones de transferencia de calor.

5.4 TRANSFERENCIA DE CALOR CON CAMBIO DE FASE

Los fenómenos de ebullición y condensación son de gran importancia práctica debido a que pueden involucrar flujos de calor muy grandes con diferencias pequeñas de temperatura.

Aunque la ebullición y la condensación no son procesos convectivos en el mismo sentido que los definidos antes, se emplea el coeficiente de transferencia de calor h para describir el flujo de calor en función de la diferencia de temperatura entre la superficie sólida y el fluido adyacente. Las consideraciones adicionales de características de la superficie, tensión superficial, calores latentes del cambio de fase y otros mecanismos involucrados con los cambios de fase hacen más complejas las correlaciones empíricas y el análisis que en los casos convectivos simples que involucran fluidos de una sola fase.

La ebullición y la condensación involucran cambios entre las fases líquida y de vapor de un fluido. En las siguientes secciones se consideran estos fenómenos por separado.

5.4-1 Transferencia de calor con ebullición

En el fenómeno de ebullición, agregar energía térmica a un líquido saturado tiene como consecuencia un cambio de la fase líquida a la de vapor a la misma temperatura. Se pueden transferir cantidades relativamente grandes de calor cuando ocurre la ebullición; en consecuencia, en determinados casos este puede ser el mecanismo de mayor importancia en la transferencia de calor. En otros casos puede ser que el resultado deseado de un proceso de intercambio de calor sea la formación de vapor de un líquido; es vital la necesidad de conocer las razones de transferencia de calor y de los mecanismos de control para lograr un proceso bien diseñado y de eficiente operación.

Cuando ocurre la ebullición en una superficie caliente sumergida en un líquido en reposo, se clasifica el caso como de *ebullición en estanque*. Si el fluido se mueve con respecto a una superficie caliente, ocurre la *ebullición de flujo*.

5.4-1.1 Los regímenes de ebullición; la curva de ebullición

En la figura 5.46 se muestra un enfoque bastante usado y muy descriptivo para comprender el mecanismo de la transferencia de calor por ebullición. La gráfica corresponde al flujo de calor contra la

diferencia de temperatura entre una superficie caliente y un líquido saturado adyacente. Se puede considerar que la superficie en ebullición es un alambre calentado por electricidad; en consecuencia, es fácil controlar el flujo de calor por medio de la caída de voltaje a través del alambre de resistencia fija. Para fines del estudio se separó la curva de flujo de calor en seis regímenes. Los valores mostrados para $T_o - T_{sat}$ son representativos del agua saturada a la presión atmosférica. Los distintos fluidos se comportan en la misma forma; sin embargo, las diferencias en las temperaturas pueden ser distintas a las usadas aquí para los fines de la discusión.

Régimen I. El mecanismo de intercambio de energía para una temperatura de superficie de alambre que está a muy pocos grados por encima del líquido saturado adyacente es el de convección natural. La transferencia de calor ocurre por medio de corrientes de convección natural que transportan líquido supercalentado desde la superficie caliente a la superficie libre del líquido, en donde ocurre la evaporación.

Régimen II. Al aumentar la temperatura superficial del alambre, se forman burbujas de vapor de agua en la superficie del alambre. Cuando las burbujas llegan a un tamaño suficiente para que las fuerzas boyantes superen las fuerzas de la tensión superficial, se desprenden, se elevan entre el líquido más frío y se condensan antes de llegar

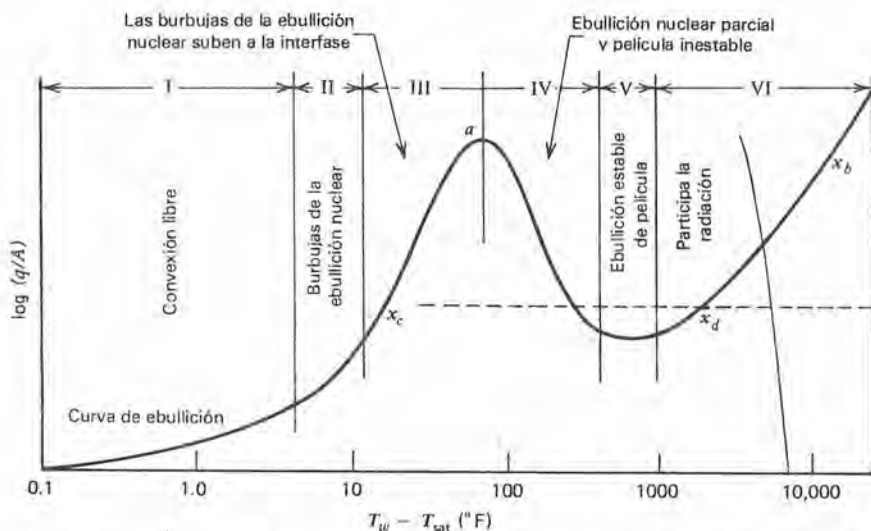


Figura 5.46 Flujo de calor contra la diferencia de temperatura para la ebullición de estanque de agua en un alambre horizontal a presión atmosférica.

a la superficie libre del líquido. Se observa que se forman las burbujas de vapor en localizaciones favorecidas de la superficie del alambre; a estas localizaciones se les denomina *lugar activos* o *lugares de nucleación*.

Régimen III. Cuando se aumenta el nivel de energía en el alambre de manera que se eleva todavía más la temperatura de la superficie, se forman burbujas, se desprenden y se elevan con frecuencia e intensidad cada vez más grandes. Ahora las burbujas llegan a la superficie libre y despiden el vapor que se forma en la superficie del alambre directamente a la atmósfera ambiente. En este régimen, la superficie del alambre nunca está completamente cubierta con vapor y las burbujas todavía se forman en localizaciones preferidas del alambre. Al tipo de ebullición que ocurre se llama *ebullición en núcleos*.

Se deben notar los valores relativamente altos de flujo de calor posibles en el régimen de ebullición en núcleos. Con el agua son posibles flujos de calor del orden 10^5 Btu/hr-ft² para una diferencia de temperaturas de aproximadamente 100°F. En consecuencia, el valor equivalente de h es de 1000 Btu/hr-ft²-°F. Este alto valor posible de h , con una diferencia relativamente pequeña de temperatura, hace que el régimen de ebullición en núcleos sea de mucha importancia práctica.

Se debe considerar brevemente la razón de las altas transferencias de calor en el régimen de núcleo. La contribución más importante a la transferencia de calor es la agitación violenta del líquido conforme se forman las burbujas, se separan de la superficie sólida y se elevan con rapidez en medio del líquido. La circulación del líquido junto a la superficie caliente, parte de la cual no está cubierta por el vapor, es la principal responsable de las altas razones de la transferencia de calor. Es significativa la energía involucrada en la formación de burbujas de vapor que posteriormente se elevan a través del líquido y entran al aire, aunque no la parte más importante del proceso total de transferencia de calor por ebullición de núcleos.

Al aumentar la diferencia de temperatura, mientras está en el rango de núcleos, la razón del aumento de flujo de calor es bastante rápida. El proceso de formación de burbujas y de separación en la superficie caliente aumenta en frecuencia y se "activa" una mayor superficie. Conforme aumenta la superficie cubierta de vapor, menor es la que está en contacto con el líquido que se barre; por tanto, a flujos cada vez mayores de calor, el potencial de transferencia de calor del proceso de ebullición de núcleos se aproxima a un máximo. Con el tiempo se llega al punto en que un aumento en la temperatura de la superficie hace que gran parte de la superficie caliente esté cubierta con vapor de manera que disminuye el potencial del

flujo de calor. Al punto de máximo flujo de calor, designado por a en la figura 5.46, se denomina el *punto de quemado* por motivos que pronto se verán. El punto de quemado representa el extremo superior del régimen III. En el agua, a presión atmosférica, el quemado ocurre para ΔT ligeramente arriba de 100°F y un flujo de calor del orden de $5 \times 10^5 \text{ Btu/hr-ft}^2$.

Régimen IV. A diferencias de temperaturas superiores al punto de quemado, mayor parte de la superficie original queda cubierta por la película de vapor al aumentar ΔT . La transferencia de calor a través de la película se hace primero por la conducción, luego por el transporte directo conforme se “arranca” el vapor de la película de la misma y se va a la superficie por las fuerzas boyantes y por la agitación del líquido provocada por este movimiento de las burbujas de vapor. Gran parte de la superficie calentada se cubre continuamente por la película de vapor en esta región con cantidades cada vez más pequeñas de la superficie, expuestas directamente al líquido saturado. En esa forma decrece continuamente el potencial de la transferencia de calor para ΔT 's mayores hasta que toda la superficie queda cubierta continuamente por la película de vapor.

Se llama *ebullición de película* al fenómeno que ocurre cuando la superficie está cubierta por vapor. Con frecuencia se llama régimen de *ebullición de transición* al régimen IV, ya que ocurren tanto el fenómeno de ebullición de núcleos como el de ebullición de película.

Cerca del punto de quemado hay mayor parte de la superficie con ebullición de núcleos, en tanto que la proporción de superficie que experimenta la ebullición de película aumenta conforme aumenta ΔT . Por razones que se mencionarán posteriormente, no se puede mantener la operación estable en el régimen IV para superficies calentadas eléctricamente.

Régimen V. A este régimen se le llama *régimen de ebullición de película estable* y se caracteriza por un mínimo en la curva de ebullición como se aprecia en la figura 5.46. En el agua a presión atmosférica, se logra la ebullición de película estable a valores de ΔT de 500°F .

Régimen VI. Este régimen está caracterizado por diferencias muy grandes de temperatura entre la superficie y el líquido saturado. La ebullición todavía es del tipo de película; sin embargo, las diferencias de temperatura son tan grandes que se hace significativa la transferencia de calor radiante, al grado que es la que controla, con lo que la curva de flujo de calor nuevamente se eleva conforme se eleva ΔT .

5.4-1.2 Quemado

Ahora se estudia más detalladamente la naturaleza de una superficie calentada eléctricamente sobre la que ocurre la ebullición. A un nivel de flujo de calor correspondiente al punto *b* en la figura 5.46, un pequeño cambio en el flujo de calor hace que la temperatura de la superficie varíe ligeramente, con lo que la condición de operación cambia en forma que el nuevo punto todavía está dentro del régimen de ebullición de núcleos.

Sin embargo, si se llega al punto de quemado, un pequeño aumento en el flujo de calor hace que la temperatura de la superficie se eleve como antes; la curva de ebullición muestra que un aumento en ΔT por encima del quemado está acompañado por una disminución en la capacidad de transferencia de calor de la superficie. El resultado es un aumento continuo en la temperatura de la superficie y una disminución continua en la transferencia de calor, situación que empeora continuamente. Este proceso seguiría hasta llegar al punto *c* en el régimen VI. En este punto la temperatura requerida de la superficie es tan elevada que mucho antes el material ya se hubiera fundido y abierto el circuito eléctrico de calentamiento. Por tanto, se ve que el término "quemado" describe claramente el proceso físico que ocurre. Por razones obvias nunca se puede lograr el régimen de ebullición de transición para la operación estable de una superficie calentada eléctricamente.

Se puede lograr la operación estable en todo punto de la curva de ebullición si se controla ΔT en vez del flujo de calor, lo que se ha logrado calentando la superficie con vapores de fluidos en condensación. Aoki⁵⁷ describe tal sistema y las consideraciones necesarias.

En este punto cabe hacer notar que en la transferencia de calor de ebullición se encuentra un comportamiento bastante anormal. En general, se espera que la transferencia de calor aumente continuamente con los valores crecientes de ΔT . Se ha visto que esto no sucede cuando ocurre la ebullición debido a la formación de una película aislante de vapor.

5.4-1.3 Correlaciones de datos de transferencia de calor en ebullición

En esta sección se presentan algunas de las correlaciones más aceptadas de datos experimentales para la transferencia de calor de ebullición.

⁵⁷ T. Aoki, "An Experimental Study of Transition Pool Boiling" (Tesis para doctorado, Oregon State University, 1970).

Rohsenow⁵⁸ desarrolló la siguiente expresión empírica para la ebullición estable de núcleos de estanque, basada en los datos que obtuvo Addoms.⁵⁹ En la figura 5.47 se muestra una gráfica de los datos de Addoms.

$$\frac{c_{pL}(T_o - T_{\text{sat}})}{h_{fg}} = c_{sf} \left[\frac{q/A}{\mu_L h_{fg}} \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho_L - \rho_v)}} \right]^{1/3} \text{Pr}_L^{1.7} \quad (5-202)$$

En la ecuación (5-202) los términos tienen sus significados usuales; los subíndices L y v se refieren al líquido saturado y al vapor saturado respectivamente. El término c_{sf} es una constante empírica cuyo valor depende de la combinación específica de fluido y materiales de superficie calentada involucrados en un caso de ebullición. La línea de la figura 5.47 es para un valor de c_{sf} igual a 0.013. La tabla 5.7, adoptada de Rohsenow y Choi,⁶⁰ da valores de c_{sf} correspondientes a distintas combinaciones fluido/superficie.

Para el punto de máximo flujo de calor, Rohsenow y Griffith⁶¹ han correlacionado datos en la forma

$$\frac{(q/A)_{\text{máx}}}{\rho_v h_{fg}} = 143 g^{1/4} \left(\frac{\rho_L - \rho_v}{\rho_v} \right)^{0.6} \quad (5-203)$$

en donde g es la aceleración de gravedad en G 's; los subíndices L y v se refieren a las propiedades en estado líquido y de vapor respectivamente; y los términos restantes tienen los significados usuales.

En el caso de *ebullición estable de estanque* de película, se recomiendan las siguientes expresiones. Para tubos horizontales, Bromley⁶² sugiere la ecuación

$$h = 0.62 \left[\frac{k_v^3 \rho_v (\rho_L - \rho_v) g (h_{fg} + 0.4 c_{pv} \Delta T)}{D_o \mu_v (T_o - T_{\text{sat}})} \right]^{1/4} \quad (5-204)$$

en donde $\Delta T = T_o - T_{\text{sat}}$ y D_o es el diámetro exterior del tubo.

Para una superficie plana horizontal, Berenson⁶³ sugiere una forma modificada de la ecuación (5-204) en que se sustituye el diámetro D_o del tubo por $[\sigma/g(\rho_L - \rho_v)]^{1/2}$. La expresión resultante es

⁵⁸ W. H. Rohsenow, *Trans. A.S. M.* 74 (1952): 969.

⁵⁹ J. N. Addoms, Tesis para doctorado, Departamento de ingeniería química, Massachusetts Institute of Technology, junio 1948.

⁶⁰ W. M. Rohsenow y H. Choi, *Heat, Mass, and Momentum Transfer*, (Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall, 1961).

⁶¹ W. M. Rohsenow y P. Griffith, AICHE-ASME Heat Transfer Symposium, Louisville, Ky., 1955.

⁶² L. A. Bromley, *Chem. Engr. Progr.* 46 (mayo 1950): 5,221; Bromley et al., *Ind. Engr. Chem.* 45 (1953): 2639.

⁶³ P. Berenson, Publicación 18 de AICHE, Heat Transfer Conference, Buffalo, N. Y. (1969).

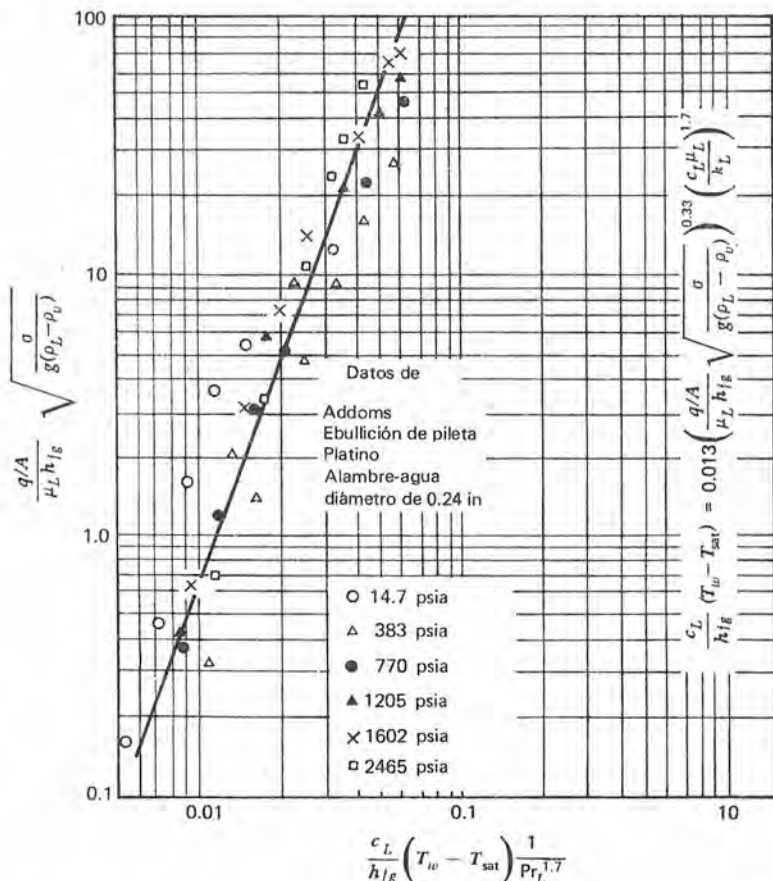


Figura 5.47 Datos para la ebullición estable de núcleos de estanque. [De W. M. Rohsenow y H. Choi, *Heat, Mass and Momentum Transfer* (Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc., 1961), pág. 224. Con permiso del editor.]

$$h = 0.425 \left[\frac{k_{vf}^3 \rho_v (\rho_L - \rho_v) g (h_{fg} + 0.4 c_{pv} \Delta T)}{\mu_{vf} (T_o - T_{sat}) \sqrt{\sigma / g (\rho_L - \rho_v)}} \right]^{1/4} \quad (5-205)$$

donde se deben evaluar k_{vf} , ρ_v y μ_{vf} a la temperatura de la película.

Para un tubo vertical, Hsu y Westwater⁶⁴ correlacionaron datos experimentales según

$$h = 0.0020 \text{ Re}^{0.6} \left[\frac{\mu_v^2}{g \rho_v (\rho_L - \rho_v) k_v^3} \right]^{-1/3} \quad (5-206)$$

en que

$$\text{Re} = \frac{4w}{\pi D_o \mu_v} \quad (5-207)$$

⁶⁴ Y. Y. Hsu y J. W. Westwater, *AIChE Jour.* 4 (1958) : 59.

Tabla 5.7 Valores de c_{sf} para la ecuación (5-199)

Combinación fluido/superficie	c_{sf}
agua/níquel	0.006
agua/platino	0.013
agua/cobre	0.013
agua/latón	0.006
CCl_4 /cobre	0.013
benceno/cromo	0.010
n-pentano/cromo	0.015
etanol/cromo	0.0027
alcohol isopropilo/cobre	0.0025
KOH 35%/cobre	0.0054
KOH 50%/cobre	0.0027
alcohol <i>n</i> butilo/cobre	0.0030

donde w es la razón de flujo del vapor en lb_m/hr en el extremo superior del tubo. Para condiciones semejantes, Hsu⁶⁵ declara que las razones de transferencia de calor son mayores para la ebullición de película con tubos verticales que para tubos horizontales.

Para la ebullición combinada con la convección, como sucede en el caso de ebullición de flujo, los flujos de calor asociados con cada mecanismo se pueden sumar sencillamente según

$$\frac{q}{A} \Big|_{\substack{\text{convección} \\ \text{y ebullición}}} = \frac{q}{A} \Big|_{\text{convección}} + \frac{q}{A} \Big|_{\text{ebullición}} \quad (5-208)$$

Considerando la radiación en un caso de ebullición, se puede determinar el efecto combinado de acuerdo con

$$h_{\text{total}} = h_b \left(\frac{h_b}{h_{\text{total}}} \right)^{1/2} + h_r \quad (5-209)$$

en donde h_{total} es el coeficiente de transferencia total de calor y h_b y h_r son los coeficientes de ebullición de transferencia de calor por radiación respectivamente. En el capítulo 6 se estudia el coeficiente de radiación h_r .

5.4-2 Transferencia de calor con vapores de condensación

Ahora se considera el efecto opuesto a la ebullición, específicamente la transferencia de calor asociada con un cambio de vapor a la fase líquida. La condensación ocurre cuando se mantiene una superficie a

⁶⁵ S. T. Hsu, *Engineering Heat Transfer*, (Princeton, N. J.: Van Nostrand, 1963).

una temperatura inferior a la de saturación de un vapor adyacente; el líquido que se condensa se colecta en una superficie horizontal plana o fluye bajo la influencia de la gravedad si la superficie y su orientación lo permiten.

Bajo la mayoría de las circunstancias, el líquido condensado moja la superficie, se extiende y forma una película en toda la superficie. A este tipo de condensación se le conoce como *condensación de película*. Cuando el líquido no moja la superficie, la condensación se forma por medio de gotitas que corren a lo largo de una superficie inclinada, incorporándose con otras gotitas que tocan. Esta es la *condensación por goteo*. Cuando ocurre la condensación por película, la superficie queda completamente cubierta por una película líquida. Entonces la transferencia de calor necesaria para la condensación en la interfase líquido-vapor debe ser por conducción a través de la película líquida. Al aumentar el espesor de la película, disminuye la razón de transferencia de calor, y con ello la razón de condensación. Por otra parte, con la condensación por goteo, parte de la superficie fría siempre está en contacto con el vapor y no está sujeta al efecto aislante de la capa líquida. En consecuencia, la condensación por goteo está asociada con mayores razones de transferencia de calor que la condensación por película. Es difícil lograr la condensación por goteo y mantenerla durante períodos extendidos; en consecuencia, normalmente se diseña al equipo que involucra el fenómeno de condensación en base a que ocurre la condensación de película.

5.4-2.1 *Condensación de Película; el modelo de película de Nusselt*

Nusselt⁶⁶ analizó en 1916 el problema de condensación de vapor puro en una película en una pared vertical plana. Su resultado todavía es válido y el desarrollo ayuda a comprender el mecanismo involucrado. En el análisis que sigue se repite su enfoque.

Los términos usados en el desarrollo siguiente están relacionados con la ilustración de la figura 5.48. El espesor de la película condensada δ aumenta con x desde un valor de 0 $x = 0$.

El enfoque implica igualar la transferencia de energía asociada con el proceso de condensación a la que se puede conducir por medio de una película líquida en flujo laminar. Se puede obtener un coeficiente de transferencia de calor, usando la relación de definición de la forma

⁶⁶ W. Nusselt, *Zeitschr. d. ver. deutsch. Ing.* 60 (1916): 514.

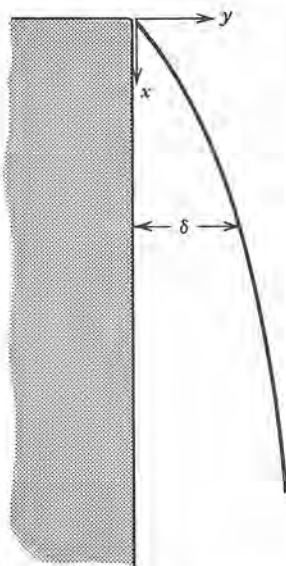


Figura 5.48 Condensación de película en una pared vertical plana.

$$h = \frac{q/A}{T_{\text{sat}} - T_o} = \frac{k}{\delta} \quad (5-210)$$

en donde T_{sat} y T_o se refieren a la temperatura de saturación del fluido a la presión que prevalece y la temperatura de la pared, respectivamente.

Se determina la razón del líquido condensado de un análisis del caso de flujo fluido; se evalúa el perfil de la velocidad, la razón de flujo y el cambio en la razón de flujo líquido a la vez.

Suponiendo el flujo laminar, se aplica la ecuación de Navier-Stokes en la forma incomprensible en la dirección de las x . Bajo condiciones estables de flujo bidimensional, suponiendo que la película crece en forma relativamente lenta, la ecuación (2-66) se reduce a

$$0 = -\rho g - \frac{dP}{dx} + \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} \quad (5-211)$$

Se puede eliminar el término de la presión debido a que la interfase líquido-vapor se mantiene a presión constante. Se puede separar e integrar dos veces el resto de la expresión y aplicar las condiciones de frontera $v_x = 0$ en $y = 0$ y $(dv_x/dy) = 0$ en $y = \delta$ lo que da, para v_x ,

$$v_x = \frac{\rho g \delta^2}{\mu} \left[\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right] \quad (5-212)$$

Para incluir la posibilidad que la densidad de vapor ρ_v sea significativa con respecto a la densidad ρ_L del líquido (como en el caso de un sistema a alta presión), se modifica la ecuación (5-212) en la forma

$$v_x = \frac{(\rho_L - \rho_v)g\delta^2}{\mu} \left[\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right] \quad (5-213)$$

A partir de esta ecuación se calcula la razón de flujo del volumen Γ , por ancho unitario de película para v_x en la siguiente forma:

$$\Gamma = \int_A v_x dA = \int_0^\delta v_x(1) dy$$

Para toda $x > 0$, se tiene

$$\Gamma(x) = \frac{(\rho_L - \rho_v)g \delta(x)^3}{3\mu} \quad (5-214)$$

Ahora se puede expresar la razón a la que cambia la razón de flujo líquido en la forma

$$d\Gamma = \frac{(\rho_L - \rho_v)g \delta^2 d\delta}{\mu} \quad (5-215)$$

La energía asociada con esta razón de condensación incluye el calor de condensación más el calor liberado conforme se enfría el líquido saturado a la temperatura promedio de la película líquida. Este flujo de calor está expresado en la forma

$$\frac{q_y}{A} = \rho_L \frac{d\Gamma}{dx} \left[h_{fg} + \frac{1}{\rho_L \Gamma} \int_0^\delta \rho_L v_x c_{pL} (T_{\text{sat}} - T) dy \right] \quad (5-216)$$

Un perfil lineal de temperatura, expresado en la forma $T = T_o + (T_{\text{sat}} - T_o)(y/\delta)$ da

$$\frac{q_y}{A} = \rho_L \frac{d\Gamma}{dx} [h_{fg} + (3/8)c_{pL}(T_{\text{sat}} - T_o)] \quad (5-217)$$

El anterior flujo de calor se debe transferir por conducción (ya que el flujo es laminar) a través de la película líquida de espesor δ de acuerdo con

$$\frac{q_y}{A} = \frac{k_L}{\delta} (T_{\text{sat}} - T_o) \quad (5-218)$$

Ahora se pueden igualar las ecuaciones (5-217) y (5-218), con $d\Gamma$ expresada en la forma dada por la ecuación 5-215, para obtener

$$\frac{(\rho_L - \rho_v)g\delta^2}{\mu} d\delta = \frac{k_L(T_{\text{sat}} - T_o)}{\rho_L \delta [h_{fg} + (3/8)c_{pL}(T_{\text{sat}} - T_o)]}$$

Se puede simplificar esta expresión y despejar el espesor δ de la película como sigue

$$\delta = \left\{ \frac{4k_L\mu(T_{\text{sat}} - T_o)x}{\rho_L g (\rho_L - \rho_v)[h_{fg} + (3/8)c_{pL}(T_{\text{sat}} - T_o)]} \right\}^{1/4} \quad (5-219)$$

Evaluando h_x en la forma sugerida en la ecuación (5-20), se obtiene

$$h_x = \left\{ \frac{\rho_L g k_L^3 (\rho_L - \rho_v)[h_{fg} + (3/8)c_{pL}(T_{\text{sat}} - T_o)]}{4\mu(T_{\text{sat}} - T_o)x} \right\}^{1/4} \quad (5-220)$$

Se tiene un coeficiente medio de transferencia de calor para una superficie de longitud L por

$$\begin{aligned} h_L &= \frac{1}{L} \int_0^L h_x dx \\ &= 0.943 \frac{\rho_L g k_L^3 (\rho_L - \rho_v)[h_{fg} + (3/8)c_{pL}(T_{\text{sat}} - T_o)]}{L\mu(T_{\text{sat}} - T_o)} \end{aligned} \quad (5-221)$$

Para fluidos que tienen $\text{Pr} > 0.5$ y un valor de $c_{pL}(T_{\text{sat}} - T_o)/h_{fg} < 1.0$, Rohsenow⁶⁷ sugiere remplazar el término $[h_{fg} + 3/8c_{pL}(T_{\text{sat}} - T_o)]$ por $[h_{fg} + 0.68c_{pL}(T_{\text{sat}} - T_o)]$, y se encuentra que esta expresión es bastante congruente con los datos experimentales. La expresión recomendada para los fluidos que se condensan en una pared plana inclinada un ángulo θ de la horizontal es

$$h_L = 0.943 \left[\frac{\rho_L g \sin \theta k_L^3 (\rho_L - \rho_v)[h_{fg} + 0.68c_{pL}(T_{\text{sat}} - T_o)]}{L\mu(T_{\text{sat}} - T_o)} \right] \quad (5-222)$$

5.4-2.2 Condensación de película; consideraciones de flujo turbulento

El flujo en una película de condensación se hace turbulento cuando el espesor de la película se hace notable, o sea cuando las razones de condensación son grandes o cuando la superficie fría es larga. En tales casos, ya no es válida la suposición laminar, inherente a todas las expresiones desarrolladas hasta este momento.

Como se espera, el criterio para el flujo turbulento es número de Reynolds. En este caso, la forma que toma Re es

$$\text{Re} = \frac{D_{\text{eq}} v_{\text{prom}} \rho}{\mu} = \frac{4A}{P} P \frac{\Gamma}{\rho A \mu} = \frac{4\Gamma}{\mu} \quad (5-223)$$

⁶⁷ W. M. Rohsenow, *Trans. A. S. M. E.* 78 (1956): 1645.

en donde, como antes, Γ , es la razón de flujo de masa del condensado por ancho unitario de película. Para un tubo vertical, Γ es la razón de flujo de masa total dividida entre πD . En el caso de una película de condensado, el número crítico de Reynolds es 1800.

Rohsenow y Choi⁶⁸ sugirieron un procedimiento analítico para los casos en que una película de condensado está en flujo turbulento. En la figura 5.49 se muestra el coeficiente de transferencia de calor asociado con la condensación en superficies verticales, en función tanto del número de Reynolds de película, como de la magnitud del esfuerzo cortante en la interfase vapor-condensado. En esta figura se

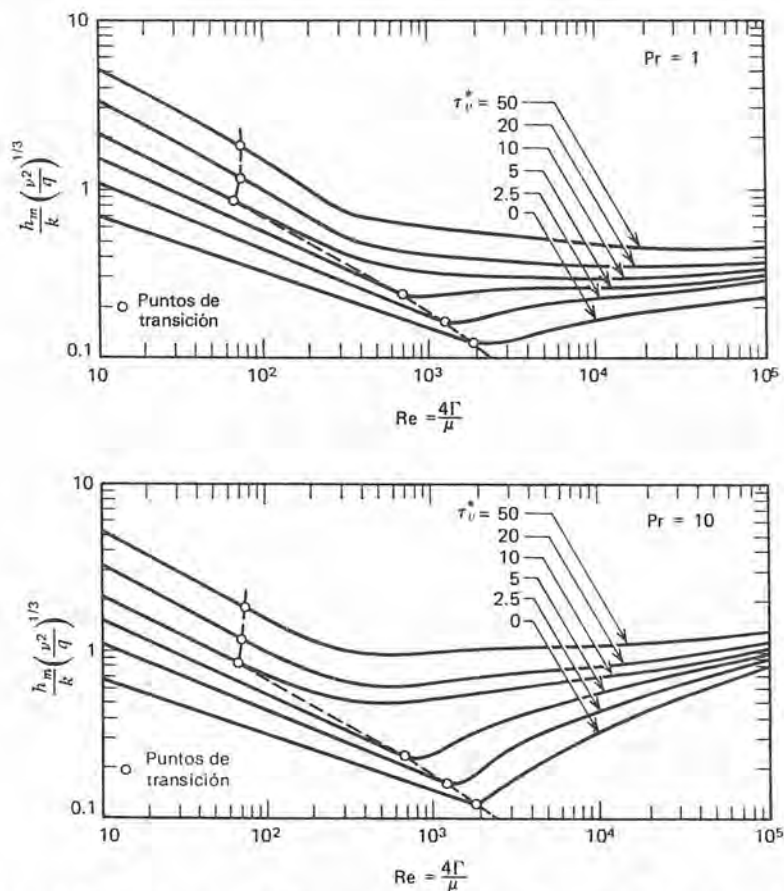


Figura 5.49 Coeficiente de transferencia de calor para flujo turbulento de una película condensada en superficies verticales. [De W. M. Rosenow y H. Choi, *Heat, Mass, and Momentum Transfer* (Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc., 1961). Con permiso del editor.]

⁶⁸ Rohsenow y Choi, op. cit.

puede determinar el coeficiente de transferencia para valores de Pr de 1 y 10. El parámetro τ_v^* representa el esfuerzo de corte entre fases en forma adimensional; se define en la forma

$$\tau_v^* = \frac{\tau_v}{g(\rho_L - \rho_v)(\nu^2/g)^{1/3}} \quad (5-224)$$

En la ecuación (5-224), τ_v es el esfuerzo cortante promedio en la interfase. Se calcula a partir de

$$\tau_v = \frac{f G_{v \text{ prom}}^2}{2 \rho_v} \quad (5-225)$$

para lo cual el coeficiente de fricción f se determina de la gráfica dada como figura 5.50. La velocidad de masa promedio del vapor, $G_{v \text{ prom}}$, se determina de las condiciones en la parte superior e inferior de la superficie de condensación, de acuerdo con

$$G_{v \text{ prom}} = 0.4(G_{v \text{ superior}} + 1.5G_{v \text{ fondo}}) \quad (5-226)$$

En el ejemplo 5.9 se ilustra el uso de estas figuras y ecuaciones.

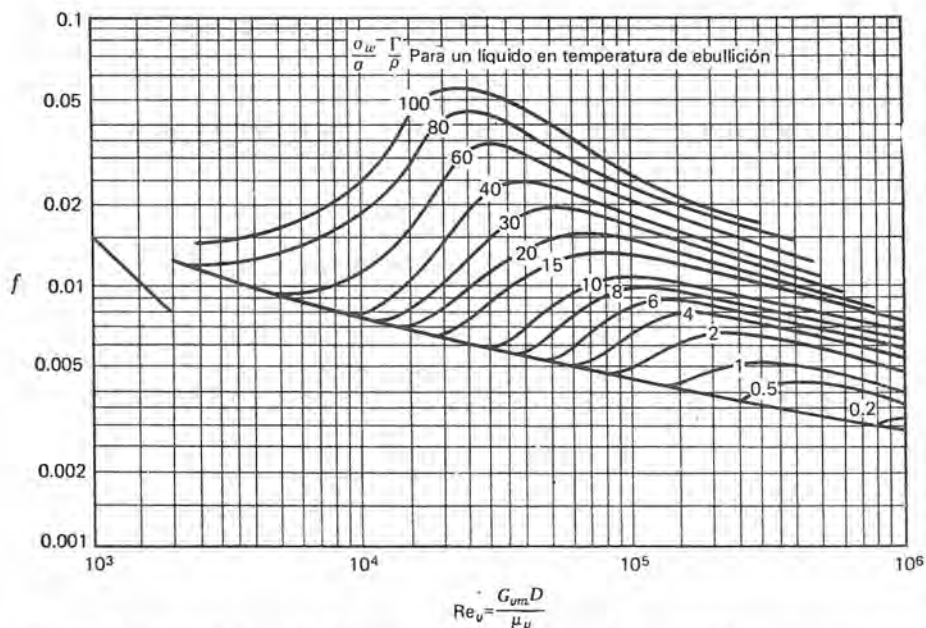


Figura 5.50 Coeficiente de fricción para un gas que fluye paralelo a una capa líquida en una pared. (De O. P. Bergelin, P. K. Kegel, F. G. Carpenter y C. Gozley, Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, Berkeley, Calif., 1949. Con permiso del editor.)

Ejemplo 5.9

Se desea condensar 30 lb/min de vapor saturado a 250°F, usando un tubo de 2 in de diámetro interior cuya superficie se mantiene a 150°F

¿Cuál es la longitud mínima del tubo requerido?

Con un tubo de longitud mínima, $G_{v \text{ inter}} = 0$, y

$$G_{v \text{ avg}} = \frac{0.4(30 \text{ lb/min})(60 \text{ min/hr})}{\pi/4(2/12 \text{ ft})^2} \\ = 33,000 \text{ lb/hr-ft}^2$$

Ahora se puede calcular el número de Reynolds del vapor.

$$\text{Re}_v = \frac{(33,000 \text{ lb/hr-ft}^2)(2/12 \text{ ft})}{(0.89 \times 10^{-5} \text{ ft}^2/\text{sec})(3600 \text{ sec/hr})} = 172,000$$

Para leer f de la figura 5.51, se debe conocer la cantidad $(\sigma_\omega/\sigma)(\Gamma/\rho)$. La tensión superficial relativa $\sigma_\omega/\sigma = 1$, y $\Gamma_{L \text{ prom}}$ es

$$\Gamma_{L \text{ prom}} = \frac{\left(\frac{0 + 30 \text{ lb}}{2 \text{ min}}\right)\left(\frac{60 \text{ min}}{\text{hr}}\right)}{\pi(2/12 \text{ ft})} = 1720 \frac{\text{lb}}{\text{hr-ft}}$$

por lo que

$$\frac{\sigma_\omega}{\sigma} \frac{\Gamma_{L \text{ prom}}}{\rho} = \frac{1720 \text{ lb/hr-ft}}{59.9 \text{ lb/ft}^3} = 28.7 \text{ ft}^2/\text{hr}$$

El valor correspondiente de f es 0.013.

En este punto también se puede determinar el número de Reynolds de la película de salida en esta forma

$$\text{Re}_{L \text{ exit}} = \frac{4\Gamma_{L \text{ exit}}}{\mu} = \frac{4(3440 \text{ lb/hr-ft})}{0.195 \times 10^{-3} \text{ lb/sec-ft} \left(3600 \frac{\text{sec}}{\text{hr}}\right)} \\ = 19,600$$

y se ve que la película condensada está en flujo turbulento.

Habiendo determinado f , se puede evaluar τ_v y τ_v^* en la siguiente forma:

$$\tau_v = 0.013 \frac{(33,000 \text{ lb}_m/\text{hr-ft}^2)^2}{2(0.0723 \text{ lb}_m/\text{ft}^3) \left(32.2 \frac{\text{lb}_m\text{-ft}}{\text{seg}^2\text{-lb}_f}\right) \left(3600 \frac{\text{seg}}{\text{hr}}\right)^2} \\ = 0.235 \text{ lb}_f/\text{ft}^2$$

y

$$\tau_v^* = \frac{0.235 \text{ lb}_f/\text{ft}^2 (32.2 \text{ lb}_m\text{ft}/\text{seg}^2 \text{ lb}_f)}{(32.2 \text{ ft}/\text{seg}^2) \left(59.9 \frac{\text{lb}_m}{\text{ft}^3}\right) \left[\frac{(0.395 \times 10^{-5} \text{ ft}^2/\text{seg}^2)^2}{32.2 \text{ ft}/\text{seg}^2}\right]^{1/3}} \\ = 49.9$$

Usando la figura 5.49, se obtienen valores de $(hm/k)(v^2/g)^{1/3}$ en $Pr = 1$ y 10 , respectivamente, iguales a 0.58 y 1 . Para $Pr = 1.83$, el valor interpolado de $(hm/k)(v^2/g)^{1/3}$ es 0.63 . Las cantidades necesarias para completar la solución son como sigue ahora:

$$h = \frac{0.63k}{(v^2/g)^{1/3}} = \frac{0.63(0.383 \text{ Btu/hr-ft-}^\circ\text{F})}{(\text{ft}/12730)} = 3150 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^\circ\text{F}$$

$$A = \frac{q}{h \Delta T} = \frac{(30 \text{ lb}_m/\text{min})(946 \text{ Btu/lb}_m) \left(\frac{60 \text{ min}}{\text{hr}} \right)}{(3150 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^\circ\text{F})(100^\circ\text{F})} = 5.40 \text{ ft}^2$$

$$L = A/\pi D = 5.40 \text{ ft}^2/\pi(2/12 \text{ ft}) = 10.32 \text{ ft}$$

5.4-2.3 Condensación de película; cilindros horizontales solos

Nusselt⁶⁹ propuso la siguiente expresión para el coeficiente medio de transferencia de calor en el caso de condensación de película en un cilindro horizontal de diámetro D :

$$h_{\text{prom}} = 0.725 \left\{ \frac{\rho_L g (\rho_L - \rho_v) k^3 [h_{fg} + (3/8)c_{pL}(T_{\text{sat}} - T_o)]}{\mu D (T_{\text{sat}} - T_o)} \right\}^{1/4} \quad (5-227)$$

El lector observará la semejanza entre la ecuación (5-227) para un cilindro horizontal y la ecuación (5-221) para un cilindro vertical. Se pueden combinar estas expresiones para obtener la relación

$$\frac{h_{\text{vert}}}{h_{\text{horiz}}} = \frac{0.943}{0.725} \left(\frac{D}{L} \right)^{1/4} = 1.3 \left(\frac{D}{L} \right)^{1/4} \quad (5-228)$$

Con $h_{\text{vert}} = h_{\text{horiz}}$, se puede resolver la ecuación (5-228) para obtener el resultado siguiente

$$\frac{L}{D} = 2.86 \quad (5-229)$$

Este resultado indica que para un tubo con razón de longitud a diámetro de 2.86 , hay cantidades iguales de transferencia de calor para la orientación horizontal como para la vertical. Al aumentar la razón L/D es posible tener mayor transferencia de calor con un tubo horizontal.

⁶⁹ Nusselt, 569.

5.4-2.4 Condensación de película; bancos de tubos horizontales

En el caso de varios tubos horizontales apilados en un banco vertical, el vapor que se condensa en el tubo de más arriba fluye hacia abajo y aumenta la cantidad de condensado en el tubo que está abajo del mismo. La cantidad total de condensado formada en un banco vertical es el efecto acumulativo de la transferencia de calor a todos los tubos en el banco. Obviamente, la transferencia de calor y la razón de condensación para un tubo dado están afectados por la orientación del tubo en el banco y por su localización con relación a los otros. Nusselt⁷⁰ analizó el caso de la condensación de película en un banco vertical de n tubos horizontales y sugirió la siguiente ecuación para el coeficiente promedio de transferencia de calor:

$$h_{\text{prom}} = 0.725 \left\{ \frac{\rho_L g (\rho_L - \rho_v) k^3 [h_{fg} + (3/8)(T_{\text{sat}} - T_o)]}{n D \mu (T_{\text{sat}} - T_o)} \right\} \quad (5-230)$$

Chen⁷¹ observó que los valores de h_{prom} de la ecuación (5-230) están por debajo de los resultados experimentales. Incluyó el efecto de la condensación en la capa líquida entre los tubos y obtuvo la expresión

$$h_{\text{prom}} = 0.725 \left[1 + 0.02 \frac{c_{pL}(T_{\text{sat}} - T_o)}{h_{fg}} (n - 1) \right] \times \left[\frac{\rho_L g (\rho_L - \rho_v) k^3 [h_{fg} + (3/8)(T_{\text{sat}} - T_o)]}{n D \mu (T_{\text{sat}} - T_o)} \right]^{1/4} \quad (5-231)$$

que es bastante congruente con los valores de los resultados experimentales. La ecuación (5-231) es válida para los valores de $[c_{pL}(T_{\text{sat}} - T_o)(n - 1)/h_{fg}] > 2$.

5.5 RESUMEN

En este capítulo se han considerado con mucho detalle los procesos de intercambio de energía que ocurren en una superficie sólida y un fluido adyacente.

Al examinar los fundamentos de la convección, se consideró en primer lugar la naturaleza de la interacción fluido-sólido en un caso de flujo. Se dio el concepto de una capa límite y se desarrolló el análisis de capa límite tanto para casos de flujo interno como de flujo

⁷⁰ Ibid.

⁷¹ M. M. Chen, *A. S. M. E. Trans., Serie C* 83 (1961): 48.

externo. Los parámetros importantes presentados incluyen los coeficientes de arrastre, de fricción superficial, el factor de fricción de Fanning, la difusividad turbulenta y la longitud de mezclados de Prandtl. Las técnicas empleadas para el análisis de capa límite son soluciones exactas de las ecuaciones diferenciales dominantes y las soluciones integrales aproximadas. Se examinó la naturaleza del flujo laminar al igual que la del flujo turbulento.

Se estudiaron los aspectos fundamentales de la transferencia convectiva de calor en forma análoga a la del flujo de fluidos. Se estudió el concepto de la capa límite térmica y se analizó por medios exactos, integrales y analógicos. Los parámetros importantes adimensionales para la transferencia de calor por convección son el número de Nusselt, el número de Stanton, el número de Prandtl, el número de Grashof y el número de Reynolds.

Se estudiaron los casos de convección natural y forzada y se estudiaron tanto por medios teóricos como empíricos. Se vieron ecuaciones adecuadas para el diseño de equipos y sistemas para la convección natural con distintas geometrías y para la convección forzada tanto con flujo interno como externo. Se consideraron con detalle las condiciones de temperatura superficial constante y las condiciones de frontera de flujo de calor de superficie constante.

El último tema que se consideró en este capítulo fue el de la transferencia de calor acompañada de un cambio de fase entre los líquidos y los vapores. Se estudiaron los procesos de ebullición y condensación desde los puntos de vista tanto del mecanismo fundamental como de los medios que describen y predicen las razones de transferencia de calor, en donde las ecuaciones de descripción son principalmente empíricas.

The first part of the book is devoted to a general survey of the history of the world, from the beginning of time to the present day. The author discusses the various stages of human civilization, from the primitive state to the modern era. He also touches upon the different religions and philosophies that have shaped human thought and behavior. The second part of the book is a detailed account of the history of the United States, from its founding to the present. The author describes the struggles of the early settlers, the growth of the nation, and the challenges it has faced throughout its history. He also discusses the role of the United States in the world and its future prospects. The third part of the book is a collection of essays on various topics, including politics, economics, and social issues. The author expresses his views on these matters and offers his own solutions to the problems facing the world. The book is written in a clear and concise style, making it accessible to a wide range of readers. It is a valuable resource for anyone interested in the history of the world and the United States.

Transferencia de calor por radiación

La radiación térmica es la parte de la emisión electromagnética de una sustancia que está caracterizada por luz o transferencia de calor. La energía radiante emitida puede tener longitudes de onda considerablemente cortas, como en el caso de los rayos cósmicos ($\lambda \sim 10^{-10}$ cm), o del orden de kilómetros, como sucede para algunas ondas de radio. La banda térmica está en el rango intermedio y generalmente se considera que está entre 0.1 y 100 micras (1 micra, μ , = 10^{-6} metros). En la figura 6.1 se muestra el espectro electromagnético.

En las consideraciones de la conducción y convección en las secciones anteriores, se notó que las razones de transferencia de calor varían con la diferencia de la temperatura en aproximadamente a la primera potencia. El intercambio de energía radiante entre dos cuerpos depende de las diferencias entre sus temperaturas elevadas a aproximadamente la *cuarta* potencia. Otra diferencia significativa entre el intercambio de calor radiante y los otros tipos es que no se requiere un medio para la propagación de energía radiante; en efecto, el intercambio radiante entre dos superficies es máximo cuando se vacía el espacio entre las superficies.

Nuevamente se llama la atención del lector a la figura 6.1. Se ve que la banda de radiación térmica incluye el rango de luz visible que se extiende desde aproximadamente 0.38 hasta 0.76 micras. El rango visible se extiende desde el violeta a la banda del color rojo. Se sabe que un objeto caliente tiene un color característico que depende de su temperatura; el término "rojo caliente" se refiere a la emisión de color rojizo de un cuerpo a elevada temperatura.

En este capítulo, el propósito es familiarizar al lector con algunos de los conceptos básicos en la transferencia de calor radiante y presentar algunas técnicas en la descripción cuantitativa de los fenómenos de transferencia radiante de calor. El primer paso es considerar un cuerpo que radía "idealmente" y emplear el comporta-

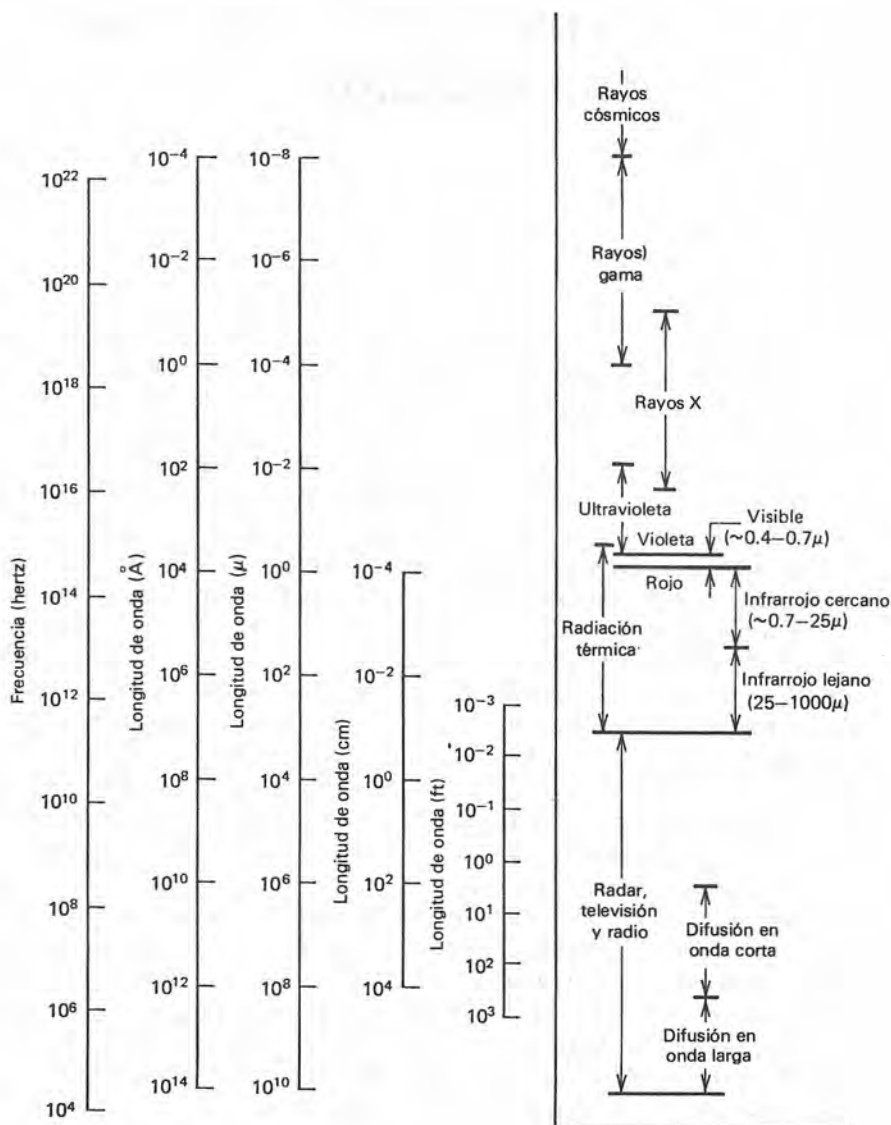


Figura 6.1 El espectro de radiación electromagnética

miento de tal tipo de superficie como un estándar contra el que se pueden comparar otras superficies no ideales. En la siguiente sección se considera el comportamiento de superficies "negras" que irradian en forma ideal.

6.1 RADIACION DE SUPERFICIES IDEALES (NEGRAS)

Una superficie "negra" es una idealización basada en la respuesta de una superficie a la radiación térmica incidente. En este sentido, es necesario considerar lo que ocurre cuando la energía radiante incide en un cuerpo.

Cuando la radiación incide en un cuerpo homogéneo, parte de la energía penetra en él y el resto se refleja. De la parte que penetra en la superficie, parte puede ser absorbida y parte transmitida a través del cuerpo con poco cambio en su naturaleza. La palabra "opaco" describe un cuerpo que no transmite nada de la energía que incide en él. La energía absorbida se convierte a energía interna del cuerpo de que se trata.

En forma más completa se puede decir que la energía que incide en un cuerpo se refleja, se absorbe o se transmite. Si se designan por ρ , α , y τ como las porciones de energía radiante incidente que se reflejan, absorben y transmiten, entonces se puede escribir

$$\rho + \alpha + \tau = 1 \quad (6-1)$$

en donde se llama *reflectividad* a ρ , *absortividad* a α y *transmisividad* a τ . De acuerdo con lo estudiado hasta este momento, es aparente que para un cuerpo perfectamente absorbente (negro), $\alpha = 1$, y para un cuerpo *opaco* $\tau = 0$.

Las reflexiones son de dos tipos, regulares y difusas. La reflexión regular o especular es aquella para la que los ángulos de incidencia y reflexión son iguales. Este comportamiento semejante a un espejo es sensiblemente conocido aunque se encuentra con menos frecuencia en las situaciones cotidianas que el tipo de reflexión difusa. La reflexión *difusa* es aquella en la que la radiación de entrada o incidente se refleja en todas direcciones. Con frecuencia se le semeja a la situación en que se absorbe la energía incidente cercana a la superficie de un cuerpo y luego se reemite.

Se llama "negro" a un cuerpo que absorbe toda la energía que le incide, como ya se mencionó antes. El término "cuerpo negro" denota el hecho que un cuerpo que no refleja energía aparece negro al ojo. En la práctica, la aproximación más cercana a un cuerpo negro verdadero es una cavidad con apenas una pequeña abertura en él. La energía que entra a la cavidad a través de un pequeño agujero tiene

muy poca posibilidad de reflejarse hacia afuera, por lo que esencialmente se absorbe toda. La propia cavidad puede estar formada por un material brillante, aunque siempre aparezca como negra cuando uno mire a través de la abertura.

Un cuerpo negro tiene determinadas características que son importantes tanto desde el punto de vista conceptual como cuantitativo. A continuación se estudian brevemente.

Un cuerpo negro es un emisor perfecto. Esto se verifica fácilmente considerando la situación ilustrada en la figura 6.2. El cuerpo negro y el encierro que lo rodea llegan a la misma temperatura uniforme después de transcurrido un tiempo debido a la transferencia de calor. Cuando se llega a este estado de equilibrio térmico, el cuerpo negro absorbe y emite a la misma rapidez; si esto no fuera cierto, su temperatura cambiaría, lo que sería una violación directa a la segunda ley de la termodinámica. Ya que por definición, el cuerpo negro absorbe la máxima energía posible sin importar la dirección o longitud de onda, se sigue que su emisión es igualmente un máximo. Un argumento semejante indica que una característica adicional del cuerpo negro es la máxima emisión posible en todas longitudes de onda y en toda dirección.

La radiación total emitida por un cuerpo negro es una función solamente de la temperatura. Se ve que esto es cierto considerando lo que sucede cuando cambia la temperatura del entorno a un valor

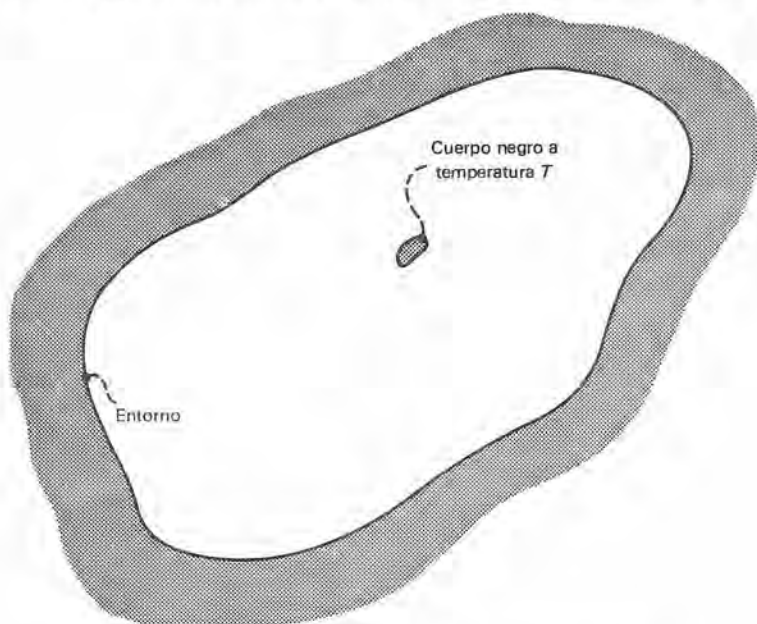


Figura 6.2 Un cuerpo negro dentro de un entorno isotérmico.

uniforme distinto. El cuerpo negro se ajusta hasta que su temperatura es la misma que la del entorno. Una vez que ocurre este equilibrio, el cuerpo negro nuevamente absorbe y emite la máxima energía posible característica de su nueva temperatura, por lo que la declaración anterior es verdadera. La razón de absorción y emisión aumenta conforme aumenta la temperatura de un cuerpo negro.

6.1-1 Intensidad de radiación de un cuerpo negro

La cantidad de energía que viaja desde una superficie negra a lo largo de una trayectoria específica se debe determinar de la intensidad I de radiación. Con referencia a la figura 6.3, en que un hemisferio de radio r rodea un área elemental dA , toda la emisión originada en dA debe llegar a la superficie hemisférica, que tiene un área total de $2\pi r^2$. Cada área pequeña de la superficie hemisférica subtiende un *ángulo sólido* en dA . La unidad de medida de un ángulo sólido es el esterradian (sr), que se puede considerar como una unidad de espacio. Un ángulo sólido en el caso de una semiesfera es el área en la superficie hemisférica dividida entre r^2 , por lo que hay 2π sr en el hemisferio que rodea dA .

La *intensidad de radiación* se refiere a la cantidad de energía emitida desde una superficie, tal como dA , por unidad de tiempo por área unitaria proyectada normal a una dirección dada por un ángulo sólido unitario subtendido en la superficie emisora. También se debe

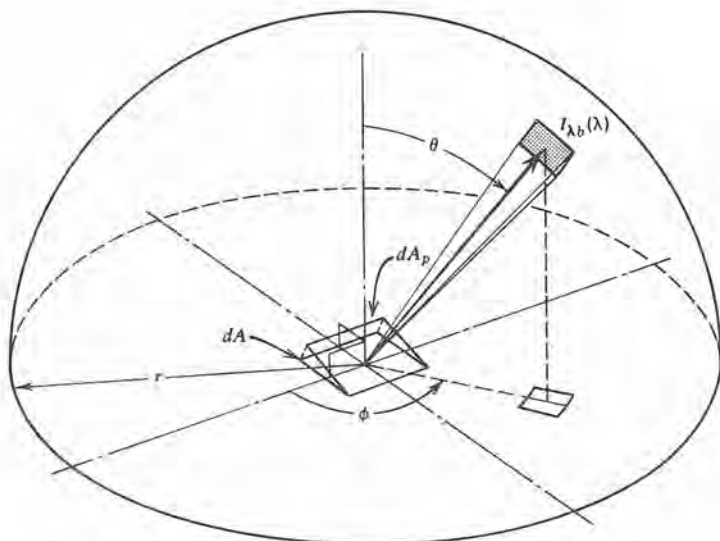


Figura 6.3 Emisión desde una superficie negra plana.

considerar la *intensidad espectral* que incluye la radiación en un pequeño intervalo $d\lambda$ alrededor de una sola longitud de onda. La *intensidad total* incluye toda la radiación que cubre el espectro total de longitudes de onda. La intensidad total del cuerpo negro I_b y la intensidad espectral $I_{b\lambda}$ están relacionadas por la expresión

$$I_b = \int_0^{\infty} I_{b\lambda} d\lambda \quad (6-2)$$

Para un cuerpo negro, la intensidad de radiación es independiente de la dirección de emisión.

6.1-2 Potencia emisiva de un cuerpo negro

La *potencia emisiva* se define como la energía emitida por una superficie por unidad de tiempo por unidad de área *no proyectada*. La potencia emisiva de una superficie negra también existe en forma espectral $E_{b\lambda}$ y en la forma total E_b . Volviendo nuevamente a la figura 6.3, la energía emitida desde dA en una dirección dada a una longitud de onda dada se puede describir como

$$\begin{aligned} dq_{b\lambda}(\lambda, \theta, \phi) &= I_{b\lambda}(\lambda) dA \cos \theta d\omega d\lambda \\ &= E_{b\lambda}(\lambda, \theta, \phi) dA d\omega d\lambda \end{aligned} \quad (6-3)$$

Una conclusión a que se puede llegar acerca de la ecuación (6-3) es que la intensidad espectral y la potencia emisiva de un cuerpo negro están relacionadas de acuerdo con

$$E_{b\lambda}(\lambda, \theta, \phi) = I_{b\lambda}(\lambda) \cos \theta = E_{b\lambda}(\lambda, \theta) \quad (6-4)$$

o dicho en palabras, la potencia emisiva del cuerpo negro es una función de λ y θ pero no de ϕ . Se llama *potencia emisiva espectral direccional* a la cantidad $E_{b\lambda}(\lambda, \theta)$ para una superficie negra. Para algunas superficies no negras, la potencia emisiva espectral E_{λ} también depende de ϕ .

También se conoce como *ley de los cosenos de Lambert* a la ecuación (6-4) por razones obvias. Las superficies que se comportan en esta forma se llaman superficies *difusas* o de *Lambert*. Por lo general, las superficies reales se apartan del comportamiento de la ley de los cosenos.

6.1-3 Potencia emisiva espectral semiesférica de las superficies negras

La *potencia emisiva espectral semiesférica* de una superficie negra es la energía emitida de una superficie por unidad de tiempo por

unidad de área a una determinada longitud de onda. Se determina integrando en todos los ángulos sólidos subtendidos por una semiesfera centrada en dA .

Considere la pequeña área dA en el centro de una semiesfera de radio r , como se muestra en la figura 6.4. El ángulo sólido $d\omega$, subtendido por la porción de la superficie mostrada es

$$d\omega = \frac{(r \sin \theta d\phi)(r d\theta)}{r^2} = \sin \theta d\theta d\phi \quad (6-5)$$

La emisión espectral de dA se puede escribir entonces en la forma

$$E_{b\lambda}(\lambda, \theta) d\omega = E_{b\lambda}(\lambda, \theta) \sin \theta d\theta d\phi \quad (6-6)$$

que se puede combinar con la ley de los cosenos, ecuación (6-4), para obtener

$$E_{b\lambda}(\lambda, \theta) d\omega = I_{b\lambda}(\lambda) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \quad (6-7)$$

Se puede integrar esta expresión en todo el espacio semiesférico para dar

$$\begin{aligned} E_{b\lambda}(\lambda) &= I_{b\lambda}(\lambda) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \pi I_{b\lambda}(\lambda) \end{aligned} \quad (6-8)$$

El resultado dado por la ecuación (6-8) es de importancia en el análisis cuantitativo del intercambio de energía radiante.

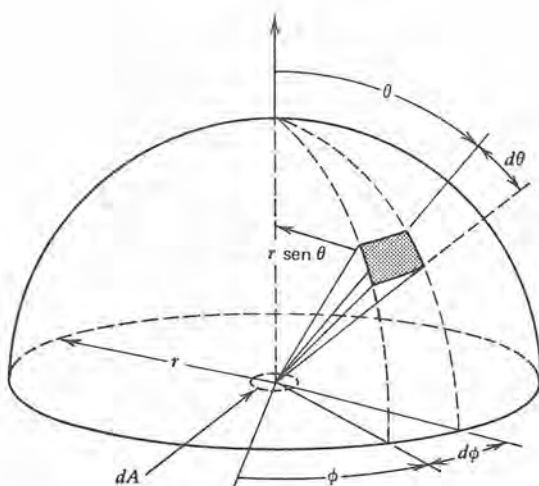


Figura 6.4 Área dA en el centro de un hemisferio de radio r .

6.1-4 Distribución espectral de la potencia emisiva del cuerpo negro: Ley de Planck

Como parte de su teoría cuántica, en 1900 Max Planck expresó la temperatura y distribución de longitudes de onda de la potencia emisiva del cuerpo negro en un vacío como

$$E_{b\lambda}(\lambda) = \pi I_{b\lambda}(\lambda) = \frac{2\pi C_1 \lambda^{-5}}{e^{C_2/\lambda T} - 1}$$

en donde las constantes son $C_1 = hC_2$ y $C_2 = hc/\kappa$, siendo h y κ las constantes de Planck y Boltzmann respectivamente.

En la figura 6.5 se grafica la ecuación (6-9) como $E_{b\lambda}$ contra λ mostrando líneas de temperatura constante absoluta. Se pueden hacer determinados enunciados generales con relación a $E_{b\lambda}$ del comportamiento mostrado en esta figura. Una característica observada es que la energía total emitida aumenta con la temperatura. A cualquier temperatura, la energía total emitida es el área bajo la curva apropiada en la figura. Este incremento en la emisión es verdadero en total y es igualmente verdadero a toda longitud de onda.

Se puede hacer una segunda observación en el sentido de que la emisión máxima ocurre a longitudes de onda más cortas conforme aumenta la temperatura. La *ley del desplazamiento de Wien* expresa cuantitativamente esta característica en la forma

$$\lambda_{\text{m\acute{a}x}} T = 5215.6 \mu^{\circ}\text{R} \quad (6-10)$$

en que se ve que las unidades de λ y T son micras y grados Rankine respectivamente

Se nota adicionalmente que la emisión solar, a una temperatura aproximada de $10,000^{\circ}\text{R}$, incluye una gran cantidad de energía en la región visible. Se ha sugerido que la parte "visible" del espectro de emisión se debe a que el ojo ha evolucionado para ser sensible a la emisión solar.

Como se muestra en la figura 6.6, las distintas curvas para la temperatura mostradas en la figura 6.5 se pueden consolidar en una sola curva por medio de una sencilla manipulación de la ecuación (6-9).

Se divide esta expresión entre T^5 y se obtiene

$$\frac{E_{b\lambda}(\lambda, T)}{T^5} = \frac{\pi I_{b\lambda}(\lambda, T)}{T^5} = \frac{2\pi C_1}{(\lambda T)^5 (e^{C_2/\lambda T} - 1)} \quad (6-11)$$

que expresa $E_{b\lambda}/T^5$ como una función de las variables combinadas λT .

En la figura 6.6 aparecen graficadas estas cantidades.

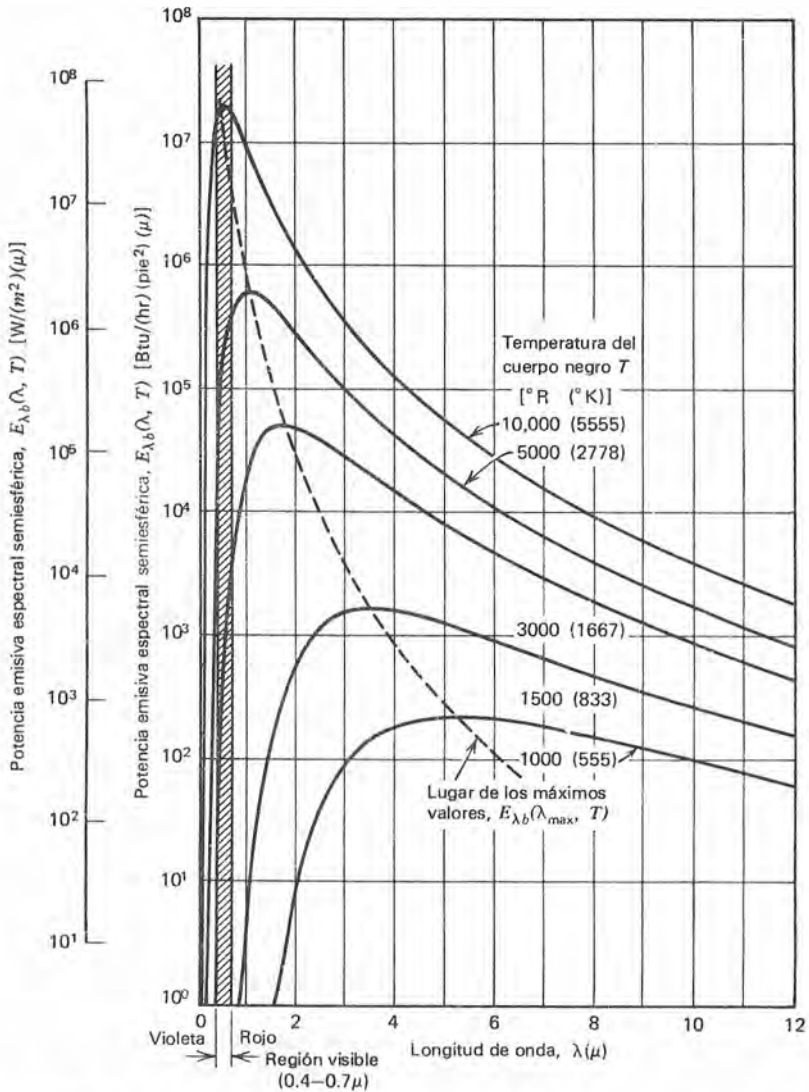


Figura 6.5 Distribución espectral de la potencia emisiva del cuerpo negro a distintas temperaturas.

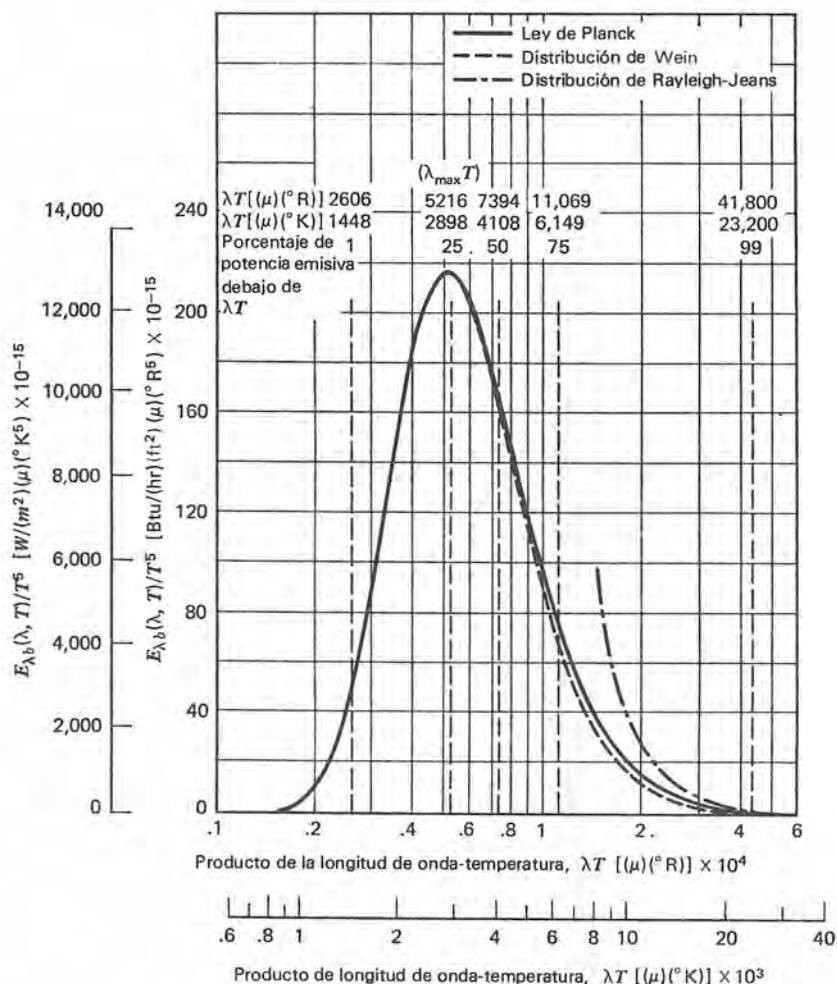


Figura 6.6 Potencia emisiva monocromática de cuerpo negro en función de λT .

6.1-5 Intensidad total y potencia emisiva de un cuerpo negro

La ecuación (6-2) expresó la forma de determinar la intensidad total del cuerpo negro a partir de la intensidad espectral. Las potencias emisivas espectral y total están relacionadas en forma análoga de acuerdo con

$$E_b(T) = \int_0^{\infty} E_{b\lambda}(\lambda, T) d\lambda \quad (6-12)$$

Se puede sustituir la distribución de la potencia emisiva con la longitud de onda dada por la ley de Planck, ecuación (6-9), en la expresión anterior. Entonces, la integración da la potencia emisiva semiesférica total de una superficie negra como

$$E_b(T) = \int_0^\infty E_{b\lambda}(\lambda, T) d\lambda = \int_0^\infty \pi I_{b\lambda}(\lambda, T) = \sigma T^4 \quad (6-13)$$

en donde σ es la constante de Stefan Boltzmann y T es la temperatura absoluta. La integración indicada da $\sigma = 0.1714 \times 10^{-8}$ Btu/hr-ft²-°R⁴, en tanto que el valor experimental aceptado es ligeramente superior a 0.173×10^{-8} Btu/hr-ft²-°R⁴. En este texto se usa el valor experimental.

6.1-6 Potencia emisiva de cuerpo negro dentro de una banda de longitud de onda

Con frecuencia es deseable conocer el grado de emisión que ocurre en una parte específica del espectro total de la longitud de onda, lo que se expresa en forma más conveniente como una fracción de la potencia emisiva total. Se designa como $F_{\lambda_1-\lambda_2}$ a la fracción entre las longitudes de onda λ_1 y λ_2 y está dada por

$$\begin{aligned} F_{\lambda_1-\lambda_2} &= \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_{b\lambda}(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty E_{b\lambda}(\lambda) d\lambda} \\ &= \frac{1}{\sigma T^4} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_{b\lambda}(\lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (6-14)$$

La ecuación (6-14) se descompone en forma conveniente en dos integrales como sigue

$$\begin{aligned} F_{\lambda_1-\lambda_2} &= \frac{1}{\sigma T^4} \left[\int_0^{\lambda_2} E_{b\lambda}(\lambda) d\lambda - \int_0^{\lambda_1} E_{b\lambda}(\lambda) d\lambda \right] \\ &= F_{0-\lambda_2} - F_{0-\lambda_1} \end{aligned} \quad (6-15)$$

Entonces se pueden calcular estos valores a una T dada y se puede determinar la fracción de la emisión total entre dos longitudes de onda por sustracción.

Debido a que los valores de $F_{0-\lambda}$ en la forma expresada arriba varían con la temperatura al tener mayor manipulación, es conveniente eliminar a T como una variable separada. Se puede definir F en función del producto λT y modificar la ecuación (6-15) para que indique

$$F_{\lambda_1 T - \lambda_2 T} = \frac{1}{\sigma} \left[\int_0^{\lambda_2 T} \frac{E_{b\lambda}(\lambda)}{T^5} d(\lambda T) - \int_0^{\lambda_1 T} \frac{E_{b\lambda}(\lambda)}{T^5} d(\lambda T) \right]$$

$$= F_{0-\lambda_2 T} - F_{0-\lambda_1 T} \quad (6-16)$$

Ya se ha demostrado que $E_{b\lambda}/T^5$ es una función de λT ; en consecuencia, se puede evaluar y tabular $F_{0-\lambda T}$ como en el apéndice E, o graficar como en la figura 6.7.

En el ejemplo 6.1 se ilustra el uso de este concepto.

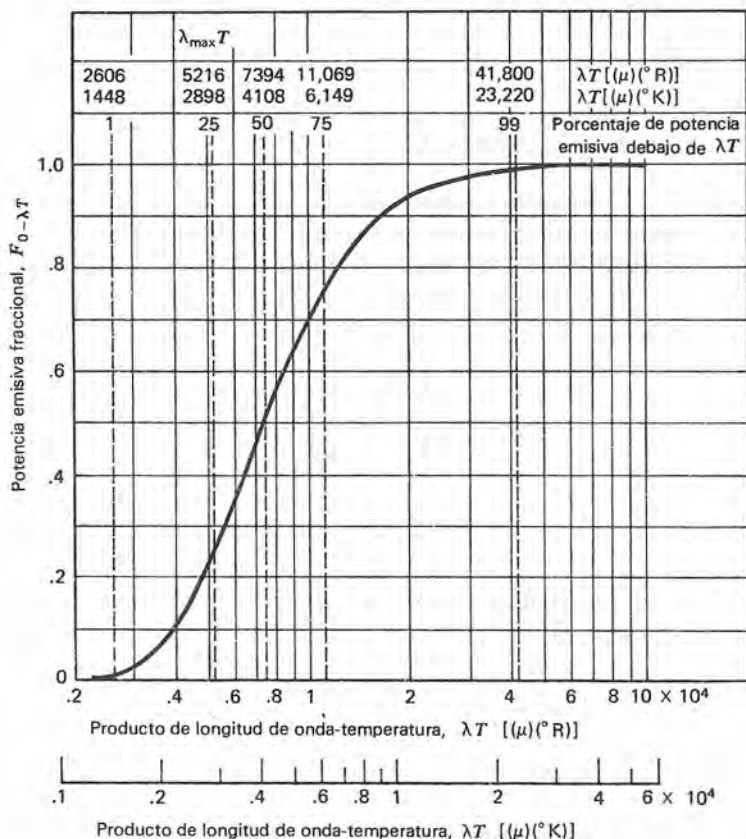


Figura 6.7 La fracción de la emisión de cuerpo negro que ocurre en el rango 0 a λT .

Ejemplo 6.1

Un instrumento de medición de radiación detecta toda la emisión que ocurre entre 0.65 y 4.5μ pero no lo afectan las frecuencias que estén fuera de este rango. ¿Qué fracción de la emisión total de una superficie negra se detecta para temperaturas de

la superficie emisora iguales a 1000°R, 5000°R y 10,000°R? en la tabla que sigue aparecen listadas las cantidades necesarias para la solución de este problema.

Temperatura (°R)	$\lambda_1 T$	$\lambda_2 T$	$F_{0-\lambda_1 T}$	$F_{0-\lambda_2 T}$	$F_{\lambda_1 T-\lambda_2 T}$
1,000	6,500	45,000	0.4061	0.9916	0.5585
5,000	32,500	225,000	0.9795	0.9999 -	0.0204
10,000	65,000	450,000	0.9971	0.9999 +	—

Los resultados indican que a 1,000°R, se detecta aproximadamente 56% de la emisión total; a 5,000°R se reduce a cerca de 2%; y a 10,000°R, la temperatura del sol, la cantidad detectada es una fracción despreciable del total. Más del 99.7% de la emisión solar ocurre a longitudes de onda inferiores a 0.65 μ .

6.2 RADIACION DE SUPERFICIES NO NEGRAS

Los conceptos del cuerpo negro presentados en la sección anterior proporcionan un estándar contra el que se puede comparar el comportamiento de las superficies reales. Algunos de los factores que se deben considerar cuando existen superficies no negras son temperatura, longitud de onda de la radiación, acabado de la superficie, composición, ángulo de la emisión radiante, ángulo a que se recibe la radiación incidente y la distribución espectral de la energía radiante incidente en una superficie.

Por lo general, las tabulaciones de las propiedades radiantes de las superficies contienen propiedades promedio con respecto a la longitud de onda y a la dirección. Se considerará brevemente la forma en que se determinan estos promedios y también la forma en que las propiedades promedio están relacionadas con el comportamiento superficial real. Las siguientes consideraciones usan exclusivamente propiedades promedio de las superficies.

6.2-1 Emisividad

La emisividad se define como la medida de la forma en que un cuerpo emite energía radiante en comparación con un cuerpo negro. Se puede obtener la descripción cuantitativa de la emisividad considerando la figura 6.8.

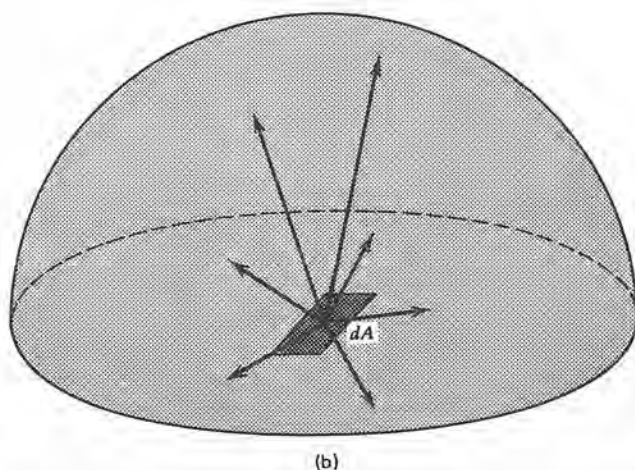
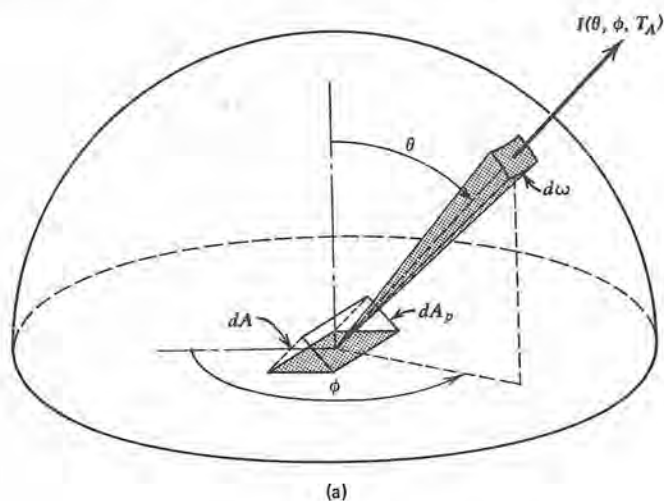


Figura 6.8 Representación geométrica de las propiedades de radiación direccional y hemisférica. a) emisividad direccional $\epsilon(\theta, \phi, T_A)$. b) Emisividad simiesférica $\epsilon(T_A)$.

La energía que sale de una superficie real con área dA , temperatura T_A , por unidad de tiempo por ángulo sólido unitario $d\omega$ en el intervalo $d\lambda$ de longitud de onda está dada por

$$\begin{aligned} dq_\lambda(\lambda, \theta, \phi, T_A) &= I_\lambda(\lambda, \theta, \phi, T_A) dA \cos \theta d\lambda d\omega \\ &= E_\lambda(\lambda, \theta, \phi, T_A) dA d\lambda d\omega \end{aligned} \quad (6-17)$$

Se puede comparar la ecuación (6-17) para la emisión de superficies reales con la ecuación (6-4) para una superficie negra. La emisión de

superficie real sí depende de la dirección, lo que se demostró que no es cierto para la emisión del cuerpo negro.

La energía que sale de una superficie negra en T_A por unidad de área por unidad de tiempo dentro de $d\lambda$ y $d\omega$ es

$$\begin{aligned} dq_{b\lambda}(\lambda, \phi, T_A) &= I_{b\lambda}(\lambda, T_A) dA \cos \theta d\lambda d\omega \\ &= E_{b\lambda}(\lambda, \theta, T_A) dA d\lambda d\omega \end{aligned} \quad (6-18)$$

por tanto, por la definición de la emisividad se tiene para la emisividad espectral direccional ε_λ

$$\begin{aligned} \varepsilon_\lambda(\lambda, \theta, \phi, T_A) &= \frac{dq_\lambda(\lambda, \theta, \phi, T_A)}{dq_{b\lambda}(\lambda, \theta, T_A)} = \frac{I_\lambda(\lambda, \theta, \phi, T_A)}{I_{b\lambda}(\lambda, T_A)} \\ &= \frac{E_\lambda(\lambda, \theta, \phi, T_A)}{E_{b\lambda}(\lambda, \theta, T_A)} \end{aligned} \quad (6-19)$$

Ahora se pueden obtener promedios con respecto a la longitud de onda y dirección.

6.2-1.1 Emisividad direccional total

La *emisividad direccional total* es un promedio de $\varepsilon_\lambda(\lambda, \theta, \phi, T_A)$ en todas las longitudes y se determina de

$$\varepsilon(\theta, \phi, T_A) = \frac{E(\theta, \phi, T_A)}{E_b(\theta, T_A)} \quad (6-20)$$

La potencia emisiva total direccional de una superficie real y de una superficie negra, ambas a T_A , están dadas por

$$E(\theta, \phi, T_A) = \int_0^\infty E_\lambda(\lambda, \theta, \phi, T_A) d\lambda \quad (6-21)$$

y

$$E_b(\theta, T_A) = \int_0^\infty E_{b\lambda}(\lambda, \theta, T_A) d\lambda = \frac{\sigma T_A^4}{\pi} \cos \theta \quad (6-22)$$

Sustituyendo en la ecuación (6-20) se obtiene

$$\varepsilon(\theta, \phi, T_A) = \frac{\int_0^\infty E_\lambda(\lambda, \theta, \phi, T_A) d\lambda}{\frac{\sigma T_A^4}{\pi} \cos \theta} \quad (6-23)$$

En función de la emisividad espectral direccional, la emisividad direccional total es

$$\varepsilon(\theta, \phi, T_A) = \frac{\int_0^\infty \varepsilon_\lambda(\lambda, \theta, \phi, T_A) E_{b\lambda}(\lambda, \theta, T_A) d\lambda}{\frac{\sigma T_A^4}{\pi} \cos \theta} \quad (6-24)$$

6.2-1.2 Emisividad espectral semiesférica

La *potencia emisiva espectral semiesférica* $E_\lambda(\lambda, T_A)$ se obtiene integrando la potencia emisiva espectral en todos los ángulos sólidos en la semiesfera que encierra la superficie de que se trata. Esta operación se especifica como

$$E_\lambda(\lambda, T_A) = \int_H I_\lambda(\lambda, \theta, \phi, T_A) \cos \theta d\omega \quad (6-25)$$

en donde \int_H implica la integración en el ángulo sólido semiesférico. Se puede usar la ecuación (6-19) para escribir la ecuación (6-25) en forma más sencilla

$$E_\lambda(\lambda, T_A) = I_{b\lambda}(\lambda, T_A) \int_H \varepsilon_\lambda(\lambda, \theta, \phi, T_A) \cos \theta d\omega \quad (6-26)$$

Anteriormente se expresó la potencia emisiva espectral hemisférica de un cuerpo negro como

$$E_{b\lambda}(\lambda, T_A) = \pi I_{b\lambda}(\lambda, T_A) \quad (6-8)$$

Por definición de emisividad, ahora se puede escribir la *emisividad espectral semiesférica* como

$$\varepsilon_\lambda(\lambda, T_A) = \frac{E_\lambda(\lambda, T_A)}{E_{b\lambda}(\lambda, T_A)} = \frac{1}{\pi} \int_H \varepsilon_\lambda(\lambda, \theta, \phi, T_A) \cos \theta d\omega \quad (6-27)$$

6.2-1.3 Emisividad total semiesférica

Si se realiza la integración de la potencia emisiva espectral direccional sobre todas las longitudes de onda y sobre todos los ángulos sólidos que comprenden el hemisferio, el resultado es la potencia emisiva total semiesférica. Esta cantidad, dividida entre σT_A^4 , la potencia emisiva total semiesférica del cuerpo negro, da la *emisividad total semiesférica* $\varepsilon(T_A)$.

Se puede expresar la emisividad total semiesférica en función de la emisividad espectral direccional como

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(T_A) &= \frac{E(T_A)}{E_b(T_A)} = \frac{\int_H \int_0^\infty E_\lambda(\lambda, \theta, \phi, T_A) d\lambda d\omega}{\sigma T_A^4} \\
 &= \frac{\int_H \int_0^\infty \varepsilon_\lambda(\lambda, \theta, \phi, T_A) I_{b\lambda}(\lambda, T_A) d\lambda \cos \theta d\omega}{\sigma T_A^4} \\
 &= \frac{\int_H \int_0^\infty \varepsilon_\lambda(\lambda, \theta, \phi, T_A) E_{b\lambda}(\lambda, \theta, T_A) d\lambda d\omega}{\sigma T_A^4} \quad (6-28)
 \end{aligned}$$

En función de la emisividad total direccional $\varepsilon(T_A)$ se escribe

$$\varepsilon(T_A) = \frac{1}{\pi} \int_H \varepsilon(\theta, \phi, T_A) \cos \theta d\omega \quad (6-29)$$

y en términos de la emisividad espectral semiesférica,

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(T_A) &= \frac{\int_0^\infty \varepsilon_\lambda(\lambda, T_A) I_{b\lambda}(\lambda, T_A) d\lambda}{\sigma T_A^4 / \pi} \\
 &= \frac{\int_0^\infty \varepsilon_\lambda(\lambda, T_A) E_{b\lambda}(\lambda, T_A) d\lambda}{\sigma T_A^4} \quad (6-30)
 \end{aligned}$$

En general, se puede representar la variación en la emisividad espectral semiesférica con la longitud de onda como se muestra en la figura 6.9. Se puede emplear esta información para contener una distribución espectral de la potencia emisiva. En la figura 6.10, la línea sólida ilustra la potencia emisiva espectral del cuerpo negro de una superficie en T_A . El área bajo esta curva es σT_A^4 .

A cualquier longitud de onda, se pueden multiplicar los valores correspondientes de $\varepsilon_\lambda(\lambda, T_A)$ y $E_{b\lambda}(\lambda, T_A)$ para obtener la potencia emisiva espectral semiesférica para la superficie real. Tal variación en $E_\lambda(\lambda, T_A)$ está dada por la línea punteada en la figura 6.10. El área bajo esta curva es la integral en el numerador de la ecuación (6-30). En cada longitud de onda la emisividad espectral semiesférica es la razón de las ordenadas de las líneas punteadas a las sólidas de la figura 6.10.

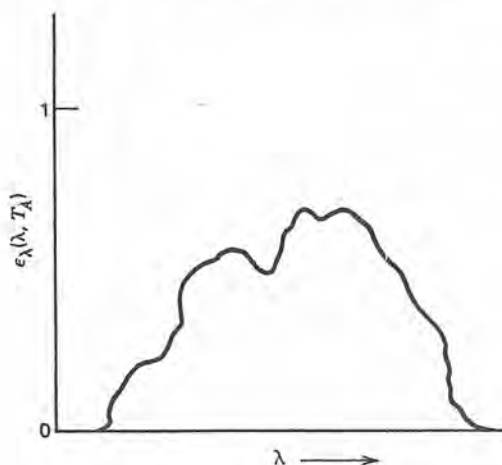


Figura 6.9 Variación en la longitud de onda de $\epsilon_{\lambda}(\lambda, T_A)$ para una superficie real.

6.2-2 Absortividad

Anteriormente se definió la absortividad como la fracción de la energía incidente en una superficie que se absorbe. La radiación incidente tiene características que dependen de la fuente, y son estas características direccionales y espectrales las que hacen que la descripción de la absortividad sea más compleja que la de la emisividad.

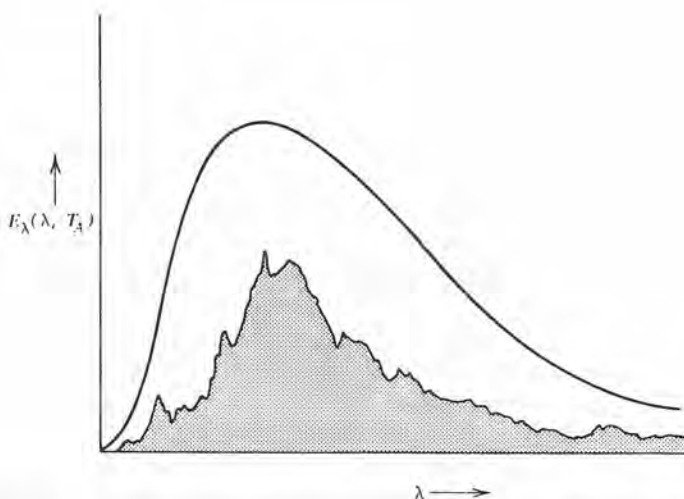


Figura 6.10 Distribución de potencia emisiva hemisférica espectral para superficies negra y real en T_A .

6.2-2.1 Absortividad espectral direccional

En la figura 6.11 se muestra la energía radiante que llega al área elemental dA desde la dirección θ, ϕ .

La fracción de la energía que pasa a través de dA_s en la superficie semiesférica que se absorbe en dA se denomina la *absortividad espectral direccional*, $\alpha_{\lambda}(\lambda, \theta, \phi, T_A)$, en donde las propiedades de longitud de onda direccionales son características de la energía radiante que entra, en tanto que la dependencia de la temperatura es la correspondiente a la superficie absorbente en T_A .

La energía que llega a dA por unidad de tiempo desde la dirección θ, ϕ en el intervalo de longitud de onda $d\lambda$ es

$$dq_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi) = I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi) dA_s \frac{dA \cos \theta}{r^2} d\lambda \quad (6-31)$$

en donde el subíndice i se refiere a la radiación incidente o de entrada. La cantidad $dA \cos \theta / r^2$ es el ángulo sólido subtendido por dA en dA_s . Se puede escribir la ecuación (6-31) en la forma equivalente como

$$dq_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi) = I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi) d\omega \cos \theta dA d\lambda \quad (6-32)$$

donde $d\omega = dA_s / r^2$ es el ángulo sólido subtendido por dA_s en dA . La cantidad de energía incidente absorbida en dA está dada por $dq_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi, T_A)|_{\text{abs}}$, y la absortividad espectral direccional es la razón

$$\begin{aligned} \alpha_{\lambda}(\lambda, \theta, \phi, T_A) &\equiv \frac{dq_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi, T_A)|_{\text{abs}}}{dq_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi)} \\ &= \frac{dq_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi, T_A)|_{\text{abs}}}{I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi) dA \cos \theta d\omega d\lambda} \end{aligned} \quad (6-33)$$

6.2-2.2 Absortividad total direccional

Las técnicas de promedio y/o sumatoria empleadas en la sección 6.2 con la emisividad, tienen sus equivalentes cuando se trabaja con absortividades. Estas cantidades se expresan sin explicaciones detalladas de la sección relativa a la emisividad.

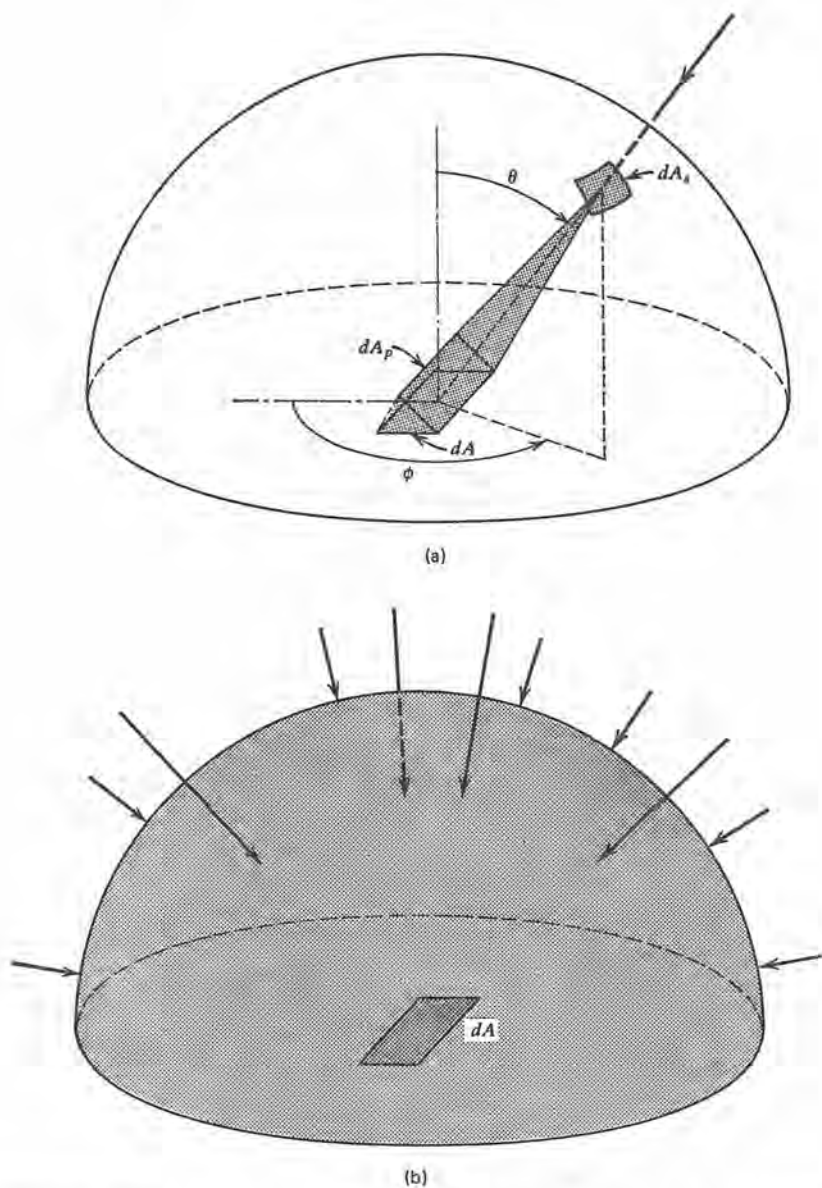


Figura 6.11 Consideraciones geométricas de la energía radiante absorbida. a) Absortividad direccional $\alpha(\theta, \phi, T_A)$. b) Absortividad hemisférica $\alpha(T_A)$.

La *absortividad total direccional* es

$$\begin{aligned}\alpha(\theta, \phi, T_A) &= \frac{dq_i(\theta, \phi, T_A)|_{\text{abs}}}{dq_i(\theta, \phi)} \\ &= \frac{\int_0^\infty \alpha_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi, T_A) I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi) d\lambda}{\int_0^\infty I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi) d\lambda}\end{aligned}\quad (6-34)$$

6.2-2.3 Absortividad espectral semiesférica

La fracción absorbida de la energía espectral que incide en una superficie desde todas las direcciones en un hemisferio envolvente se denomina la *absortividad espectral semiesférica*, que se expresa como

$$\begin{aligned}\alpha_\lambda(\lambda, T_A) &= \frac{dq_{\lambda,i}(\lambda)|_{\text{abs}}}{dq_{\lambda,i}(\lambda)} \\ &= \frac{\int_H \alpha_\lambda(\lambda, \theta, \phi, T_A) I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi) \cos \theta d\omega}{\int_H I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi) \cos \theta d\omega}\end{aligned}\quad (6-35)$$

6.2-2.3 Absortividad total semiesférica

Cuando se determina la fracción de la energía incidente absorbida por una superficie en todas las longitudes de onda en todas las direcciones, el resultado es la *absortividad total semiesférica* $\alpha(T_A)$. Esta cantidad se representa por la relación

$$\begin{aligned}\alpha(T_A) &= \frac{dq_i(T_A)|_{\text{abs}}}{dq_i(T_A)} \\ &= \frac{\int_H \int_0^\infty \alpha_\lambda(\lambda, \theta, \phi, T_A) I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi) d\lambda \cos \theta d\omega}{\int_H \int_0^\infty I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi) d\lambda \cos \theta d\omega}\end{aligned}\quad (6-36)$$

En función de la *absortividad total direccional*, se escribe $\alpha(T_A)$ como

$$\alpha(T_A) = \frac{\int_H \int_0^\infty I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi) d\lambda \alpha(\theta, \phi, T_A) \cos \theta d\omega}{\int_H \int_0^\infty I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi) d\lambda \cos \theta d\omega}\quad (6-37)$$

y, en función de la absorptividad espectral semiesférica, la relación es

$$\alpha(T_A) = \frac{\int_0^\infty \int_H \alpha_\lambda(\lambda, T_A) I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi) \cos \theta \, d\omega \, d\lambda}{\int_0^\infty \int_H I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi) \cos \theta \, d\omega \, d\lambda} \quad (6-38)$$

6.2-2.4 Ley de Kirchhoff

La ley de la radiación de Kirchhoff relaciona la actividad de un cuerpo de emitir energía radiante con su capacidad de absorción, que se obtiene considerando un cuerpo no negro de superficie dA situado en un entorno negro. Cuando se logra el equilibrio térmico, el cuerpo y el entorno están a la misma temperatura T_A . La energía que sale de dA por unidad de tiempo por ángulo sólido unitario $d\omega$ en el intervalo de longitud de onda $d\lambda$ está dado por las ecuaciones (6-17) y (6-19) como

$$\begin{aligned} dq_\lambda(\lambda, \theta, \phi, T_A) &= I_\lambda(\lambda, \theta, \phi, T_A) dA \cos \theta \, d\lambda \, d\omega \\ &= \varepsilon_\lambda(\lambda, \theta, \phi, T_A) I_{\lambda,b}(\lambda, T_A) dA \cos \theta \, d\omega \, d\lambda \end{aligned} \quad (6-39)$$

La energía absorbida en dA está dada por la ecuación (6-33)

$$dq_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi, T_A)|_{\text{abs}} = \alpha_\lambda(\lambda, \theta, \phi, T_A) I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi) dA \cos \theta \, d\omega \, d\lambda \quad (6-33)$$

Ya que dA y su entorno están en equilibrio térmico, la emisión y la absorción desde dA deben ser iguales; en consecuencia, de las dos expresiones anteriores

$$\varepsilon_\lambda(\lambda, \theta, \phi, T_A) I_{\lambda,b}(\lambda, T_A) = \alpha_\lambda(\lambda, \theta, \phi, T_A) I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi) \quad (6-40)$$

y, ya que la energía incidente en dA se emite desde un medio ambiente negro, $I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi) = I_{\lambda,b}(\lambda, T_A)$; por tanto, la emisividad y la absorptividad son iguales, o sea

$$\varepsilon_\lambda(\lambda, \theta, \phi, T_A) = \alpha_\lambda(\lambda, \theta, \phi, T_A) \quad (6-41)$$

Esta ecuación es verdadera sin restricción, por tanto, la emisividad espectral direccional y la absorptividad espectral direccional son iguales para un cuerpo en equilibrio térmico con su medio ambiente.

La emisividad total direccional y la absorptividad están dadas por las ecuaciones (6-24) y (6-34), respectivamente. Para propósitos de mayor claridad, se repiten estas expresiones y se tiene

$$\varepsilon(\theta, \phi, T_A) = \frac{\int_0^\infty \varepsilon_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi, T_A) I_{b\lambda}(\lambda, T_A) d\lambda}{\frac{\sigma T_A^4}{\pi}} \quad (6-24)$$

y

$$\alpha(\theta, \phi, T_A) = \frac{\int_0^\infty \alpha_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi, T_A) I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi) d\lambda}{\int_0^\infty I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi) d\lambda} \quad (6-34)$$

Si la radiación incidente $I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi)$ tiene una distribución que es proporcional a la correspondiente a un cuerpo negro, $I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi) = K(\theta, \phi) I_{\lambda,b}(\lambda, T_A)$, entonces la constante de proporcionalidad $K(\theta, \phi)$ se cancela en la ecuación(6-34) y estas dos expresiones son iguales, dando el resultado buscado

$$\varepsilon(\theta, \phi, T_A) = \alpha(\theta, \phi, T_A) \quad (6-42)$$

Hay que hacer notar que esta expresión es verdadera solamente si $I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi, T_A)$ tiene las mismas distribuciones de longitud de onda que un cuerpo negro.

Las emisividad y absorptividad espectrales semiesféricas se expresan mediante las ecuaciones (6-27) y (6-35). Si la intensidad espectral incidente $I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi, T_A)$ es independiente de la dirección, o sea perfectamente difusa, entonces se escribe como $I(\lambda, T_A)$ y la emisividad y la absorptividad están relacionadas según la expresión

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda, T_A) &= \frac{\int_H \alpha_{\lambda}(\lambda, \theta, \phi, T_A) I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi) \cos \theta d\omega}{\int_H I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi) \cos \theta d\omega} \\ &= \int_H \alpha_{\lambda}(\lambda, \theta, \phi, T_A) d\omega = \varepsilon(\lambda, T_A) \end{aligned} \quad (6-43)$$

Las emisividad y absorptividad totales semiesféricas están dadas por las ecuaciones (6-28) y (6-36). Estas cantidades son iguales, o sea

$$\varepsilon(T_A) = \alpha(T_A) \quad (6-44)$$

si la radiación incidente es independiente de la dirección con una distribución espectral proporcional a la de un cuerpo negro. Hay otras clases de distribuciones direccionales y espectrale de energía radiante incidente para las que se aplica la ecuación (6-44).

Cuando la energía radiante que sale de una superficie es independiente de la dirección, se llama *difusa*. Cuando la emisividad y absorptividad de una superficie no varían con la longitud de onda, se llama superficie *gris*. La aproximación del *cuerpo gris* al comportamiento de superficie real es una considerable simplificación en el análisis de transferencia de calor radiante. En las siguientes secciones se usa bastante esta aproximación.

6.2-3 Reflectividad

Cuando la energía radiante incidente se refleja de una superficie, la cantidad reflejada depende del ángulo con que choca la energía incidente contra la superficie y de las características direccionales de la energía reflejada, razón por la cual es más difícil especificar la reflectividad que la emisividad y la absorptividad.

La razón de la intensidad reflejada en la dirección θ_r, ϕ_r a la incidente en una superficie en la dirección θ, ϕ en la longitud de onda λ se llama *reflectividad espectral bidireccional*, que se define como

$$\rho_\lambda(\lambda, \theta_r, \phi_r, \theta, \phi) = \frac{I_{\lambda,r}(\lambda, \theta_r, \phi_r, \theta, \phi)}{I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi) \cos \theta \, d\omega} \quad (6-45)$$

Se puede sumar la reflectividad espectral direccional sobre todo el espectro de longitud de onda para obtener la reflectividad total; se puede sumar sobre todos los ángulos sólidos reflejados, sobre todos los ángulos incidentes sólidos, al igual que los ángulos sólidos incidentes y los reflejados para obtener distintas combinaciones de reflectividades direccionales y semiesféricas. Siegel y Howell sumarizan en forma completa estas operaciones.¹

Con relación a la radiación reflejada, el interés primordial es que se dé cuenta de toda la energía incidente en una superficie. Por tanto, para un cuerpo opaco, la energía por unidad de tiempo que incide en dA por ángulo sólido unitario en el intervalo de longitud de onda $d\lambda$, se absorbe o se refleja. En forma acorde, se puede escribir, en función de las propiedades espectrales direccionales

$$\alpha_\lambda(\lambda, \theta, \phi, T_A) + \rho_\lambda(\lambda, \theta, \phi, T_A) = 1 \quad (6-46)$$

Aplicando la ley de Kirchhoff, también se puede escribir esta expresión como

$$\varepsilon_\lambda(\lambda, \theta, \phi, T_A) + \rho_\lambda(\lambda, \theta, \phi, T_A) = 1 \quad (6-47)$$

¹ R. Siegel y J. R. Howell, *Thermal Radiation Heat Transfer* (Nueva York: McGraw-Hill, 1972).

En forma análoga, si se considera el destino de toda la energía que incide en dA desde una dirección dada, se tiene

$$\alpha(\theta, \phi, T_A) + \rho(\theta, \phi, T_A) = 1 \quad (6-48)$$

o, para una superficie gris, también esto se puede escribir como

$$\varepsilon(\theta, \phi, T_A) + \rho(\theta, \phi, T_A) = 1 \quad (6-49)$$

Para la energía espectral incidente que llega a dA desde todas las direcciones,

$$\alpha(\lambda, T_A) + \rho(\lambda, T_A) = 1 \quad (6-50)$$

y, cuando la intensidad radiante incidente es independiente de la dirección, se puede aplicar la ley de Kirchhoff de manera que esta expresión toma la forma alterna

$$\varepsilon(\lambda, T_A) + \rho(\lambda, T_A) = 1 \quad (6-51)$$

Finalmente, cuando se suma la energía incidente en todas las direcciones y longitudes de onda, las propiedades semiesféricas totales están relacionadas de acuerdo con

$$\alpha(T_A) + \rho(T_A) = 1 \quad (6-52)$$

y con las restricciones adecuadas, la aplicación de la ley de Kirchhoff permite escribir

$$\varepsilon(T_A) + \rho(T_A) = 1 \quad (6-53)$$

6.3 PROPIEDADES RADIANTES PARA LAS SUPERFICIES REALES

El estudio en esta sección queda limitada a superficies opacas. Se pone énfasis en el comportamiento de las superficies reales y la forma en que se puede expresar este comportamiento de manera que se puedan hacer cálculos de ingeniería.

Las propiedades radiantes de las superficies reales varían con la dirección de la emisión, longitud de onda, temperatura superficial, rugosidad superficial e impurezas superficiales. En las siguientes secciones se consideran estos factores por separado.

6.3-1 Varjación direccional de la emisión radiante

Para una superficie emisora difusa, la emisión varía con el $\cos \theta$, en que θ es el ángulo medido desde la normal a la superficie. Esta es la variación coseno que se ha considerado hasta ahora para las superficies negras.

A lo mucho, la ley de los cosenos es una aproximación para las superficies reales. La emisividad direccional total para las superficies reales no es una constante en todas direcciones; esta cantidad varía con el ángulo θ , en forma distinta para distintas clases de materiales. Conviene usar diagramas polares de la emisividad total direccional cuando se ilustra la variación direccional.

La figura 6.12 muestra una gráfica polar para $\varepsilon(\theta)$ para distintos conductores metálicos. El comportamiento mostrado es representativo de los conductores; la emisividad es sensiblemente constante para pequeños valores de θ y luego aumenta para mayores ángulos. Este tipo de variación angular es característico también de la emisividad espectral direccional, excepto a longitudes de onda bastante cortas.

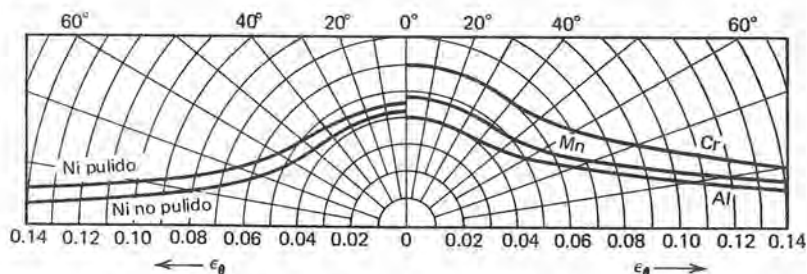


Figura 6.12 Variación en la emisividad con la dirección para distintos materiales conductores.

Para los no conductores, la variación de la emisividad con la dirección es bastante distinta a la de los conductores. La figura 6.13 muestra la forma en que varía ε_θ con θ para distintos materiales no conductores.

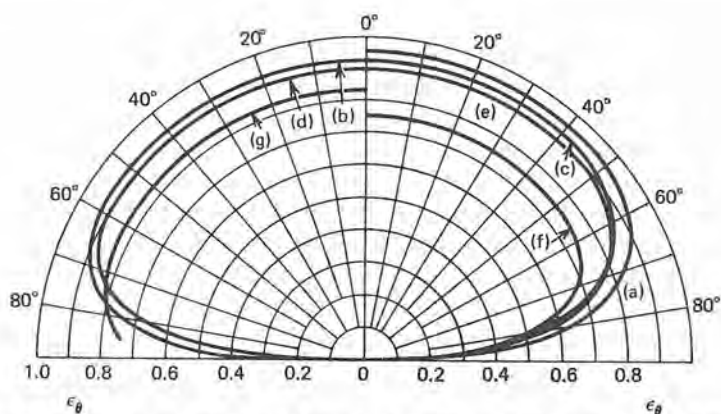


Figura 6.13 Variación en la emisividad con la dirección para distintos materiales no conductores. a) Hielo mojado. b) Madera. c) Vidrio. d) Papel. e) Arcilla. f) óxido de cobre. g) Óxido de aluminio.

conductores. En este caso, la máxima emisividad se experimenta normal a la superficie, con poco cambio para valores de θ hasta 45° o más. A valores todavía mayores de θ la emisividad decrece, aproximándose a cero a $\theta = 90^\circ$.

Se puede determinar la emisividad total semiesférica a partir de gráficas como se muestra, y de datos usando la expresión

$$\varepsilon = \int_0^{\pi/2} \varepsilon_\theta \sin 2\theta \, d\theta \quad (6-54)$$

El valor de ε determinado en esa forma difiere de la emisividad ε_0 en la dirección normal ($\theta = 0$). Se ha encontrado que la razón $\varepsilon/\varepsilon_0$ es aproximadamente 1.2 para la mayoría de las superficies metálicas brillantes, y que es ligeramente inferior a la unidad para los no conductores. La tabla 6.1 da la razón de ε a ε_0 para distintas superficies metálicas brillantes. En la tabla 6.2 se da una lista para esta misma razón para superficies no metálicas.

En la mayoría de los cálculos se usa la emisividad normal ε_0 sin corrección. La escasez de datos e incertidumbre bajo condiciones superficiales reales hacen aceptable esta práctica.

Tabla 6.1 La razón $\varepsilon/\varepsilon_0$ para distintas superficies metálicas brillantes.

Aluminio, rolado brillante (338°F)	$\frac{0.049}{0.039} = 1.25$
bismuto, brillante (176°F)	$\frac{0.340}{0.336} = 1.08$
cromo, pulido (302°F)	$\frac{0.071}{0.058} = 1.22$
hierro, grabado brillante (302°F)	$\frac{0.158}{0.128} = 1.23$
manganina, rolado brillante (245°F)	$\frac{0.057}{0.048} = 1.19$
níquel, mate brillante (212°F)	$\frac{0.046}{0.041} = 1.12$
níquel, pulido (212°F)	$\frac{0.053}{0.045} = 1.18$

Tabla 6.2 La razón $\varepsilon/\varepsilon_0$ para distintas superficies no metálicas.

óxido de cobre (300°F)	0.96
cerámica refractaria (183°F)	0.99
vidrio (200°F)	0.93
hielo (32°F)	0.95
papel (200°F)	0.97
madera terciada (158°F)	0.97

6.3-2 Variación en la longitud de onda de la emisión superficial

Está menos establecido el efecto de la longitud de onda en la emisión radiante que el de la dirección. La tendencia general de los metales es que la emisividad disminuya con valores crecientes de λ . Este comportamiento se muestra en la figura 6.14, que se tomó de algunos datos de Saban.² Para la mayoría de los metales, la emisividad pico

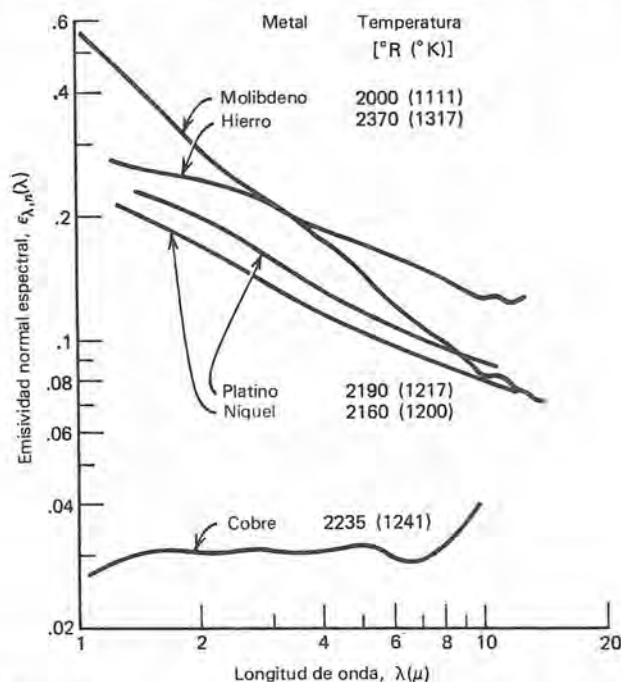


Figura 6.14 Emisividad espectral normal contra longitud de onda para distintos metales pulidos.

² R. A. Seban, "Thermal Radiation Properties of Materials, Parte III," WADD TR-60-370, PT III. Univ. de Calif. (Berkeley), 1963.

se presenta cerca de la región de longitudes de onda visibles, con una disminución a valores de λ mayores y menores que ésta.

Para los no metales, la dependencia de la emisividad en la longitud de onda es bastante débil. No se pueden hacer generalizaciones de ε_λ contra λ en este caso.

6.3-3 Variación de la emisión con la temperatura superficial

De la teoría electromagnética se puede demostrar que la emisividad espectral semiesférica de las superficies metálicas varía como la potencia $1/2$ de la resistividad eléctrica. Ya que la resistividad es una función creciente de la temperatura, por lo general la emisividad espectral de los metales aumenta con la temperatura. Esto es cierto para longitudes de onda mayores que aproximadamente 5μ ; para longitudes más cortas, se invierte la variación de la emisividad con la temperatura.

Para los no metales, generalmente la emisividad espectral disminuye conforme aumenta la temperatura. Para cualquier material se deben usar los valores de emisividad listados a temperaturas tan próximas como sean posibles a las que se experimentan en la práctica.

6.3-4 Efectos de la rugosidad superficial

Un efecto que altera sustancialmente las características radiantes de una superficie es la relación entre la longitud de onda de la energía radiante que se considera y la magnitud de las imperfecciones superficiales. Una superficie *ópticamente lisa* es aquella para la que las imperfecciones superficiales son mucho menores que las longitudes de onda. Obviamente una superficie puede ser ópticamente lisa para las longitudes de onda más largas del espectro y bastante áspera para las longitudes de onda más bajas. Usando la teoría electromagnética, se pueden predecir las propiedades de las superficies ópticamente lisas.

La cuestión de los efectos de la aspereza superficial en las características de radiación de las superficies es bastante compleja. No existen buenos medios de definir la rugosidad superficial. Normalmente se listan las propiedades tabuladas para distintas clases de preparación superficial, por ejemplo un asentado, el pulido, el grabado con ácido y otros.

No se pretende seguir estudiando este tema, sencillamente se dice que el acabado superficial es una consideración muy importante para establecer las propiedades superficiales adecuadas. Se debe reconocer

la necesidad de las propiedades tabuladas que pertenecen a las condiciones de un análisis dado.

6.3-5 Los efectos de las impurezas superficiales

Una superficie preparada cuidadosamente para comportarse en forma ópticamente lisa se puede desviar de tal comportamiento por una multitud de efectos superficiales. Algunos ejemplos de estos efectos son las capas delgadas de óxidos formadas u otros productos de reacción química en la superficie, y la adsorción superficial, como en el caso de las gotitas de agua.

Las reacciones químicas superficiales son de interés en el caso de los metales; obviamente, la mayoría de las superficies no metálicas tienen poca o ninguna actividad superficial. La presencia de una capa de óxido, incluso si es muy delgada, generalmente aumenta la emisividad por encima del valor para una superficie metálica. En la figura 6.15 se muestra el efecto de las capas de óxido en la emisividad del cobre. Estas curvas son de Gubareff y asociados.³

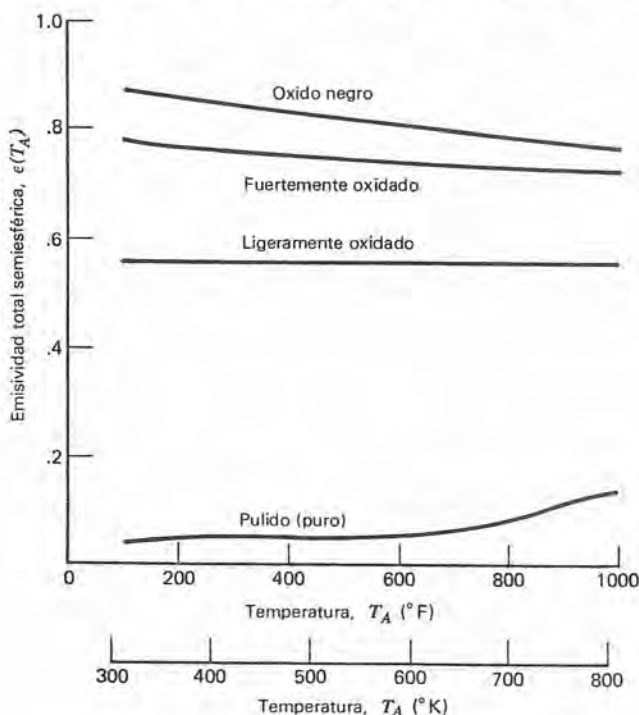


Figura 6.15 El efecto de capas de óxido en la emisividad del cobre.

³G. C. Gubareff, J. F. Janssen, y R. A. Torberg, *Thermal Reduction Properties Survey*, 2a ed. (Honeywell Research Center, 1960).

6.3-6 Comportamiento de las superficies reales en general

En este punto se pueden hacer algunos comentarios generales para resumir, en forma parcial, el estudio de la sección 6.3. Expresados, brevemente estos comentarios son

1. La emisividad es una función fuerte de las características superficiales.
2. La emisividad de superficies metálicas altamente pulidas es bastante baja.
3. La emisividad de todas las superficies metálicas aumenta con la temperatura.
4. La emisividad aumenta apreciablemente haciendo la superficie más áspera y con la formación de una capa de óxido.
5. La razón de ϵ/ϵ_0 es mayor que 1 para superficies metálicas brillantes.
6. Para las superficies no metálicas, las emisividades son mucho más elevadas que para las superficies metálicas; generalmente, estas emisividades disminuyen conforme aumenta la temperatura.
7. Para los metales con óxidos coloreados (Fe, Zn, Cr), las emisividades son mucho mayores que para los metales con óxidos blancos (Ca, Al, Mg).

El apéndice D es una lista extensa de emisividades.

6.4 INTERCAMBIO DE ENERGIA RADIANTE ENTRE SUPERFICIES NEGRAS ISOTERMICAS

El intercambio de energía radiante entre dos superficies es, potencialmente, un problema muy complejo cuando se tienen en cuenta todas las consideraciones de las propiedades superficiales mencionadas en la sección anterior. Se considera desde el principio el caso más sencillo, que ocurre entre superficies negras. Se simplifica el intercambio entre superficies negras, ya que por definición son absorbentes perfectos, y en consecuencia no se necesita considerar la energía reflejada; también emiten la energía en forma difusa, por lo que la intensidad de la radiación emitida es independiente de la dirección. Se observará que la complicación primordial cuando se considere el intercambio radiante entre superficies negras es el de la geometría o la orientación de las superficies relativas entre sí. En la siguiente sección se consideran otras complicaciones cuando hay superficies no negras.

6.4-1 Intercambio radiante entre elementos de área de distintas extensiones

Como una consideración inicial del intercambio radiante, se consideran las dos superficies negras mostradas en la figura 6.16. Las

superficies designadas por A_1 y A_2 están a temperaturas constantes uniformes T_1 , T_2 , respectivamente; las pequeñas áreas elementales dA_1 y dA_2 representan porciones diferenciales de A_1 y A_2 .

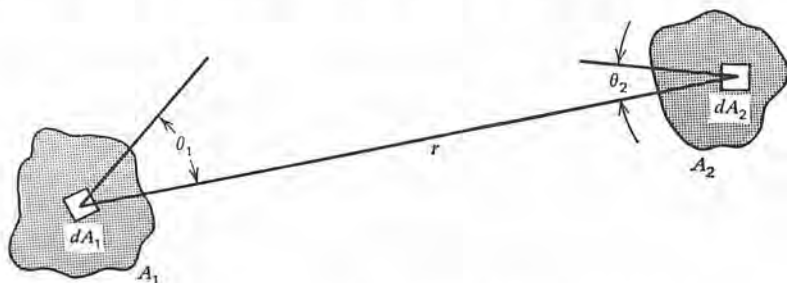


Figura 6.16 Intercambio radiante entre dos superficies negras.

Usando la notación y los desarrollos de la sección anterior, se tiene, para la energía monocromática que sale de dA_1 y que incide en dA_2 ,

$$dq_{b\lambda, dA_1 \rightarrow dA_2}(\lambda, \theta, T_1) = I_{b\lambda}(\lambda, T_1) dA_1 \cos \theta_1 d\omega_1 d\lambda \quad (6-3)$$

en donde θ_1 es el ángulo entre la normal a A_1 en dA_1 y la línea recta dibujada entre dA_1 y dA_2 , $d\omega_1$ es el ángulo sólido subtendido por dA_2 en dA_1 , y $d\lambda$ es el intervalo de longitud de onda de la emisión dada. La radiación total desde dA_1 que incide en dA_2 se obtiene integrando la ecuación (6-3) en todas las longitudes de onda; la expresión resultante es

$$dq_{dA_1 \rightarrow dA_2}(\theta, T_1) = I_{b1}(T_1) dA_1 \cos \theta_1 d\omega_1 \quad (6-55)$$

Se puede escribir el ángulo sólido $d\omega_1$ en función de la proyección de dA_2 según se ve desde dA_1 , en la forma

$$d\omega_1 = \frac{\cos \theta_2 dA_2}{r^2} \quad (6-56)$$

También se puede recordar que la intensidad radiante y la potencia emisiva total de una superficie negra están relacionadas de acuerdo con la expresión

$$E_b(T) = \pi I_b(T) = \sigma T^4 \quad (6-13)$$

Estas dos expresiones, sustituidas en la ecuación (6-55), dan

$$dq_{dA_1 \rightarrow dA_2}(\theta) = E_{b1}(T_1) \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_1 dA_2}{\pi r^2} \quad (6-57)$$

Se puede desarrollar una expresión exactamente análoga para la emisión total desde dA_2 que incide en dA_1 ; el resultado es

$$dq_{dA_2 \rightarrow dA_1}(\theta) = E_{b2}(T_2) \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_1 dA_2}{\pi r^2} \quad (6-58)$$

El intercambio neto de energía entre estas áreas diferenciales es la diferencia entre las expresiones dadas por las ecuaciones (6-57) y (6-58). El resultado es

$$dq_{dA_1 \rightleftharpoons dA_2} = [E_{b1}(T_1) - E_{b2}(T_2)] \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_1 dA_2}{\pi r^2} \quad (6-59)$$

o

$$dq_{dA_1 \rightleftharpoons dA_2} = \sigma(T_1^4 - T_2^4) \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_1 dA_2}{\pi r^2} \quad (6-60)$$

Las ecuaciones (6-59) y (6-60) son básicas a todas las consideraciones de intercambio de energía entre las superficies negras. Normalmente se usará aquí la ecuación (6-59) para otros desarrollos, por lo que de aquí en adelante se suprime la notación de funciones para fines de brevedad.

Los ejemplos 6.2 y 6.3 ilustran el uso de la ecuación (6-59).

Ejemplo 6.2

El sol y la tierra están separados por una distancia de 92.9×10^6 millas en promedio. El diámetro del sol es aproximadamente de 860,000 millas y el de la tierra aproximadamente igual a 8000 millas. En un día despejado, la radiación solar en la superficie de la tierra ha llegado a ser igual a 360 Btu/hr-ft², con 90 Btu/hr-ft² adicionales absorbidas por la atmósfera terrestre. Suponiendo que el sol emita como un cuerpo negro, estimar su temperatura superficial a partir de esta información.

El sol, que emite en forma difusa, aparece como un disco de área $\pi D_{\text{sol}}^2/4$. El intercambio de energía $dq_{\text{sol} \rightarrow \text{tierra}}$, dividido entre el área del disco de la tierra, es la irradiación solar. Escribiendo la ecuación (6-59) en forma adecuada, se tiene

$$\frac{dq_{\text{sol} \rightarrow \text{tierra}}}{dA_e} = (E_{bs} - E_{be}) \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_s}{\pi r^2}$$

Para este problema, $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$; en consecuencia, $\cos \theta_1 = \cos \theta_2 = 1$.

La potencia emisiva de la tierra se puede despreciar en comparación con E_{bs} . Despejando el valor de $E_{bs} = \sigma T_s^4$ se obtiene

$$\begin{aligned}
 \sigma T_s^4 &= \frac{dq_{s-e}}{dA_e} \frac{\pi r^2}{dA_s} \\
 &= 450 \text{ Btu/hr-ft}^2 \frac{\pi(93 \times 10^6)^2 \text{ mi}^2}{\pi(0.43 \times 10^6)^2 \text{ mi}^2} \\
 T_s^4 &= \frac{450 \text{ Btu/hr-ft}^2}{0.173 \times 10^{-8} \text{ Btu/hr-ft}^2 \cdot ^\circ\text{R}} \frac{93^2}{0.43^2} \\
 &= 1.2167 \times 10^{16} \\
 T_s &\cong 10,500^\circ\text{R}
 \end{aligned}$$

Genéralmente se acepta que la temperatura del sol es de esta magnitud aproximada.

Ejemplo 6.3

Un entorno, con superficies que emiten como cuerpos negros, tienen una abertura que interactúa también como si fuera una superficie negra. Determinar el intercambio radiante entre un elemento de la superficie del entorno y la abertura con tamaños y orientaciones como se muestran en la figura 6.17. La temperatura de la superficie del entorno es uniforme en $1\,000^\circ\text{F}$ y la abertura actúa como una superficie negra a 250°F .

Nuevamente se aplica la ecuación (6-59); las áreas de que se trata son suficientemente pequeñas, comparadas con otras dimensiones, de manera que se puedan representar por $dA_1 = dA_2 = 0.1 \text{ in.}^2$. Se puede escribir

$$dq_{dA_1 \rightarrow dA_2} = (E_{b1} - E_{b2}) \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2$$

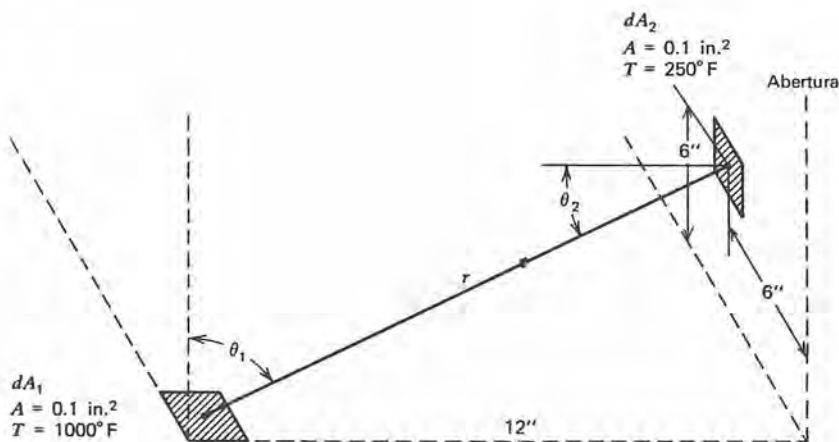


Figura 6.17 Intercambio radiante entre dos pequeñas superficies negras.

El valor de r se encuentra de las dimensiones dadas como igual a

$$r = (12^2 + 6^2 + 6^2)^{1/2} = 14.7 \text{ in.}$$

con lo que $\cos \theta_1 = 6/14.7$ y $\cos \theta_2 = 12/14.7$. Ahora se puede calcular el intercambio neto de energía; haciendo las sustituciones adecuadas se tiene

$$\begin{aligned} dq_{1-2} &= \left(0.173 \times 10^{-8} \frac{\text{Btu}}{\text{hr-ft}^2 \cdot ^\circ\text{R}^4} \right) (1460^4 - 710^4) ^\circ\text{R}^4 \\ &\times \frac{(6)(12)}{\pi(14.7)^4 \text{ in.}^2} \frac{(0.1 \text{ in.}^2)(0.1 \text{ in.}^2)}{144 \frac{\text{in.}^2}{\text{ft}^2}} \\ &= \frac{(0.173)(45,400 - 2,540)(6)(12)(0.1)(0.1) \text{ Btu}}{\pi(14.7)^4(144) \text{ hr}} \\ &= 1.16 \times 10^{-5} \text{ Btu/hr} \end{aligned}$$

Las ecuaciones (6-57), (6-58) y (6-59) representan la transferencia de energía radiante en función de una fuerza motriz E_b y un término que da cuenta de la energía, $\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_1 dA_2 / \pi r^2$. Se puede hacer una designación conveniente si se define un *factor de configuración geométrica* o *factor de vista*, que representa la fracción de energía que sale del elemento dA_1 de superficie negra que incide en el elemento dA_2 ; de la superficie negra; a esta cantidad se le designa por F_{d1-d2} . El factor de vista para las áreas diferenciales dA_1 y dA_2 se define de acuerdo con

$$\begin{aligned} F_{d1-d2} &\equiv \frac{dq_{dA_1 \rightarrow dA_2}}{E_{b1} dA_1} = \frac{E_{b1} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2}{E_{b1} dA_1} \\ &\equiv \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_2}{\pi r^2} \end{aligned} \quad (6-61)$$

En forma exactamente análoga, se puede representar F_{d2-d1} como

$$F_{d2-d1} \equiv \frac{\cos \theta_2 \cos \theta_1 dA_1}{\pi r^2} \quad (6-62)$$

Si se multiplica la ecuación (6-61) por dA_1 y la ecuación (6-62) por dA_2 , los segundos miembros de ambas son iguales; en consecuencia,

$$dA_1 F_{d1-d2} = dA_2 F_{d2-d1} = \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2 \quad (6-63)$$

Se llama *relación de reciprocidad* para áreas diferenciales a la ecuación (6-63). Con esta expresión se puede reescribir la ecuación (6-59) en la forma

$$dq_{dA_1-dA_2} = (E_{b1} - E_{b2}) dA_1 F_{d1-d2} = (E_{b1} - E_{b2}) dA_2 F_{d2-d1} \quad (6-64)$$

Se emplean las relaciones de definición para F_{d1-d2} y F_{d2-d1} para calcular los valores numéricos para $dq_{dA_1-dA_2}$; los ejemplos 6.2 y 6.3 incluyen dichos cálculos.

6.4-2 Intercambio radiante entre elementos de área de extensión finita

En la mayoría de los problemas de interés en la ingeniería, las áreas superficiales involucradas en el intercambio de energía radiante son finitas más que de magnitud diferencial. Se pueden extender las expresiones que se obtuvieron en la sección anterior, mediante el proceso de integración, para permitir calcular áreas finitas en forma adecuada.

Considere dos áreas, como las mostradas en la figura 6.18. Las dos áreas diferenciales dA_1 y dA_2 son partes de superficies negras

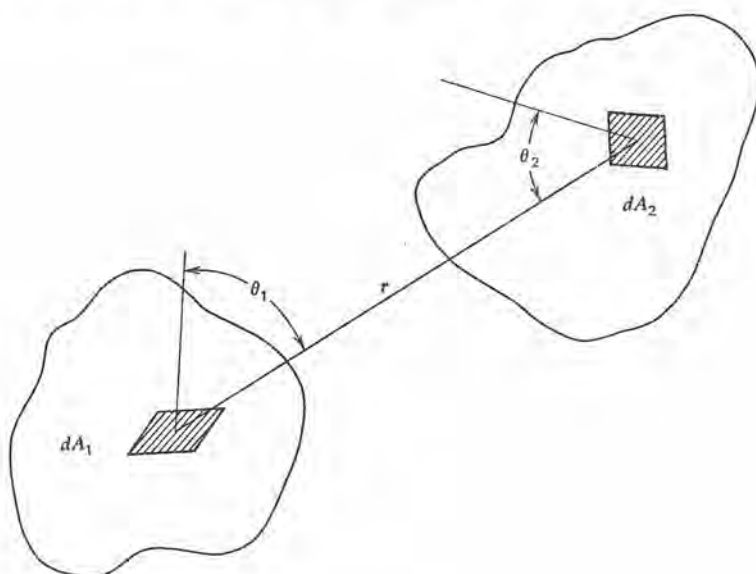


Figura 6.18 Intercambio radiante entre áreas diferencial y finita.

finitas. Como antes, se puede escribir para la energía que sale de dA_1 y que llega a dA_2 ,

$$dq_{dA_1 \rightarrow dA_2} = E_{b1} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_1 dA_2}{\pi r^2} \quad (6-59)$$

Si ahora se considera la energía transmitida desde dA_1 al área finita A_2 , se integra en la superficie de A_2 de acuerdo con

$$dq_{dA_1 \rightarrow A_2} = E_{b1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_1 dA_2}{\pi r^2} \quad (6-65)$$

El factor de vista correspondiente es la transferencia radiante $q_{dA_1 \rightarrow A_2}$, dividida entre la energía que sale de dA_1

$$\begin{aligned} F_{d1-2} &\equiv \frac{q_{dA_1 \rightarrow A_2}}{E_{b1} dA_1} = \frac{E_{b1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_1 dA_2}{\pi r^2}}{E_{b1} dA_1} \\ &\equiv \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_2}{\pi r^2} \end{aligned} \quad (6-66)$$

Los límites reales de integración en A_2 son los que definen la parte de A_2 vista desde dA_1 . Se puede ver que el integrando de esta expresión es F_{d1-d2} , de acuerdo con la ecuación (6-61). Por tanto, se puede escribir

$$F_{d1-2} = \int_{A_2} F_{d1-d2} \quad (6-67)$$

o, expresado con palabras, la fracción de la energía que sale de dA_1 y que incide en A_2 es la suma de la que incide en toda diferencial de A_2 .

Volviendo al análisis anterior, ahora se considera la energía que sale del área finita A_2 y que llega a dA_1 . Se puede escribir

$$dq_{A_2 \rightarrow dA_1} = E_{b2} dA_2 \int_{A_1} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_1}{\pi r^2} \quad (6-68)$$

Ya que la energía total que sale de la superficie negra A_2 es

$$q_{2 \text{ total}} = \int_{A_2} E_{b2} dA_2$$

el factor de vista es la relación $q_{A_2 \rightarrow dA_1}/q_{2 \text{ total}}$, o sea

$$\begin{aligned} F_{2-d1} &\equiv \frac{E_{b2} dA_1 \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_2}{\pi r^2}}{E_{b2} \int_{A_2} dA_2} \\ &\equiv \frac{dA_1 \int_{A_2} (\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_2)/\pi r^2}{A_2} \end{aligned} \quad (6-69)$$

Nuevamente, usando la ecuación (6-61), se puede reescribir el integrando de la expresión anterior, con lo que se obtiene otra forma de la ecuación (6-69):

$$F_{2-d1} = \frac{dA_1 \int_{A_2} F_{d1-d2}}{A_2} \quad (6-70)$$

Ahora se puede obtener el teorema de reciprocidad para el intercambio entre un área de superficie diferencial y un área de superficie finita relacionando las ecuaciones (6-67) y (6-70); la expresión es

$$dA_1 F_{d1-2} = A_2 F_{2-d1} \quad (6-71)$$

Se puede evaluar el intercambio de energía radiante entre una superficie diferencial y otra finita restando $q_{A_2-dA_1}$ de $q_{dA_1-A_2}$, en la forma dada por las ecuaciones (6-65) y (6-68). La expresión que se obtiene es

$$\begin{aligned} q_{dA_1-A_2} &= (E_{b1} - E_{b2}) dA_1 F_{d1-2} \\ &= (E_{b2} - E_{b1}) A_2 F_{2-d1} \end{aligned} \quad (6-72)$$

El paso final es evaluar el intercambio radiante entre dos superficies negras finitas. La energía que sale de A_1 y que llega a A_2 se obtiene de la ecuación (6-59) igual a

$$q_{A_1-A_2} = E_{b1} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_1 dA_2}{\pi r^2} \quad (6-73)$$

El factor F_{1-2} de vista es la razón de $q_{A_1-A_2}$ a la energía total $E_{b1} A_1$ que sale de A_1 . La expresión para F_{1-2} es

$$\begin{aligned} F_{1-2} &\equiv \frac{E_{b1} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_1 dA_2}{\pi r^2}}{E_{b1} A_1} \\ &\equiv \frac{1}{A_1} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_1 dA_2}{\pi r^2} \end{aligned} \quad (6-74)$$

En función de los factores de configuración definidos anteriormente, también se puede escribir F_{1-2} en la forma

$$F_{1-2} = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} \int_{A_2} F_{d1-d2} dA_1 = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} F_{d1-2} dA_1 \quad (6-75)$$

En un desarrollo exactamente análogo al correspondiente para F_{1-2} se puede obtener, para F_{2-1} , la expresión

$$F_{2-1} \equiv \frac{1}{A_2} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_1 dA_2}{\pi r^2} \quad (6-76)$$

De las ecuaciones (6-74) y (6-76) se obtiene el teorema de reciprocidad para el intercambio radiante entre áreas finitas en la forma

$$A_1 F_{1-2} = A_2 F_{2-1} \quad (6-77)$$

Ahora se puede expresar el intercambio de energía entre superficies negras finitas como

$$q_{1-2} = (E_{b1} - E_{b2}) A_1 F_{1-2} = (E_{b1} - E_{b2}) A_2 F_{2-1} \quad (6-78)$$

6.4-3 Álgebra del factor de vista

Hasta ahora se han dado las expresiones para los factores de vista entre combinaciones de áreas diferenciales y finitas en forma de ecuaciones. Se pueden generalizar las expresiones para las áreas finitas que comprenden un entorno en la forma siguiente.

Toda la energía que sale de una superficie, designada por i , en un entorno debe llevar a todas las superficies que pueda "ver" el entorno. Se considera que el entorno tiene n superficies designando por j cualquier superficie que reciba energía desde i . (Note que, en el caso de una superficie cóncava, $F_{ii} \neq 0$). Se puede expresar este concepto formalmente como

$$\sum_{j=1}^n F_{ij} = 1 \quad (6-79)$$

La relación de reciprocidad, que se repite aquí para fines de claridad, en general es

$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji} \quad (6-77)$$

Estas dos expresiones comprenden la base del álgebra del factor de vista, que es una técnica muy útil para evaluar los factores de vista cuya evaluación, en primera instancia, podría parecer bastante difícil.

Se emplea la notación simplificada introduciendo el símbolo G_{ij} definido en la forma

$$G_{ij} \equiv A_i F_{ij} \quad (6-80)$$

Esta definición permite escribir las ecuaciones (6-79) y (6-77) en la forma

$$\sum_{j=1}^n G_{ij} = A_i \quad (6-81)$$

$$G_{ij} = G_{ji} \quad (6-82)$$

Se llama *flujo geométrico* a la cantidad representada por G_{ij} . Los requerimientos de conservación de energía proporcionan las relaciones que involucran los flujos geométricos.

Ahora se debe explicar determinada simbología especial. Entre la superficie 1 y otras dos superficies "vistas" por 1, designadas por 2 y 3, se puede escribir

$$G_{1-(2+3)} = G_{1-2} + G_{1-3} \quad (6-83)$$

La ecuación (6-83) se reduce fácilmente en la forma siguiente:

$$A_1 F_{1-(2+3)} = A_1 F_{1-2} + A_1 F_{1-3}$$

o

$$F_{1-(2+3)} = F_{1-2} + F_{1-3}$$

que establece, sencillamente, que la energía que sale de la superficie 1 y que incide tanto en la 2, como en la 3 es el total de la que incide en cada una por separado.

Se escribe como $F_{(1+2)-(3+4)}$, una segunda expresión que involucra cuatro superficies y que se interpreta como

$$G_{(1+2)-(3+4)} = G_{1-(3+4)} + G_{2-(3+4)} \quad (6-84)$$

Es fácil obtener la relación de reciprocidad para la ecuación (6-84); es

$$G_{(3+4)-(1+2)} = G_{(3+4)-1} + G_{(3+4)-2} \quad (6-85)$$

La tercera relación que se da aquí es una descomposición de la ecuación (6-84)

$$G_{(1+2)-(3+4)} = G_{1-3} + G_{1-4} + G_{2-3} + G_{2-4} \quad (6-86)$$

que es un resultado directo de las ecuaciones (6-84) y (6-83).

Los siguientes problemas de ejemplo ilustran el uso de las ecuaciones anteriores para evaluar los factores de vista para la determinación de intercambio de energía radiante entre superficies.

Ejemplo 6.4

Evaluar el factor de vista F_{d1-d2} entre las áreas diferenciales dA_1 y dA_2 orientadas en superficies planas perpendiculares entre sí, como se muestra en la figura 6.19. La expresión aplicable es la ecuación (6-59). Los términos que se deben evaluar son

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= \frac{y}{r} & \cos \theta_2 &= \frac{z}{r} \\ r &= [x^2 + y^2 + z^2]^{1/2} \end{aligned}$$

Sustituyendo estos términos en la ecuación (6-61) se obtiene

$$\begin{aligned}
 F_{d1-d2} &= \frac{yz}{\pi r^4} dA_2 \\
 &= \frac{yz \, dx_2 \, dy_2}{\pi [x^2 + y^2 + z^2]^2}
 \end{aligned}
 \quad (6-87)$$

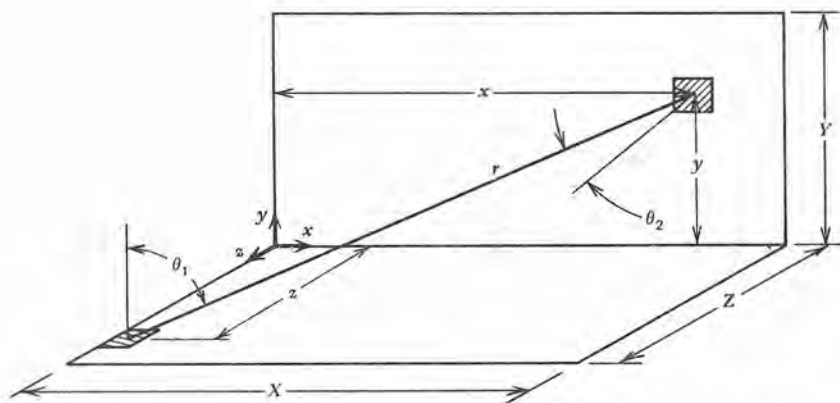


Figura 6.19 Determinación del factor de vista para superficies planas perpendiculares.

Ejemplo 6.5

Extender el resultado del ejemplo 6.4 para obtener el factor de vista entre un área diferencial plana y un área plana perpendicular finita.

La extensión de la ecuación (6-87) para que F_{d1-d2} evalúe F_{d1-2} , en donde A_2 es perpendicular al plano de $d1$, se logra usando la ecuación (6-67). El procedimiento es

$$\begin{aligned}
 F_{d1-2} &= \int_{A_2} F_{d1-d2} \\
 &= \int_{A_2} \frac{yz \, dx_2 \, dy_2}{\pi [x^2 + y^2 + z^2]^2} \\
 &= \int_0^Y \int_0^X \frac{yz \, dx_2 \, dy_2}{\pi [x^2 + y^2 + z^2]^2}
 \end{aligned}
 \quad (6-88)$$

La integración indicada es extraordinariamente compleja; se escribe el resultado sin los pasos detallados en la solución. La expresión resultante es

$$F_{d1-2} = \frac{1}{2\pi} \left[\tan^{-1} \frac{1}{B} - BC \tan^{-1} AC \right]
 \quad (6-89)$$

donde

$$A = Y/X, \quad B = Z/X, \quad \text{y} \quad C = (A^2 + B^2)^{-1/2}$$

El siguiente paso en la secuencia es la extensión de la ecuación (6-89) para expresar el factor de vista entre dos áreas rectangulares finitas perpendiculares entre sí y compartir la línea de intersección como un lado común. La expresión para F_{1-2} en este caso es, de acuerdo con la ecuación (6.75),

$$F_{1-2} = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} F_{d1-2} dA_1 \quad (6-75)$$

que, incluso sin la sustitución y definición de los límites de integración es compleja y la evaluación analítica por demás difícil. Hay resultados disponibles tanto en la forma de ecuación como de gráfica. En la figura 6.20 se presenta la solución gráfica para F_{1-2} .

Teniendo una gráfica para el caso representado por la figura 6.20, se pueden obtener factores de vista para otras geometrías relacionadas. El siguiente ejemplo ilustra la forma en que se puede usar esta gráfica, la reciprocidad y el álgebra del factor de vista para obtener factores de vista para otras configuraciones de áreas finitas.

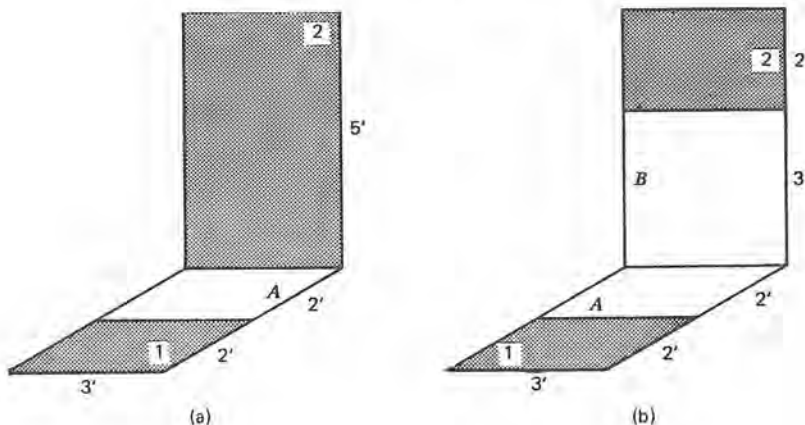
Ejemplo 6.6

Determinar los factores de vista F_{1-2} para las áreas finitas mostradas en la figura siguiente. La inspección indica que los factores F_{2-A} y $F_{2-(1+A)}$ de vista se pueden leer directamente de la figura 6.20. Se emplea el álgebra de flujo para relacionar F_{1-2} con los anteriores. Usando el álgebra de flujo se tiene

$$G_{2-(1+A)} = G_{2-1} + G_{2-A}$$

o sea

$$G_{2-1} = G_{2-(1+A)} - G_{2-A}$$



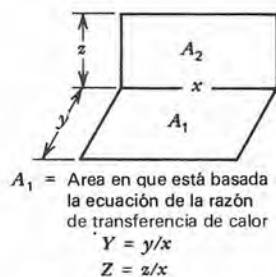
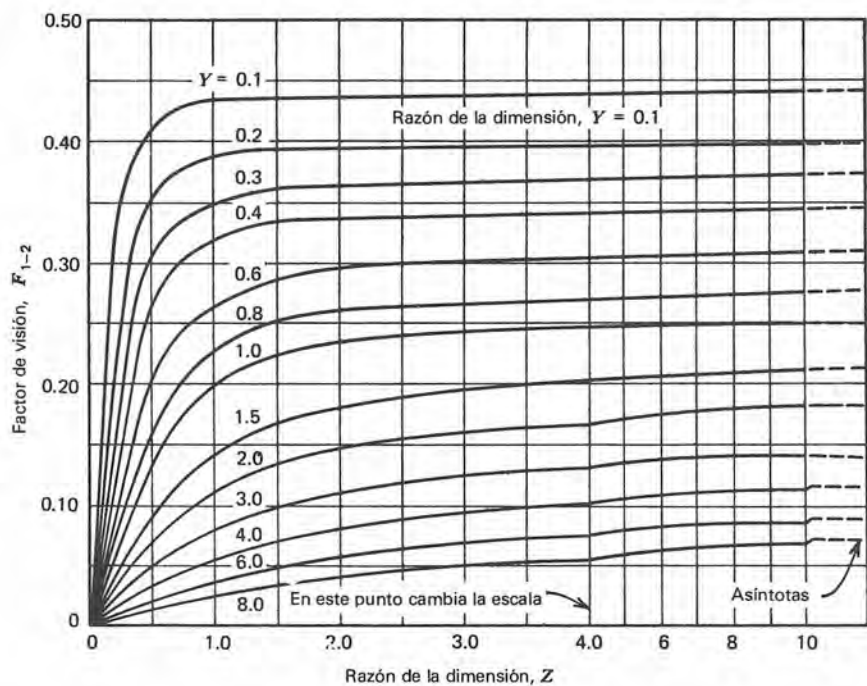


Figura 6.20 Factores de vista para rectángulos perpendiculares con un lado común. [De H. C. Hottel, "Radiant Heat Transmission", *Mechanical Engineering* 52 (1930). Con autorización del editor.]

Ahora se escribe el factor de vista F_{2-1} como

$$F_{2-1} = \frac{A_2 F_{2-(1+A)} - A_2 F_{2-A}}{A_2}$$

$$= F_{2-(1+A)} - F_{2-A}$$

Finalmente, por reciprocidad, se puede escribir

$$F_{1-2} = \frac{A_2}{A_1} F_{2-1} = \frac{A_2}{A_1} (F_{2-(1+A)} - F_{2-A})$$

De la figura 6.20 se lee

$$F_{2-(1+A)} = 0.15 \quad F_{2-A} = 0.10$$

y la respuesta para la configuración a) es

$$F_{1-2} = \frac{5}{2} (0.15 - 0.10) = 0.125$$

Para b), la secuencia de solución es

$$G_{1-2} = G_{1-(2+B)} - G_{1-B}$$

o sea

$$F_{1-2} = F_{1-(2+B)} - F_{1-B}$$

Se pueden usar los resultados de (a) para encontrar

$$F_{1-(2+B)} = \left(\frac{A_2 + A_B}{A_1} \right) [F_{(2+B)-(1+A)} - F_{(2+B)-A}]$$

$$F_{1-B} = \frac{A_B}{A_1} [F_{B-(1+A)} - F_{B-A}]$$

Se puede leer cada uno de estos factores de vista del lado derecho de estas expresiones de la figura 6.20; son

$$\begin{aligned} F_{(2+B)-(1+A)} &= 0.15 & F_{B-(1+A)} &= 0.22 \\ F_{(2+B)-A} &= 0.10 & F_{B-A} &= 0.165 \end{aligned}$$

Ahora se completa el problema de acuerdo con

$$F_{1-(2+B)} = \frac{(1.52)(0.91)}{(0.61)(0.91)} (0.15 - 0.10) = 0.125$$

$$F_{1-B} = \frac{(0.91)(0.91)}{(0.61)(0.91)} (0.22 - 0.165) = 0.0825$$

lo que da, para (b), el siguiente resultado

$$F_{1-2} = 0.125 - 0.0825 = 0.0425$$

Todos los ejemplos anteriores se refirieron a áreas planas o elementos de ellas que están perpendiculares entre sí. Obviamente, este es un caso muy especial, aunque se pueden resolver muchos casos de importancia práctica.

En las figuras siguientes se dan los factores de vista de otras geometrías de interés. Por ningún motivo se puede considerar que esta compilación es muy completa. Para compilaciones más completas, se sugieren al lector las publicaciones de Wiebelt,⁴ Sparrow y Cess,⁵

⁴ J. A. Wiebelt, *Engineering Radiation Heat Transfer* (Nueva York: Holt, Rinehart and Winston, 1966).

⁵ E. M. Sparrow y R. D. Cess, *Radiation Heat Transfer*, (Belmont, Calif.: Brooks/Cole, 1966).

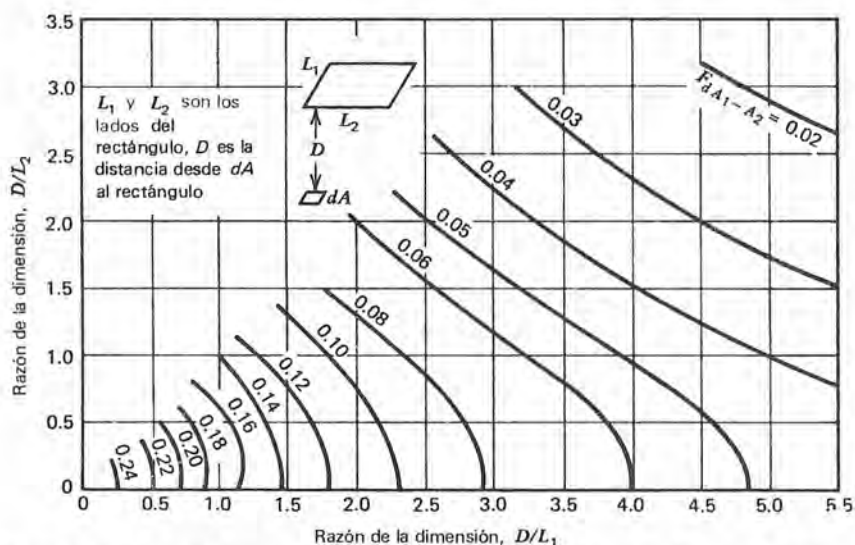


Figura 6.21 Factor de vista para un elemento plano diferencial orientado por debajo de una esquina de un rectángulo finito paralelo. [De H. C. Hottel, "Radiant Heat Transmission", *Mechanical Engineering*, 52 (1930). Con autorización del editor.]

Love,⁶ Hottel y Sarofim,⁷ y otros tratados avanzados relativos a la transferencia radiante de calor. Todos los factores de vista dispo-

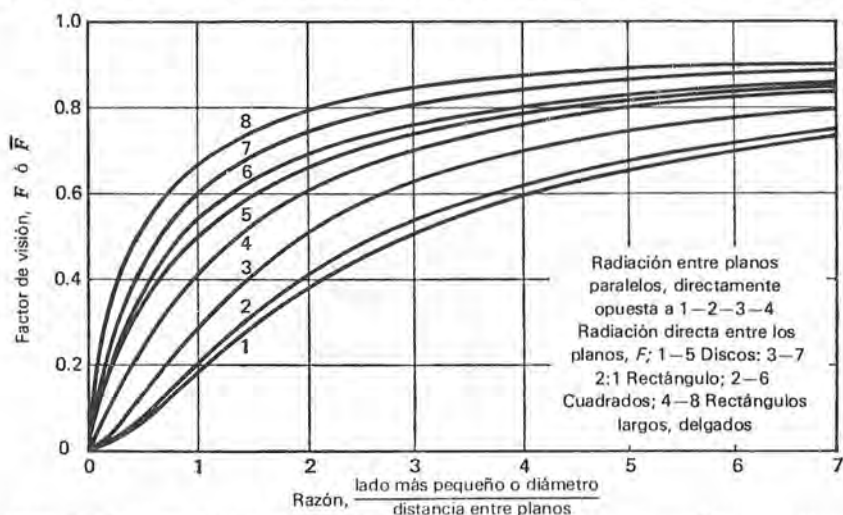


Figura 6.22 Factores de vista para cuadrados paralelos, rectángulos y discos. [De H. C. Hottel, "Radiant Heat Transmission", *Mechanical Engineering*, 52, (1930). Con autorización del editor.]

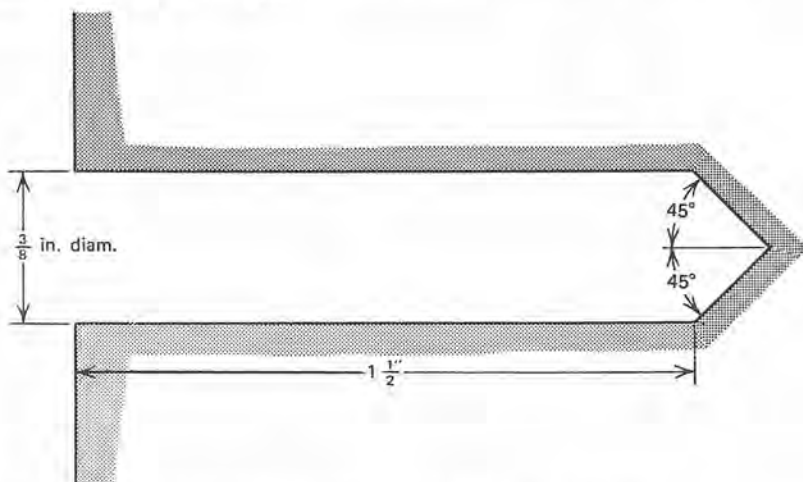
⁶T. J. Love, *Radiative Heat Transfer*, (Columbus, Ohio: Merrill, 1968).

⁷H. C. Hottel y A. F. Sarofim, *Radiative Transfer*, (Nueva York: McGraw-Hill, 1967).

nibles en cualquier forma están basados en las ecuaciones integrales desarrolladas en esta sección. En los siguientes problemas de ejemplo se ilustra el uso de las figuras anteriores.

Ejemplo 6.7

Se hace una perforación de $3/8$ in de diámetro en una pieza metálica en la forma mostrada. Si el metal está a temperatura uniforme y se comporta como una superficie negra, ¿cuánta emisión de la superficie de la cavidad escapa al medio ambiente? Si las paredes de la cavidad se designan como la superficie 1, se considera al agujero como una superficie circular de $3/8$ in de diámetro y se designa con 2, se desea encontrar el factor de vista F_{1-2} .



Se determinan las áreas superficiales de 1 y 2 en la forma siguiente

$$A_1 = \pi \left(\frac{3}{8} \right) (1.5) \text{ in.}^2 + \frac{1}{2} \frac{(\pi) \left(\frac{3}{8} \right) \left(\frac{3}{16} \right) \text{ in.}^2}{\sin 45^\circ} = 1.916 \text{ in.}^2$$

$$A_2 = \frac{\pi}{4} \left(\frac{3}{8} \text{ in.} \right)^2 = 0.110 \text{ in.}^2$$

El factor de vista entre 2 y 1 es

$$F_{2-1} = 1$$

Por reciprocidad, se obtiene

$$F_{1-2} = \frac{A_2 F_{2-1}}{A_1} = \frac{(0.110 \text{ in.}^2)(1)}{1.916 \text{ in.}^2} = 0.057$$

o sea que se pierde aproximadamente 6% de la emisión de la superficie de la cavidad a través de la abertura

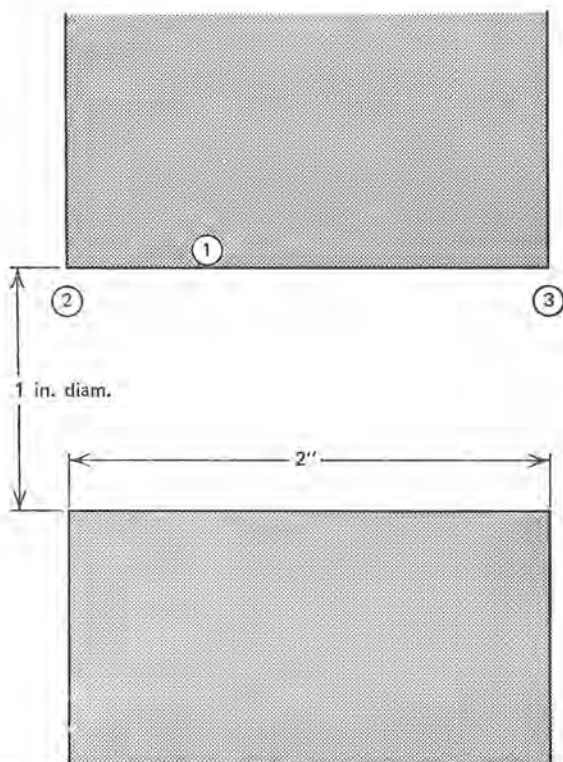
Ejemplo 6.8

Si se perfora un agujero de 1 in de diámetro para traspasar una placa metálica de 2 in de espesor que se mantiene a una temperatura uniforme de 350°F, ¿cuánta energía se pierde por hora al medio ambiente que está a 60°F? Se puede considerar que tanto la superficie metálica como el medio ambiente son negros.

Se designa con 1 a la superficie de la cavidad y se considera que los dos extremos de la perforación de 1 in de diámetro son discos negros y se designan como las superficies 2 y 3 en la forma mostrada.

De la figura 6.22, se obtuvieron los factores de vista F_{2-3} y F_{3-2} :

$$F_{2-3} = F_{3-2} = 0.07$$



Ahora se pueden determinar F_{2-1} y F_{3-1} como

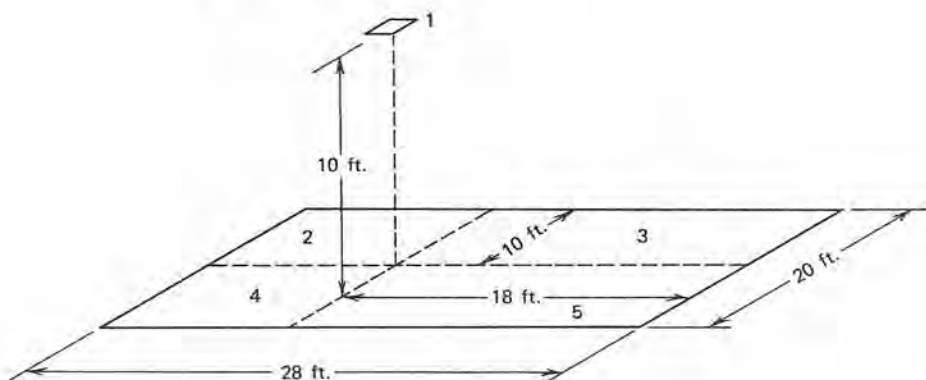
$$F_{2-1} = F_{3-1} = 1 - F_{2-3} = 0.93$$

y, usando la reciprocidad, se obtiene

$$F_{1-2} = F_{1-3} = \frac{A_2 F_{2-1}}{A_1} = \frac{\frac{\pi(1 \text{ in.})^2}{4} (0.93)}{\pi(1 \text{ in.})(2 \text{ in.})} = 0.116$$

La pérdida total de la energía es la suma de las cantidades que salen a través de cada extremo del agujero. La solución se completa en la forma siguiente

$$\begin{aligned}
 q &= (A_1 F_{1-2} + A_1 F_{1-3})(E_{b1} - E_b \text{ medio ambiente}) \\
 &= A_1 (F_{1-2} + F_{1-3}) \sigma (T_1^4 - T_{\text{sup}}^4) \\
 &= \frac{\pi (1 \text{ in.})(2 \text{ in.})}{114 \text{ in.}^2/\text{ft}^2} (0.116 + 0.116) \left(0.173 \frac{\text{Btu}}{\text{hr-ft}^2\text{-}^\circ\text{R}} \right) \\
 &\quad \left[\left(\frac{810}{100} ^\circ\text{R} \right)^4 - \left(\frac{520}{100} ^\circ\text{R} \right)^4 \right] \\
 &= 6.26 \text{ Btu/hr}
 \end{aligned}$$



Ejemplo 6.9

Determinar el factor de vista entre un tragaluz de 1 ft^2 orientado como se muestra por encima de un piso de dimensiones 20 por 28 ft. Las áreas relativas son tales que el tragaluz, designado por 1, se puede aproximar como un área diferencial cuando se compara con el piso. En consecuencia, se puede expresar el factor de vista total $F_{1-\text{piso}}$ en la forma

$$G_{1-(2+3+4+5)} = G_{1-2} + G_{1-3} + G_{1-4} + G_{1-5}$$

o sea

$$F_{1-\text{piso}} = F_{1-2} + F_{1-3} + F_{1-4} + F_{1-5}$$

Usando la figura 6.21 se obtiene

$$F_{1-2} = F_{1-4} = 0.14$$

$$F_{1-3} = F_{1-5} = 0.164$$

lo que finalmente da

$$F_{1-\text{piso}} = 0.14 + 0.164 + 0.14 + 0.164 = 0.608$$

6.4-4 Reciprocidad especial

Ya se demostró que la expresión de la reciprocidad, desarrollada previamente, es muy útil. Otro teorema de *reciprocidad especial* es de suficiente importancia para justificar su estudio en este momento.

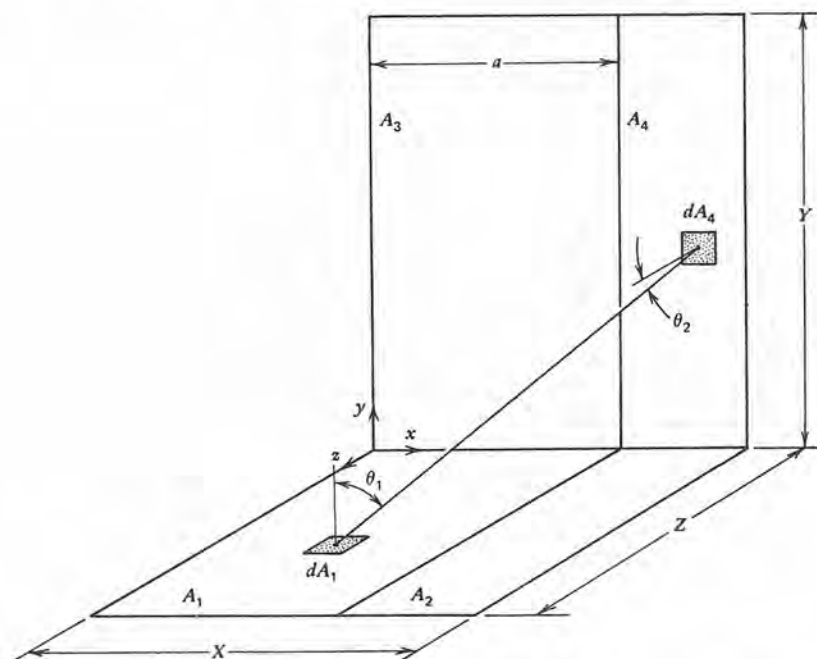


Figura 6.23 Orientación de superficie para el desarrollo de reciprocidad especial.

Para el desarrollo de la reciprocidad especial se hará referencia a la figura 6.23. Es de interés el intercambio directo entre las áreas A_1 y A_4 orientadas como se muestra. De acuerdo con la ecuación (6-74), se puede expresar el factor de vista entre estas áreas en la forma

$$\begin{aligned} A_1 F_{1-4} &= A_4 F_{4-1} = \int_{A_1} \int_{A_4} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_4 dA_4 dA_1}{\pi r^2} \\ &= \int_0^Z \int_0^a \int_0^Y \int_a^X \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_4 dx_4 dy dx_1 dz}{\pi r^2} \end{aligned} \quad (6-90)$$

Se puede escribir una expresión semejante para el intercambio entre A_2 y A_3 en la forma

$$\begin{aligned} A_2 F_{2-3} &= A_3 F_{3-2} = \int_{A_3} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_2 \cos \theta_3 dA_2 dA_3}{\pi r^2} \\ &= \int_0^Y \int_0^a \int_0^Z \int_a^X \frac{\cos \theta_2 \cos \theta_3 dx_2 dz dx_3 dy}{\pi r^2} \end{aligned} \quad (6-91)$$

Se puede observar que los integrandos y los límites de integración en las ecuaciones (6-90) y (6-91) son simétricos; en consecuencia, se ve que la relación de *reciprocidad especial*

$$A_1 F_{1-4} = A_2 F_{2-3} \quad (6-92)$$

es válida.

El desarrollo anterior se relacionó específicamente con áreas de rectángulos perpendiculares definidos por líneas que corren paralelas a los lados de las áreas rectangulares mayores. En forma exactamente análoga, las áreas mostradas de la figura 6.24 están relacionadas por reciprocidad especial de acuerdo a la ecuación (6-92). Estas áreas se designan en tal forma que la notación de subíndices en la ecuación (6-92) se aplica tanto a la orientación (a) como a la (b) en esta figura.

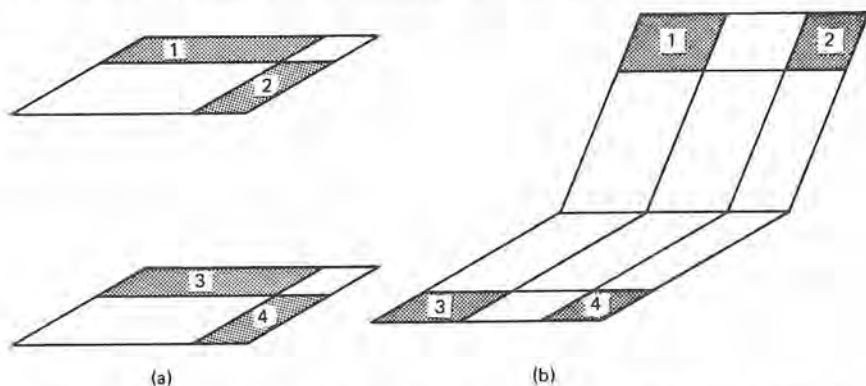


Figura 6.24 Orientación adicional de superficie para expresiones de reciprocidad especial.

Para el caso mostrado en la figura 6.23 se puede determinar el factor de vista F_{1-4} en la forma siguiente. Por una consideración de energía total se tiene

$$G_{(1+2)-(3+4)} = G_{1-3} + G_{1-4} + G_{2-3} + G_{2-4}$$

Usando la reciprocidad especial, se puede escribir

$$G_{1-4} = G_{2-3}$$

por lo que

$$2G_{1-4} = G_{(1+2)-(3+4)} - G_{1-3} - G_{2-4}$$

y finalmente, se tiene que

$$F_{1-4} = \frac{(A_1 + A_2)F_{(1+2)-(3+4)} - A_1 F_{1-3} - A_2 F_{2-4}}{2A_1}$$

El factor de vista F_{1-4} está escrito en función de los tres factores de vista $F_{(1+2)-(3+4)}$, F_{1-3} y F_{2-4} , cada uno de los cuales se puede leer directamente de la figura 6.20.

6.4-5 Determinación del factor de vista para superficies elongadas: el método de Hottel del hilo cruzado

En el caso de las superficies que se extienden lejos en una dirección para que se puedan considerar infinitas, Hottel⁸ ha presentado una técnica muy sencilla y útil para determinar los factores de vista.

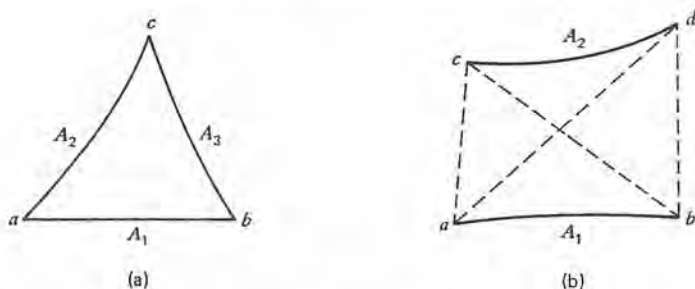


Figura 6.25 Determinación del factor de vista por el método de los hilos cruzados.

La figura 6.25(a) muestra un entorno formado por tres superficies cuya dimensión normal al papel se considera infinita. Por el álgebra del factor de vista se tiene

$$\begin{aligned}\sum_1^3 G_{1-j} &= A_1 F_{1-2} + A_1 F_{1-3} = A_1 \\ \sum_1^3 G_{2-j} &= A_2 F_{2-1} + A_2 F_{2-3} = A_2 \\ \sum_1^3 G_{3-j} &= A_3 F_{3-1} + A_3 F_{3-2} = A_3\end{aligned}$$

Se puede despejar el valor del flujo $G_{1-2} = A_1 F_{1-2}$ en la forma

$$G_{1-2} = A_1 F_{1-2} = \frac{A_1 + A_2 - A_3}{2} \quad (6-93)$$

Luego se consideran las superficies A_1 y A_2 que son partes de un entorno de muchas superficies, como se muestra en la figura 6.25(b). El procedimiento consiste en imaginar que hay hilos tensos entre los

⁸ H. C. Hottel, "Radiant-Heat Transmission," en W. H. McAdams, *Heat Transmission*, 3a. ed., (Nueva York: McGraw-Hill, 1954).

extremos finales de A_1 y A_2 ; se puede pensar que dos de estos hilos, \overline{ac} y \overline{bd} son superficies que forman un entorno junto con A_1 y A_2 .

Nuevamente, del álgebra del factor de vista se puede escribir

$$\sum_{j=1}^n G_{1,j} = A_1 F_{1-2} + A_1 F_{1-\overline{ac}} + A_1 F_{1-\overline{bd}} = A_1 \quad (6-94)$$

Ahora se consideran en forma análoga los hilos cruzados \overline{ad} y \overline{bc} . Se forman los entornos de tres lados \overline{acb} y \overline{adb} y, usando la ecuación (6-92) se puede escribir

$$G_{1-\overline{ac}} = A_1 F_{1-\overline{ac}} = \frac{A_1 + A_{\overline{ac}} - A_{\overline{cb}}}{2}$$

y

$$G_{1-\overline{bd}} = A_1 F_{1-\overline{bd}} = \frac{A_1 + A_{\overline{bd}} - A_{\overline{ad}}}{2}$$

Se sustituyen estas expresiones en la ecuación (6-94) para obtener

$$\begin{aligned} A_1 F_{1-2} &= A_1 - A_1 F_{1-\overline{ac}} - A_1 F_{1-\overline{bd}} \\ &= \frac{A_{\overline{cb}} + A_{\overline{ad}}}{2} - \frac{A_{\overline{ac}} + A_{\overline{bd}}}{2} \end{aligned}$$

o sea

$$F_{1-2} = \frac{A_{\overline{cb}} + A_{\overline{ad}}}{2A_1} - \frac{A_{\overline{ac}} + A_{\overline{bd}}}{2A_1}$$

Ya que las áreas se extienden infinitamente normales al papel, se puede representar cada una por las longitudes de los hilos tensos, lo que da

$$F_{1-2} = \frac{(\overline{cb} + \overline{ad}) - (\overline{ac} + \overline{bd})}{2\overline{ab}} \quad (6-95)$$

En términos generales, se puede escribir esta expresión

$$F_{1-2} = \frac{(\text{suma de hilos cruzados}) - (\text{suma de hilos no cruzados})}{2 \times \text{longitud de } l}$$

El ejemplo 6.10 ilustra la forma de emplear la técnica de hilos cruzados como una forma muy sencilla para la determinación del factor de vista.

Ejemplo 6.10

Evaluar el factor de vista entre las áreas rectangulares mostradas en la figura 6.26, cuya longitud, normal al plano de papel, es muy grande comparada con otras dimensiones.

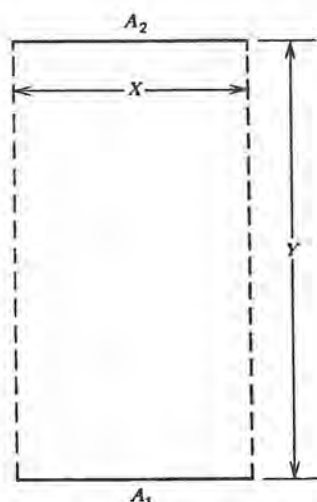


Figura 6.26 Determinación del factor de vista entre rectángulos largos y angostos por el método de los hilos cruzados.

Empleando la técnica de los hilos cruzados, se puede imaginar cuatro hilos cruzados entre las extremidades de A_1 y A_2 . Las longitudes de los hilos no cruzados son Y , y las de los hilos cruzados son $(X^2 + Y^2)^{1/2}$. De acuerdo con la ecuación (6-95), el factor de vista F_{1-2} está dado por

$$\begin{aligned} F_{1-2} &= \frac{2(X^2 + Y^2)^{1/2} - 2Y}{2X} \\ &= \frac{(1 + Z^2)^{1/2} - 1}{Z} \end{aligned} \quad (6-97)$$

en donde $Z = X/Y$ es la razón del lado pequeño de los rectángulos opuestos de la distancia entre los planos.

La ecuación (6.97) es la forma analítica de la línea 4 en la figura 6.22. El enfoque de la integración directa para obtener el factor de vista en este caso es mucho más complejo que el desarrollo que se empleó aquí.

6.4-6 Radiación entre superficies negras; analogía de la red eléctrica

En una sección anterior se expresó el intercambio radiante entre dos superficies negras como

$$q_{1-2} = A_1 F_{1-2} (E_{b1} - E_{b2}) \quad (6-78)$$

Se puede generalizar esta expresión para representar el intercambio entre la superficie A_i en un entorno que consiste en varias superficies negras, y las otras n superficies que "ve". La razón neta de flujo de energía desde A_i es

$$q_{i \text{ neta}} = \sum_{j=1}^n A_i F_{i-j} [E_{bi} - E_{bj}] \quad (6-98)$$

Junto con la ecuación (6-79)

$$\sum_{j=1}^n F_{i-j} = 1 \quad (6-79)$$

la ecuación (6-98) proporciona la base para una analogía entre el intercambio radiante de cuerpo negro y el flujo de la corriente eléctrica.

En la analogía, la cantidad transferida en el caso de la transferencia de calor, $q_{i \text{ neta}}$, es análoga a la corriente eléctrica; la fuerza motriz $E_{bi} - E_{bj}$ es análoga a la diferencia de potencial eléctrico ΔV ; y la conductancia en el caso de la transferencia de calor es $A_i F_{i-j}$. En la figura 6.27 se muestran las redes equivalentes para entornos de tres y cuatro superficies.

En todos los casos es conveniente utilizar una ilustración de la red eléctrica equivalente para la solución del problema. Las soluciones analíticas se hacen tediosas para los casos que involucran cuatro o más superficies; en tales casos, generalmente es más fácil construir un circuito equivalente para un problema de radiación y medir la cantidad deseada.

6.4-7 Radiación entre superficies negras con superficies rerradiantes no conductoras presentes

En la figura 6.27, todas las superficies ilustradas tienen una potencia emisiva E_{bi} caracterizada por una batería; y todas son superficies ab-

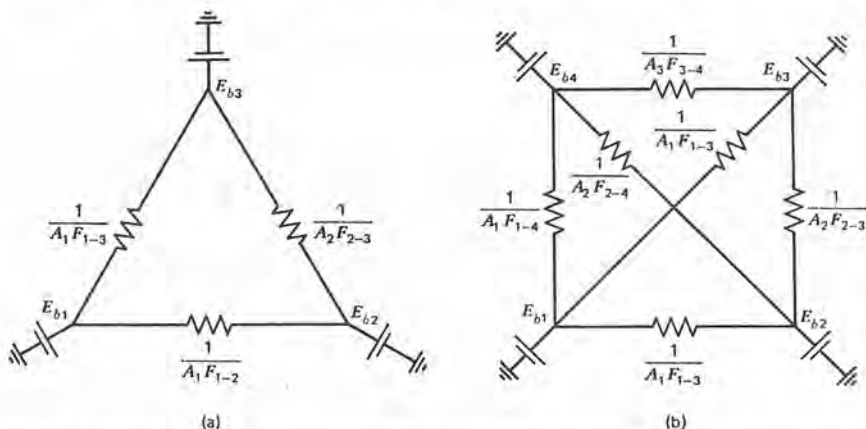


Figura 3.27 Redes eléctricas análogas para el intercambio de energía radiante en los entornos negros con a) tres superficies y b) cuatro superficies.

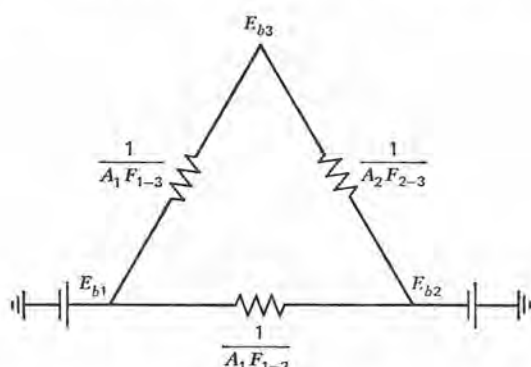


Figura 6.28 La red eléctrica análoga para el intercambio radiante entre dos superficies negras en presencia de una tercera superficie rerradiante.

sorbentes, o sea que hay un camino a tierra. En la práctica, determinadas superficies se comportan como no absorbentes de la energía radiante, o emiten y absorben energía radiante a la misma rapidez. En la figura 6.28 se hace un diagrama de la red equivalente con tres superficies, una de ellas rerradiante o *refractoria*.

En esta figura, la superficie rerradiante tiene la potencia emisiva E_3 que “flota” entre las potencias emisivas E_{b1} y E_{b2} a un nivel que depende de las magnitudes de E_{b1} y E_{b2} , tanto como de las resistencias involucradas en el circuito equivalente. El intercambio de energía entre A_1 y A_2 incluye la que pasa directamente a través de la resistencia $1/A_1 F_{1-2}$ y la que toma el camino paralelo a A_3 y luego a A_2 a través de la resistencia equivalente $1/A_1 F_{1-3} + 1/A_2 F_{2-3}$. En consecuencia, se puede expresar la energía radiante neta en la forma

$$q_{1-2} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{R_{\text{equiv}}}$$

en donde la resistencia equivalente para el caso paralelo está dada por

$$\frac{1}{R_{\text{equiv}}} = A_1 F_{1-2} + \frac{1}{1/A_1 F_{1-3} + 1/A_2 F_{2-3}}$$

Ahora se puede expresar el intercambio neto entre A_1 y A_2 en la forma

$$q_{1-2} = A_1 \left[F_{1-2} + \frac{A_2 F_{2-3} F_{1-3}}{A_1 F_{1-3} + A_2 F_{2-3}} \right] (E_{b1} - E_{b2}) \quad (6-99)$$

o, en forma más sencilla, como

$$q_{1-2} = A_1 \bar{F}_{1-2} (E_{b1} - E_{b2}) \quad (6-100)$$

El símbolo F_{1-2} de la ecuación (6-100) remplace el término en corchetes de la ecuación anterior, que es un factor de vista modificado e incluye el efecto de una superficie rerradiante entre las dos superficies negras que intercambian energía radiante. En la figura 6.22 se muestran los valores de F_{1-2} para cuatro casos de superficies planas paralelas opuestas, dados por las curvas designadas por 5, 6, 7 y 8.

6.5 INTERCAMBIO DE ENERGIA RADIANTE ENTRE SUPERFICIES ISOTERMICAS GRISES

Ahora se pretende describir el intercambio radiante entre superficies no negras. En este análisis se empleará el concepto del cuerpo gris, presentado anteriormente. En el caso de un cuerpo gris, todas las emisiones y reflexiones son difusas, y se considera que las propiedades superficiales son independientes de la longitud de onda.

6.5-1 Radiosidad e irradiación

La consideración adicional de las reflexiones en el caso de superficies no negras implica mucha complejidad en los cálculos del intercambio de energía. Dos cantidades útiles para describir tales cambios son la *radiosidad* y la *irradiación*.

La radiosidad, cuyo símbolo es J , es la energía radiante total por unidad de tiempo y por unidad de área que abandona una superficie. La irradiación, cuyo símbolo es una G , es la razón a la que la energía radiante llega a una superficie por unidad de tiempo por unidad de área. Se puede pensar que estas dos cantidades son flujos, generalmente expresados en unidad de Btu por pie cuadrado.

La figura 6.29 muestra un elemento de superficie que intercambia energía radiante con su medio. Al considerar una frontera hipotética a , justo fuera de la superficie, la razón neta de ganancia de energía por la superficie está dada por

$$\left. \frac{q}{A} \right|_{\text{neta}} = G(T_s) - J(T_A, T_s) \quad (6-101)$$

en donde la notación funcional indica que la energía incidente es característica de T_s , la temperatura de su medio ambiente, y la energía que sale es característica tanto de la temperatura T_A superficial como la del medio ambiente, T_s .

Una segunda forma de considerarlo lo representa la frontera hipotética designada por b en la figura, que está inmediatamente por debajo de la superficie de que se trata. Con esta frontera de referencia, la *ganancia* neta de energía de esta superficie está representada como

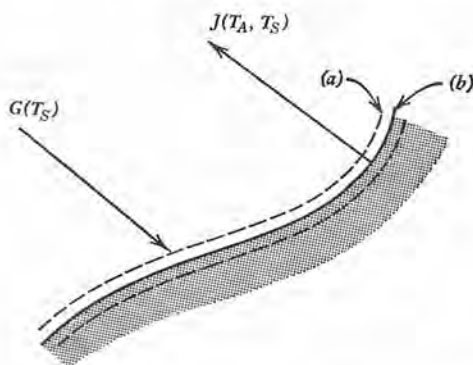


Figura 6.29 Elemento de superficie intercambiando energía radiante con su medio ambiente.

$$\left. \frac{q}{A} \right|_{\text{net}} = \alpha(T_A, T_s)G(T_s) - E(T_A) \quad (6-102)$$

donde la notación funcional que involucra T_A y T_s es como antes; $\alpha(T_A, T_s)$ es la absorptividad espectral semiesférica que se discutió en la sección 6.2-2.3. En adelante, todas las propiedades expresadas en esta sección serán las espectrales, semiesféricas.

Se puede emplear cualquiera de las dos ecuaciones (6-101) o (6-102) para evaluar el flujo radiante neto en una superficie. Se pueden igualar estas expresiones para representar la radiosidad en función de la irradiación y viceversa, lo que para una superficie opaca en que $\alpha + \rho = 1$, da

$$J(T_A, T_s) = \rho(T_A, T_s)G(T_s) + \varepsilon(T_A)E_b(T_A) \quad (6-103)$$

o sea

$$G(T_s) = \frac{J(T_A, T_s) - \varepsilon(T_A)E_b(T_A)}{\rho(T_A, T_s)} \quad (6-104)$$

Ahora se puede emplear la ecuación (6-104) junto con la ecuación (6-101) para expresar $q/A|_{\text{net}}$ en función de J y E_b de acuerdo con

$$\begin{aligned} \left. \frac{q}{A} \right|_{\text{net}} &= \frac{J(T_A, T_s) - \varepsilon(T_A)E_b(T_A)}{\rho(T_A, T_s)} - J(T_A, T_s) \\ &= \frac{[1 - \rho(T_A, T_s)]}{\rho(T_A, T_s)} J(T_A, T_s) - \frac{\varepsilon(T_A)}{\rho(T_A, T_s)} E_b(T_A) \end{aligned} \quad (6-105)$$

En el caso de una superficie opaca, $\alpha + \rho = 1$, y esta expresión queda

$$\left. \frac{q}{A} \right|_{\text{net}} = \frac{\alpha(T_A, T_s)}{\rho(T_A, T_s)} J(T_A, T_s) - \frac{\varepsilon(T_A)}{\rho(T_A, T_s)} E_b(T_A) \quad (6-106)$$

y, finalmente, usando la ley de Kirchhoff, se obtiene

$$\left. \frac{q}{A} \right|_{\text{neta}} = \frac{\varepsilon(T_A, T_s) J(T_A, T_s) - \varepsilon(T_A) E_b(T_A)}{\rho(T_A, T_s)} \quad (6-107)$$

La notación funcional empleada en estas expresiones pueden ser algo confusa por el momento. Considerar un caso específico puede ser útil para aclarar la naturaleza de todos los términos.

6.5-2 Intercambio radiante entre superficies infinitas, paralelas, grises isotérmicas

En la figura 6.30 se representa el sistema de dos superficies infinitas, paralelas, grises, cada una a temperatura constante.

La radiosidad J_1 es la suma de todos los términos de la energía mostrados como flechas que salen de la superficie 1 en (a) y (b) de la figura 6.30. En el (a) de la figura se da la energía total que sale de la superficie 1 debido a la que se origina en 1. Esta suma es una serie infinita de la forma

$$E_1(T_1)[1 + \rho_1(T_1, T_2)\rho_2(T_2, T_1) + \rho_1^2(T_1, T_2)\rho_2^2(T_2, T_1) + \dots]$$

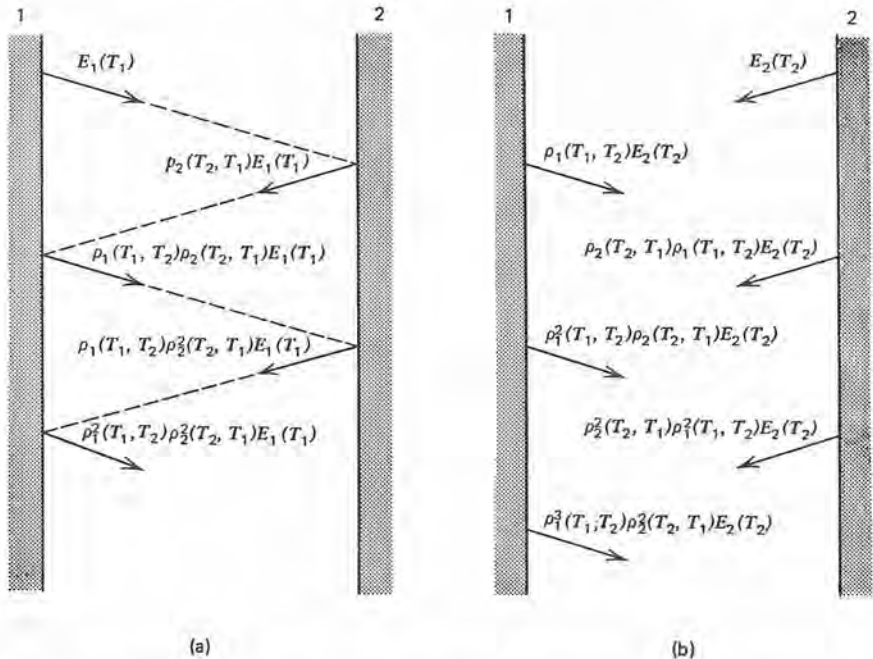


Figura 6.30 Intercambio radiante entre superficies grises infinitas, paralelas, isotérmicas. a) Energía originada en la superficie uno. b) Energía originada en la superficie 2.

que se puede expresar como

$$\frac{E_1(T_1)}{1 - \rho_1(T_1, T_2)\rho_2(T_2, T_1)}$$

En forma análoga, la energía que sale de la superficie 1, resultado de $E_2(T_2)$, la que se origina en la superficie 2, se encuentra sumando las cantidades en (b) de la figura, lo que da

$$\frac{\rho_1(T_1, T_2)E_2(T_2)}{1 - \rho_1(T_1, T_2)\rho_2(T_2, T_1)}$$

La suma de estos dos términos es la radiosidad de 1; en consecuencia, se puede escribir

$$J_1(T_1, T_2) = \frac{E_1(T_1) + \rho_1(T_1, T_2)E_2(T_2)}{1 - \rho_1(T_1, T_2)\rho_2(T_2, T_1)} \quad (6-108)$$

Sustituyendo la ecuación (6-108) en la (6-107) se obtiene

$$\frac{q}{A} \Big|_{\text{neta,1}} = \frac{\varepsilon_1(T_1, T_2)}{\rho_1(T_1, T_2)} \left[\frac{E_1(T_1) + \rho_1(T_1, T_2)E_2(T_2)}{1 - \rho_1(T_1, T_2)\rho_2(T_2, T_1)} \right] - \frac{\varepsilon_1(T_1)E_{b1}(T_1)}{\rho_1(T_1, T_2)} \quad (6-109)$$

para la ganancia neta de la superficie 1.

Determinadas suposiciones, compatibles con el concepto del cuerpo gris, permiten simplificar la ecuación (6-109). Ellas son

$$\alpha_1(T_1, T_2) = \varepsilon_1(T_1, T_2) = \varepsilon_1(T_1) \quad (6-110a)$$

$$\alpha_2(T_2, T_1) = \varepsilon_2(T_2, T_1) = \varepsilon_2(T_2) \quad (6-110b)$$

$$1 - \rho_1(T_1, T_2) = \varepsilon_1(T_1) \quad (6-110c)$$

$$1 - \rho_2(T_2, T_1) = \varepsilon_2(T_2) \quad (6-110d)$$

Las primeras dos expresiones anteriores establecen que las propiedades de absorción y emisión de una superficie son funciones de la temperatura de esa superficie solamente. Las dos últimas expresiones relacionan este concepto con la propiedad reflectiva que se aplica a las superficies opacas. Hottel⁹ y Wiebelt¹⁰ discuten esta suposición y las inexactitudes involucradas. Con la inclusión de estas suposiciones de simplicidad, la expresión para el intercambio radiante neto entre superficies infinitas, paralelas, grises isotérmicas queda como

⁹Hottel, op. cit.

¹⁰Wiebelt, op. cit.

$$\frac{q}{A} \Big|_{\text{neta},1} = \frac{E_{b1}(T_1) - E_{b2}(T_2)}{\frac{1}{\varepsilon_1(T_1)} + \frac{1}{\varepsilon_2(T_2)} - 1} \quad (6-111)$$

6.5-3 Intercambio radiante entre superficies grises finitas isotérmicas

Ahora se pueden extender los resultados de la sección anterior para incluir factores geométricos cuando las superficies consideradas tienen extensión finita. En la figura 6.31 aparecen mostrados los términos que se deben considerar en un enfoque semejante en este problema. Solamente se muestran algunos de ellos; la diferencia obvia entre éste y el caso paralelo infinito es la inclusión de áreas y factores de vista entre las superficies consideradas. Obviamente, el análisis completo sería bastante complicado

En la siguiente sección se presenta otro enfoque mucho más sencillo, directo y general.

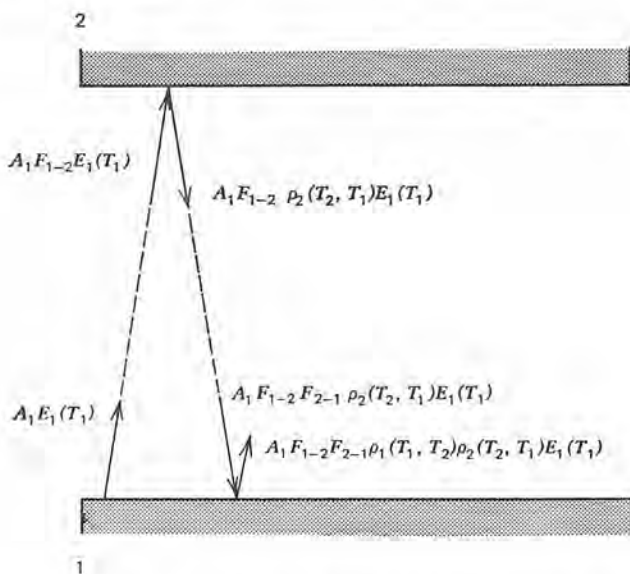


Figura 6.31 Intercambio radiante entre superficies isotérmicas grises, finitas.

6.5-4 Intercambio radiante entre superficies isotérmicas grises: el enfoque de la analogía eléctrica

Anteriormente se consideraron analogías eléctricas para el intercambio entre superficies en un entorno negro. Es posible emplear el mis-

mo concepto en el caso de superficies grises, con la consideración adicional de la emisividad superficial.

Con las suposiciones de simplificación dadas por las ecuaciones (6-110), la ganancia neta de flujo de calor de una superficie, expresada por la ecuación (6-107), queda en la forma

$$\frac{q}{A} \Big|_{\text{neto}} = \frac{\varepsilon}{\rho} [J - E_b] \quad (6-112)$$

Esta expresión, junto con las ecuaciones (6-79) y (6-98), permite resolver muchos problemas con relativa facilidad.

Como un ejemplo inicial, considere el caso de dos planos infinitos, paralelos, grises isotérmicos. Suponiendo que $T_1 > T_2$, de manera que la transferencia neta de energía va de la superficie 1 a la superficie 2, se tiene

$$\begin{array}{ll} \text{Razón de la pérdida de energía} & \frac{q}{A} \Big|_1 = \frac{\varepsilon_1}{\rho_1} (E_{b1} - J_1) \\ \text{de la superficie 1:} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Razón del intercambio de} & \frac{q}{A} \Big|_{1-2} = F_{1-2} (J_1 - J_2) \\ \text{energía entre 1 y 2:} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Razón de la ganancia de la} & \frac{q}{A} \Big|_2 = \frac{\varepsilon_2}{\rho_2} (J_2 - E_{b2}) \\ \text{energía por la superficie 2:} & \end{array}$$

Ya que $(q/A)_1 = (q/A)_{1-2} = (q/A)_2 = (q/A)_{\text{neto}}$, se pueden obtener los valores correspondientes a las fuerzas motrices respectivas

$$E_{b1} - J_1 = \frac{q}{A} \Big|_{\text{neto}} \frac{\rho_1}{\varepsilon_1}$$

$$J_1 - J_2 = \frac{q}{A} \Big|_{\text{neto}} \frac{1}{F_{1-2}}$$

$$J_2 - E_{b2} = \frac{q}{A} \Big|_{\text{neto}} \frac{\rho_2}{\varepsilon_2}$$

y, sumando, se obtiene

$$E_{b1} - E_{b2} = \frac{q}{A} \Big|_{\text{neto}} \left[\frac{\rho_1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{F_{1-2}} + \frac{\rho_2}{\varepsilon_2} \right]$$

Finalmente,

$$\frac{q}{A} \Big|_{\text{neto}} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{\rho_1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{F_{1-2}} + \frac{\rho_2}{\varepsilon_2}}$$

En las expresiones anteriores se ha suprimido toda la notación funcional; persiste la dependencia usual en T_1 y T_2 .

En el caso de planos paralelos infinitos, $F_{1-2} = 1$, con lo que esta expresión se reduce a la ecuación (6-111).

$$\left. \frac{q}{A} \right|_{\text{neta}} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} \quad (6-111)$$

Generalizar las ecuaciones (6-96) y (6-112) conduce a una analogía entre las cantidades térmicas y eléctricas, en donde la razón del flujo de calor y la corriente son cantidades comunes, la diferencia de potencial eléctrico (voltaje) es análogo a $E_b - J$ o sea ΔJ , y la resistencia térmica equivalente es $\rho/A\epsilon$ para una superficie y $1/A_1 F_{1-2}$ para el intercambio entre superficies. En la figura 6.32 se muestra la red eléctrica equivalente para el problema de planos infinitos.

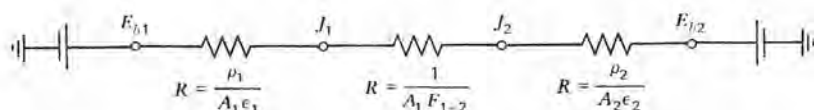


Figura 6.32 Circuito eléctrico equivalente para el intercambio de energía radiante entre planos paralelos isotérmicos grises de extensión infinita.

En la figura 6.33 se muestra la red eléctrica equivalente para el caso de un entorno formado por tres superficies grises, para (a) las tres superficies isotérmicas radiantes, absorbentes y (b) una superficie no conductora y rerradiante.

Comparando la figura 6.33 contra las figura 6.27(a) y 6.28 se encuentra que las consideraciones anteriores fueron solamente casos especiales del caso mostrado arriba. Para las superficies negras, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 1$ y $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$, y los circuitos mostrados en la figura 6.33 quedan como los que se consideraron anteriormente.

Ahora se considera un ejemplo cuantitativo empleando estos conceptos.

Ejemplo 6.11

Se mantiene a dos discos paralelos de 5 ft de diámetro a una distancia de 5 ft y a temperaturas uniformes respectivas de 1040°F y 540°F. Determinar la razón neta de pérdida de calor del disco que está a mayor temperatura si

- el medio ambiente es negro a 0°R.
- hay una superficie rerradiante que se extiende entre las dos placas.

Las emisividades de las dos superficies de los discos son de 0.6 y 0.8 respectivamente. La figura 6.34 se aplica tanto a a) como a b). Las resistencias mostradas tienen los valores que siguen:

$$R_1 = 1/A_1 F_{1-3} = 1 / \frac{\pi}{4} (5 \text{ ft})^2 (0.82) = 0.062$$

$$R_2 = 1/A_2 F_{2-3} = 1 / \frac{\pi}{4} (5 \text{ ft})^2 (0.82) = 0.062$$

$$R_3 = 1/A_1 F_{1-2} = 1 / \frac{\pi}{4} (5 \text{ ft})^2 (0.18) = 0.283$$

$$R_4 = \rho_1/A_1 \epsilon_1 = 0.4 / \frac{\pi}{4} (5 \text{ ft})^2 (0.6) = 0.034$$

$$R_5 = \rho_2/A_2 \epsilon_2 = 0.2 / \frac{\pi}{4} (5 \text{ ft})^2 (0.8) = 0.013$$

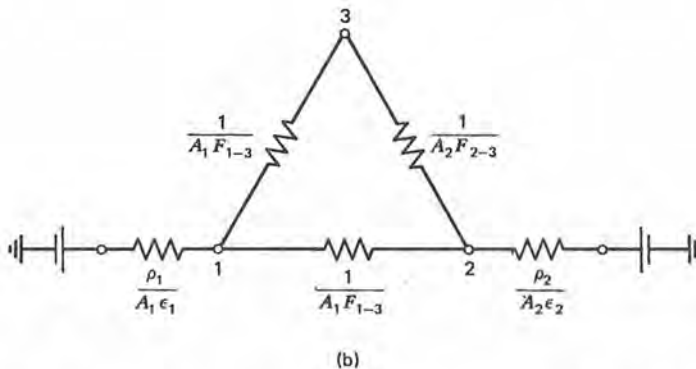
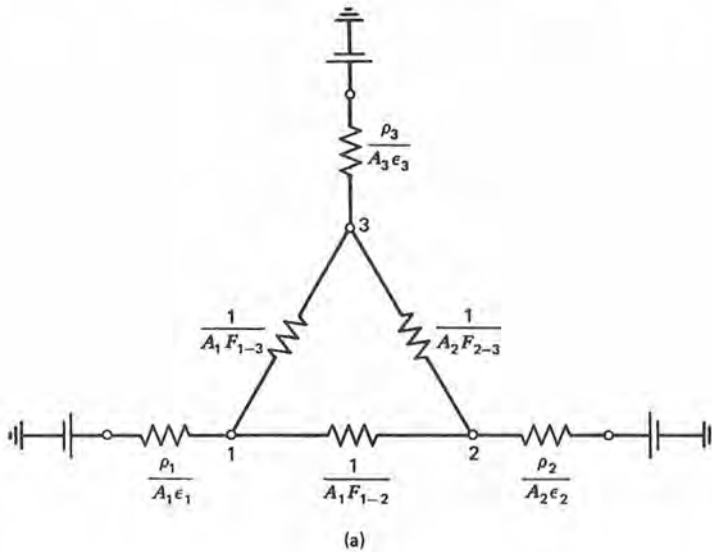


Figura 6.33 Circuitos eléctricos análogos para el intercambio de energía radiante en un entorno formado por tres superficies grises isotérmicas.

Para el caso de pérdida de calor al medio ambiente, se aplica la figura 6.34(a). El análisis requiere escribir tres ecuaciones de "mallas" para las porciones del circuito designadas por ①, ② y ③. Las flechas muestran las direcciones supuestas del flujo de la corriente (o sea el calor). Las siguientes son las ecuaciones de malla aplicables:

$$\text{Malla ①: } E_{b1} - E_{b3} = I_1 R_4 + (I_1 + I_3) R_1$$

$$\text{Malla ②: } E_{b2} - E_{b3} = I_2 R_5 + (I_2 - I_3) R_2$$

$$\text{Malla ③: } 0 = I_3 R_3 + (I_3 + I_1) R_1 + (I_3 - I_2) R_2$$

Sustituyendo valores numéricos para E_{b1} , E_{b2} y E_{b3} y las resistencias, se tiene

$$8690 = 0.034 I_1 + 0.062(I_1 + I_3)$$

$$1714 = 0.013 I_2 + 0.062(I_2 - I_3)$$

$$0 = 0.283 I_3 + 0.062(I_1 + I_3) + 0.062(I_2 - I_3)$$

La solución de estas tres ecuaciones algebraicas simultáneas da

$$I_1 = 10.59 \times 10^4 \text{ Btu/hr}$$

$$I_2 = 0.317 \times 10^4 \text{ Btu/hr}$$

$$I_3 = -2.38 \times 10^4 \text{ Btu/hr}$$

La respuesta buscada, la pérdida neta de calor del disco de mayor temperatura, es I_1 , cuyo valor es $10.59 \times 10^4 \text{ Btu/hr}$.

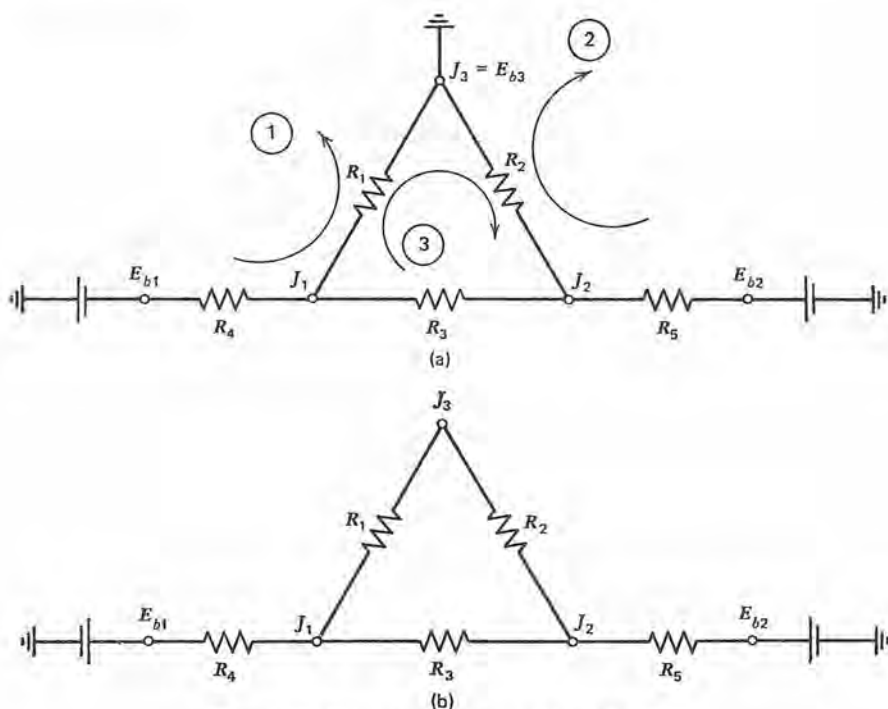


Figura 6.34 Circuito análogo para el ejemplo 6.11.

Cuando los discos 1 y 2 están separados por una superficie 3 no absorbente, rerradiante, se simplifica el cálculo de la solución. La resistencia equivalente de la porción paralela del circuito mostrado en la figura 6.34(b) se evalúa como

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_{\text{equiv}}} &= \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1 + R_2} \\ &= \frac{1}{0.283} + \frac{1}{0.062 + 0.062} = 11.60\end{aligned}$$

o

$$R_{\text{equiv}} = 1/11.60 = 0.086$$

En consecuencia, la resistencia total entre las superficies 1 y 2 es

$$\begin{aligned}\sum R &= R_4 + R_{\text{equiv}} + R_5 \\ &= 0.034 + 0.086 + 0.013 = 0.133\end{aligned}$$

Ahora se encuentra que la pérdida neta de calor de la superficie a mayor temperatura es

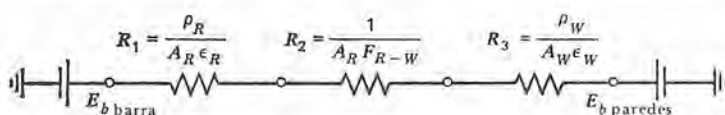
$$\begin{aligned}q_{\text{net}} &= \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\sum R} \\ &= \frac{8690 - 1714}{0.133} = 52,500 \text{ Btu/hr}\end{aligned}$$

Lo que es aproximadamente 50% de la pérdida calculada en (a).

Se debe notar que en ambos casos hay una transferencia neta de energía al disco más frío; sin embargo, la razón cuando hay una superficie rerradiante es más de 17 veces mayor que cuando la energía se radia a un medio ambiente negro a 0°R .

Ejemplo 6.12

Se emplea una barra cilíndrica como calefactor; su diámetro es de 2 in, su emisividad efectiva es de 0.7 y se mantiene a 1640°F por efecto de calentamiento de una resistencia eléctrica. Las paredes de la habitación en que está colocada la barra de calefacción están a 60°F con emisividad efectiva de 0.6. Determinar la energía que se debe proporcionar por pie de longitud de barra a la barra (a) bajo las condiciones enunciadas y (b) si se coloca un reflector aislado, semicircular de 18 in. de diámetro en la forma mostrada con relación a la barra. Para el caso de la barra sin el reflector, el circuito equivalente es



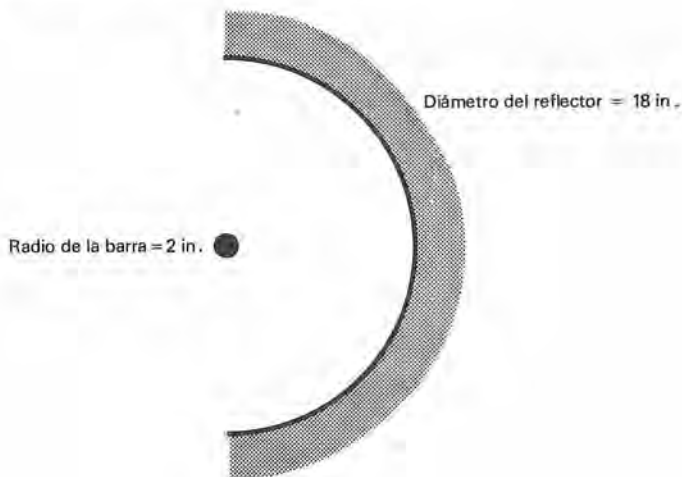


Figura 6.35 Pérdida de calor radiante de una barra circular de calentamiento.

Las potencias de emisión y resistencias térmicas tienen los siguientes valores

$$E_{b \text{ barra}} = \sigma T_R^4 = 0.173 \left(\frac{2100}{100} \right)^4 = 3.36 \times 10^4$$

$$E_{b \text{ paredes}} = \sigma T_w^4 = 0.173 \left(\frac{520}{100} \right)^4 = 126$$

$$R_1 = \frac{\rho_R}{A_R \epsilon_R} = \frac{0.3}{\pi \left(\frac{2}{12} \right) (0.7)} = 0.819$$

$$R_2 = \frac{1}{A_R F_{R-w}} = \frac{1}{\pi \left(\frac{2}{12} \right) (1)} = 1.91$$

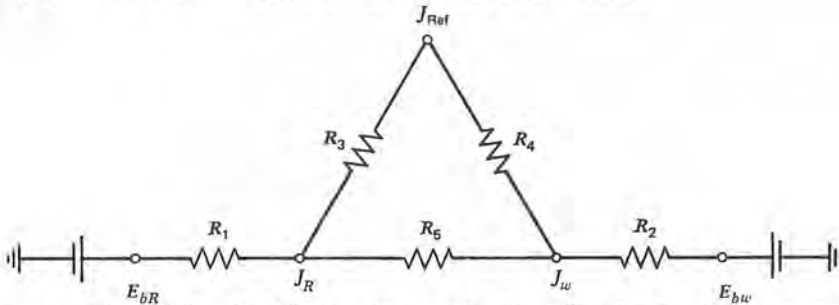
$$R_3 = \frac{\rho_w}{A_w \epsilon_w} \cong 0$$

La pérdida de calor radiante de la barra desnuda es

$$q = \frac{E_{bR} - E_{bw}}{\sum R} = \frac{3.36 \times 10^4 - 126}{2.729}$$

$$= 12,270 \frac{\text{Btu}}{\text{hr}} \text{ por pie}$$

En presencia del reflector rerradiante, el circuito equivalente es



Las potencias emisivas de la barra y las paredes tienen los mismos valores que antes. Las resistencias térmicas son como sigue

$$R_1 = \frac{\rho_R}{A_R \epsilon_R} = 0.819$$

$$R_2 = \frac{\rho_w}{A_w \epsilon_w} \cong 0$$

$$R_3 = \frac{1}{A_R F_{R-\text{ref}}} = \frac{1}{\pi \left(\frac{2}{12} \right) (0.5)} = 3.82$$

$$R_4 = \frac{1}{A_{\text{ref}} F_{\text{ref}-w}}$$

Con el fin de evaluar $F_{\text{ref}-w}$, se puede emplear el teorema de la reciprocidad, donde se puede considerar que las paredes son un plano equivalente que cubre la parte de la abertura hacia el medio ambiente que no apunta a la barra de calefacción. Los términos aplicables son

$$A_{\text{ref}} F_{\text{ref}-w} = A_w F_{w-\text{ref}}|_{\text{equiv}}$$

y, ya que $F_{w-\text{ref}}|_{\text{equiv}} = 1$, se puede remplazar el producto $A_{\text{ref}} F_{\text{ref}-w}$ por $A_w|_{\text{equiv}}$, con lo que la resistencia R_4 resulta ser

$$R_4 = \frac{1}{A_{\text{ref}} F_{\text{ref}-w}} = \frac{1}{A_w|_{\text{equiv}}} = \frac{1}{\left(\frac{18-2}{12} \right)} = 0.75$$

$$R_5 = \frac{1}{A_R F_{R-w}} = \frac{1}{\pi \left(\frac{2}{12} \right) (0.5)} = 3.82$$

Ahora se calcula el valor de la resistencia térmica total, que da

$$\begin{aligned} R &= R_1 + R_2 + \frac{1}{\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_3 + R_4}} \\ &= 0.818 + 0 + \frac{1}{\frac{1}{3.82} + \frac{1}{4.57}} = 2.90 \end{aligned}$$

Luego se puede determinar la pérdida neta de calor de la barra de calefacción,

$$q_{\text{neta}} = \frac{E_{\text{br}} - E_{\text{bw}}}{\sum R'} = \frac{3.36 \times 10^4 - 126}{2.90} \\ = 11,540 \text{ Btu/hr por pie}$$

En este caso se ve que la presencia del reflector afecta la pérdida total de calor en aproximadamente 6%. Sin embargo, la energía se concentra enfrente del reflector en el segundo caso, de manera que se percibe un mayor flujo radiante por cualquier persona que esté parada en el camino de la energía radiante cuando está presente el reflector.

6.5-5 Intercambio radiante de energía entre superficies grises: Solución numérica

El problema del intercambio de energía entre un gran número de superficies se hace muy tedioso incluso cuando se introducen algunos enfoques de simplificación tales como la analogía eléctrica.

Si se puede considerar como isotérmica a cada una de las superficies involucradas, con propiedades constantes, se puede escribir una expresión para la energía neta a cada una de las superficies. La solución simultánea a tal conjunto de ecuaciones es factible para una computadora digital, empleando las técnicas iterativas como se han considerado anteriormente.

Para toda superficie i en un entorno de N superficies en totales, se expresa la radiosidad J_i de acuerdo con la ecuación (6-103), en la forma

$$J_i = \rho_i G_i + \varepsilon_i E_{bi} \quad (6-103)$$

En ésta y las expresiones siguientes no se emplea la notación funcional; se supone que $\rho_i = \rho_i(T_i)$, $\alpha_i = \varepsilon_i$ y T_i es constante en i .

La irradiación de i es una función de la energía radiada desde cada superficie k en el sistema que tiene una vista de la superficie i . Se puede escribir la expresión

$$G_i = \frac{1}{A_i} \sum_{k=1}^N J_k F_{ki} A_k \quad (6-113)$$

para G_i , o, usando la reciprocidad, $A_k F_{ki} = A_i F_{ik}$, se puede describir lo anterior en la forma equivalente como

$$G_i = \frac{1}{A_i} \sum_{k=1}^N J_k F_{ik} A_i \quad (6-114)$$

Finalmente, cancelando A_i se tiene

$$G_i = \sum_{k=1}^N J_k F_{ik} \quad (6-115)$$

Ahora se puede sustituir la ecuación (6-115) en la ecuación (6-103) para obtener, para J_i

$$J_i = \rho_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N J_k F_{ik} + \rho_i J_i F_{ii} + \varepsilon_i E_{bi} \quad (6-116)$$

en donde se ha separado del resto de la sumatoria la irradiación propia de la superficie i , que involucra F_{ii} ,

Ahora se puede obtener el valor de J_i

$$J_i(1 - \rho_i F_{ii}) = \rho_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N J_k F_{ik} + \varepsilon_i E_{bi}$$

y, finalmente,

$$J_i = \frac{\rho_i}{1 - \rho_i F_{ii}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N J_k F_{ik} + \frac{\varepsilon_i}{1 - \rho_i F_{ii}} E_{bi} \quad (6-117)$$

Las ecuaciones (6-117) para J_i , y (6-115) para G_i , junto con la ecuación (6-101) para $q/A|_{\text{neta}}$ recibida por la superficie i ,

$$\left. \frac{q}{A} \right|_{\text{neta}} = G_i - J_i \quad (6-101)$$

constituyen el conjunto necesario para la solución iterativa.

Antes de seguir adelante se debe notar lo que ocurre en el caso de una superficie rerradiante. Para una superficie no conductora, rerradiante j , $q/A|_{\text{neta},j} = 0$, y de acuerdo con la ecuación (6-101),

$$G_j = J_j$$

Por tanto, la ecuación (6-103) requiere que

$$J_j = G_j = \frac{\varepsilon_j}{1 - \rho_j} E_{bj}$$

que, ya que $1 - \rho_j = \varepsilon_j$, se reduce a

$$J_j = G_j = E_{bj} = \sigma T_j^4 \quad (6-118)$$

Ahora se preparan las ecuaciones para resolverlas numéricamente. Por conveniencia, se definen los coeficientes B_i y C_i como sigue

$$B_i \equiv \frac{\varepsilon_i}{1 - \rho_i F_{ii}} E_{bi} \quad (6-119)$$

$$C_i \equiv \frac{\rho_i}{1 - \rho_i F_{ii}} \quad (6-120)$$

El conjunto de ecuaciones que pertenece a un problema de transferencia de calor por radiación con N superficies totales involucradas incluye las siguientes:

$$J_1 = B_1 + C_1[J_2F_{12} + J_3F_{13} + \cdots + J_NF_{1N}]$$

$$J_2 = B_2 + C_2[J_1F_{21} + J_3F_{23} + \cdots + J_NF_{2N}]$$

$$J_i = B_i + C_i[J_1F_{i1} + \cdots + J_{i-1}F_{i,i-1} + J_{i+1}F_{i,i+1} + \cdots + J_NF_{iN}]$$

$$J_N = B_N + C_N[J_1F_{N1} + J_2F_{N2} + \cdots + J_{N-1}F_{N,N-1}]$$

Este conjunto de N ecuaciones se resuelve por medio de la iteración de Gauss-Seidel. El procedimiento consiste en suponer valores para J_i , $i \neq 1$, y obtener el valor de J_1 . Con el nuevo valor de J_1 y los valores supuestos de J_i se obtiene la solución para J_2 . Este procedimiento se repite, usando los valores más recientes para J_i , hasta que se satisfaga algún criterio para la convergencia. En este caso, el criterio es el de algún límite para el error, en que se define al error como

$$\text{error} = QA/QE$$

Se definen las cantidades QA y QE en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} QE &\equiv \sum_{i=1}^N |Q_i| \\ &= \sum_{i=1}^N |(G_i - J_i)A_i| \\ QA &\equiv \left| \sum_{i=1}^N Q_i \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^N (G_i - J_i)A_i \right| \end{aligned}$$

que se hacen iguales a cero para una solución exacta.

El siguiente ejemplo sencillo ilustra la técnica de la solución por iteración.

Ejemplo 6.13

Considere un entorno cúbico con dos paredes opuestas que se mantienen a 1260°R y 540°R ; las otras paredes laterales son superficies rerradiantes. Las emisividades de las paredes de alta y baja temperaturas son 0.57 y 0.67 respectivamente. Suponiendo que no hay medio absorbente dentro del entorno, determinar el flujo neto de energía radiante en las superficies fuente y sumidero. También determinar la temperatura de las paredes laterales.

Para este caso muy sencillo, se puede resolver el problema estableciendo una tabla para llevar cuenta de las cantidades calculadas. Se calculan tres zonas: A_1 designa la superficie a 1260°R , A_2 designa las paredes rerradiantes y A_3 designa el sumidero a 540°R . Inicialmente se supone que los valores de J_2 y J_3 son de 2000 Btu/hr-ft^2 y 1000 Btu/hr-ft^2 , respectivamente. Se usa la siguiente tabla para llevar cuenta de las cantidades conforme se calculan.

Después de cinco iteraciones, los valores de J_i , G_i y q/A_{Alneta} están dados por

Superficie	J_i	G_i	q/A_{Alneta}
1	3224	1718	-1506
2	2056	2056	0
3	889	2395	+1506

El calor neto que sale de la superficie 1 y el absorbido por la superficie 3 son iguales, y tienen el valor de 1506 Btu/hr-ft².

Se determina que la temperatura de las paredes rerradiantes a partir de la ecuación (6-118) es igual a

$$T_2^4 = \frac{J_2}{100} = \frac{2056}{0.173 \times 10^{-8}} = 11884 \times 10^8$$

lo que da

$$T_2 = 1044^\circ\text{R} = 584^\circ\text{F}$$

En el ejemplo 6.13 se conjuntaron las superficies rerradiantes dentro de una sola "zona" para fines analíticos. Obviamente, el enfoque de una sola zona, en que se supone que toda la zona rerradiante está a una sola temperatura, es una simplificación muy absurda. La temperatura en el extremo caliente de la zona 2 está cercana a 1260°R, y se aproxima a los 540°R en el extremo frío. En tanto que el enfoque de una sola zona puede bastar para muchos casos, hay otros para los que se requiere un modelo mucho más exacto. Por ejemplo, la situación descrita en el ejemplo 6.13 se puede desarrollar considerando a las paredes laterales como 2, 3 o cualquier número deseado de zonas, cada una a una temperatura constante. La figura 6.36 indica la naturaleza de configuraciones de 3, 4 y 5 zonas. Se requiere un enfoque iterativo para todo problema que involucre más de tres zonas.

Se pudo haber desarrollado el ejemplo anterior empleando la técnica de analogía eléctrica si así se hubiera deseado. La utilidad de la técnica iterativa es obvia cuando están involucradas muchas superficies. La computadora digital resulta ser la única herramienta práctica para resolver este problema, y el programa a emplear seguramente debe seguir los pasos descritos en esta sección.

Ejemplo 6.14

Considere otra vez el problema del entorno cúbico con paredes laterales rerradiantes y los extremos a 1260°R y 540°R respectivamente, analizado en el ejemplo 6.13. Nuevamente se trabaja en este problema, usando la computadora digital para los casos de

a) se suponen las paredes laterales a una sola temperatura constante (un problema de tres zonas)

Tabla para el ejemplo 6.13

Nodos	$\epsilon_1 = 0.57$ $\epsilon_3 = 0.67$		$\rho_1 = 0.43$ $\rho_3 = 0.33$		J_k	$J_k F_{ik}$	J_k	$J_k F_{ik}$	J_k	$J_k F_{ik}$	J_k	$J_k F_{ik}$
	F_{ik}	J_k	$J_k F_{ik}$	J_k								
1-2	0.71	2000	1420	2113	2073	1472	2062	1464	2056	1460		
1-3	0.29	1000	290	904	895	260	891	258	889	258		
		$\sum J_k F_{1k} = 1710$				1732		1722		1718		
		$\rho_1 \sum J_k F_{1k} = 735$				745		740		739		
		$\epsilon_1 E_{b1} = 2485$				2485		2485		2485		
		$J_1 = 3220$				3230		3225		3224		
2-1	0.1775	3220	572	3245	3230	573	3225	572	3224	572		
2-3	0.1775	1000	178	904	895	159	891	158	889	158		
		$\sum J_k F_{2k} = 150$				732		730		730		
		$J_2 = \frac{1}{0.355} \sum J_k F_{2k} = 2113$				2062		2056		2056		
3-1	0.29	3220	939	3245	3230	937	3225	935	3224	935		
3-2	0.71	2113	1500	2073	2062	1464	2056	1460	2056	1460		
		$\sum J_k F_{3k} = 2439$				2401		2395		2395		
		$\rho_3 \sum J_k F_{3k} = 805$				792		790		790		
		$\epsilon_3 E_{b3} = 99$				99		99		99		
		$J_3 = 904$				891		889		889		

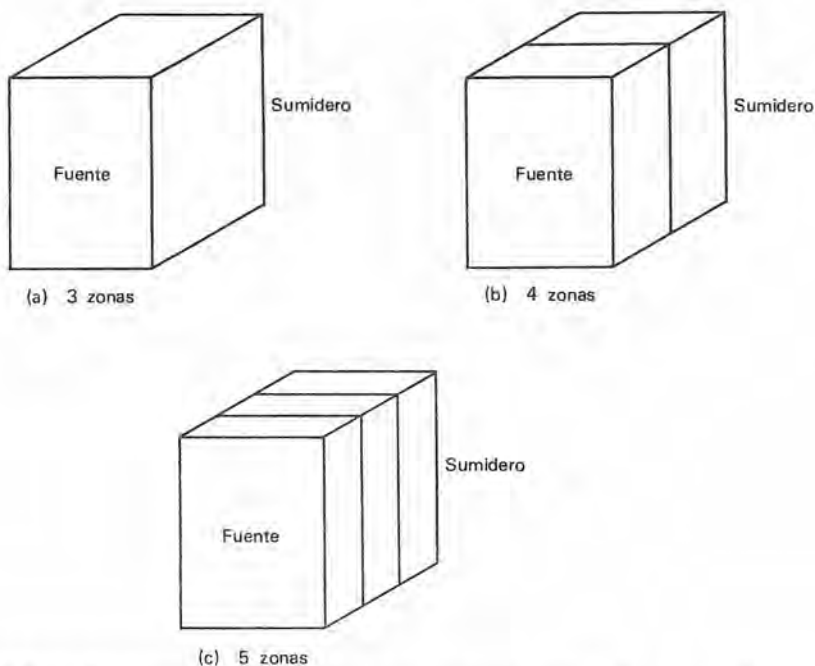


Figura 6.36 Configuraciones de 3, 4 y 5 zonas para un entorno rectangular con paredes externas radiantes y paredes laterales rerradiantes.

- b)* se toman las paredes laterales como constituídas por dos partes iguales, cada una a una sola temperatura constante (un problema de cuatro zonas).
- c)* Se consideran las paredes laterales como tres zonas isotérmicas iguales (un problema de cinco zonas).

En la figura 6.36 se ilustran las configuraciones correspondientes a *a)*, *b)* y *c)*. El caso *a)* es idéntico al resuelto manualmente en el ejemplo anterior. Los otros casos son más realistas, en donde la situación verdadera es que la temperatura de las paredes laterales se eleva continuamente desde la superficie de 540°R a 1260°R . Este sería un caso con un número infinito de zonas.

A continuación se presenta el diagrama de flujo (figura 6.37) y el listado del programa de computadora para este problema.

PROGRAMA RAD

```
C ESTE PROGRAMA CALCULA EL FLUJO DE CALOR POR RA-
C DIACION DE UNA CONFIGURACION DE N SUPERFICIES
C GRISES. TAMBIEN CALCULA LA TEMPERATURA DE CUAL-
C QUIER SUPERFICIE RERRADIANTE.
  DIMENSION F(9,9),E(9),T(9),A(9),RJ(9),G(9),R(9)
  DIMENSION EB(9),Q(9)
```

```

N=TTYIN(4HNUMB,4HER O,4HF SU,4HRFAC,4HES =)
DELTA=TTYIN(4HCONV,4HERGE,4HNCE ,4HCRIT,3H. =)
WRITE(61,100)
100 FORMAT(1H0,20X,12HVIEW FACTORS)
DO 10 I=1,N
WRITE(61,101)I,N
101 FORMAT(1H0,3H F(,11,19H,K) — K DE 1 A ,11)
READ(41,102)(F(I,J),J=1,N)
READ(41,105)E(I),A(I),T(I)
105 FORMAT(F6.4,F6.2,F7.2)
10 WRITE(61,99)(F(I,J),J=1,N)
99 FORMAT(1H0,5(F6.4,3X))
102 FORMAT(5F9.4)
WRITE(61,103)
103 FORMAT(1H-,4HNODE,3X,10HEMISIVIDAD. 3X,9HAREA SQFT,
13K,13HTEMPERATURA R)
DO 20 I=1,N
IF(E(I).EQ.0.0)GO TO 19
WRITE(61,106)I,E(I),A(I),T(I)
106 FORMAT(1H0,2X,11,6X,F6.4,7X,F6.2,7X,F7.2)
GO TO 20
19 WRITE(61,104)I,E(I),A(I)
104 FORMAT(1H0,2X,11,6X,F6.4,7X,F6.2,5X,11HRERRADIACION)
20 CONTINUE
C SUPOSICION INICIAL PARA RADIOSIDAD
DO 30 I=1,N
30 RJ(I)=1000.0
C CALCULAR REFLECTIVIDAD Y PODER EMISIVO DEL
C CUERPO NEGRO
DO 40 I=1,N
EB(I)=(1.73E-009)*T(I)**4.
40 R(I)=1.0-E(I)
C ITERAR PARA LA RADIOSIDAD
54 L=0
64 DO 50 I=1,N
SUM=0.0
DO 55 K=1,N
IF(K.EQ.I)GO TO 55
SUM=SUM+RJ(K)*F(I,K)
55 CONTINUE
50 RJ(I)=(E(I)*EB(I)+R(I)*SUM)/(1.0-R(I)*F(I,I))
L=L+1
IF(L.LT.5)GO TO 64
C VERIFICAR PARA LA CONVERGENCIA
DO 80 I=1,N
SUM1=0.0
DO 75 K=1,N
75 SUM1=SUM1+RJ(K)*F(I,K)

```



```

80 G(I)=SUMI
   QE=0.0
   QA=0.0
   DO 90 I=1,N
   D=G(I)-RJ(I)
   IF(E(I).EQ.0.0)GO TO 85
   QA=QA+D
   GO TO 90
85 QE=QE+ABS(D)
90 CONTINUE
   ERR=ABS(QA)+QE
   IF(ERR.GT.DELTA)GO TO 54
   DO 95 I=1,N
   Q(I)=G(I)-RJ(I)
   IF(E(I).NE.0.0)GO TO 95
   T(I)=((G(I)/.173)**.25)*100.0
95 CONTINUE
   WRITE(61,108)
103 FORMAT(/////5H NODO,3X,12HNET HT. FLUJO,3X,13HTEM-
   PERATURA R)
   DO 96 I=1,N
96 WRITE(61,109)I,Q(I),T(I)
109 FORMAT(1H0,1X,I1,7X,F9.2,6X,F7.2)
   END

```

La solución de computadora emplea las ecuaciones (6-117), (6-115) y (6-101) para determinar J_i , G_i , y q/A_{ineta} . Se especificaron los valores para la emisividad y reflectividad para las superficies no negras, y en cada caso se determinaron los factores de vista antes de iniciar la solución iterativa.

Las salidas para $a)$, $b)$ y $c)$ se muestran en su orden correspondiente. Note que los resultados para $a)$ son idénticos a los obtenidos a mano en el ejemplo 6.13, excepto que se logra mayor exactitud con la computadora ya que hay más cifras significativas.

NUMERO DE SUPERFICIES = 3

CONVERGENCIA CRIT. = .005

FACTORES DE VISTA

```

F(1,K) — K   DE  1  A  3
      0      .7100  .2900
F(2,K) — K   DE  1  A  3
.1775      .6450  .1775
F(3,K) — K   DE  1  A  3
.2900      .7100      0

```

NODO	EMISIVIDAD	AREA SQFT	TEMPERATURA R
1	.5700	1.00	1260.00
2	0	4.00	RERRADIANTE
3	.6700	1.00	540.00

NODO	FLUJO NET CAL	TEMPERATURA R
1	-1506.20	1260.00
2	.00	1044.18
3	1506.20	540.00

NUMERO DE SUPERFICIES = 4

CONVERGENCIA CRIT. = .005

FACTORES DE VISTA

F(1,K) — K	DE	1	A	4
0	.5200	.2900	.1900	
F(2,K) — K	DE	1	A	4
.2600	.4800	.0950	.1650	
F(3,K) — K	DE	1	A	4
.2900	.1900	0	.5200	
F(4,K) — K	DE	1	A	4
.0950	.1650	.2600	.4800	

NODO	EMISIVIDAD	AREA SQFT	TEMPERATURA R
1	.5700	1.00	1260.00
2	0	2.00	RERRADIANTE,
3	.6700	1.00	540.00
4	0	2.00	RERRADIANTE

NODO	FLUJO NET CAL	TEMPERATURA R
1	-1453.31	1260.00
2	.00	1079.89
3	1453.31	540.00
4	-0.00	1006.34

NUMERO DE SUPERFICIES = 5

CONVERGENCIA CRIT. = .005

FACTORES DE VISTA

F(1,K) — K	DE	1	A	5
0	.4600	.2900	.2320	.0180
F(2,K) — K	DE	1	A	5
.3450	.3100	.0135	.1710	.1605
F(3,K) — K	DE	1	A	5
.2900	.0180	0	.2320	.4600
F(4,K) — K	DE	1	A	5
.1740	.1710	.1740	.3100	.1710
F(5,K) — K	DE	1	A	5
.0135	.1605	.3450	.1710	.3100

NODO	EMISIVIDAD	AREA SQFT	TEMPERATURA R
1	.5700	1.00	1260.00
2	0	1.33	RERRADIANTE

3	.6700	1.00	540.00
4	0	1.33	RERRADIANTE
5	0	1.33	RERRADIANTE

NODO	FLUJO NET CAL	TEMPERATURA R
1	-1387.66	1260.00
2	.00	1102.50
3	1387.66	540.00
4	.00	1046.14
5	0	978.84

Cuando se tratan las paredes laterales en forma más realista, como en *b)* y *c)*, se ve que el flujo neto de calor disminuye. Una solución exacta para el flujo neto de calor requiere que se emplee un número infinito de zonas. Hay que tomar en cuenta que al considerar al muro como tres zonas isotérmicas en lugar de una reduce el flujo neto de calor en casi 8%.

6.6 INTERCAMBIO DE ENERGIA RADIANTE EN PRESENCIA DE GASES ABSORBENTES Y RERRADIANTES

Hasta ahora, al considerar el intercambio radiante se ha despreciado la participación de los medios gaseosos que pueden estar presentes entre las superficies. Las moléculas de gas contienen bandas de energía asociadas con niveles permitidos de energía debidos al movimiento rotacional y vibratorio. Parte de la energía incidente en una molécula de gas se absorbe, bajo la condición de que las frecuencias de la energía incidente correspondan a las de los estados permitidos dentro de la molécula. En forma análoga, toda energía emitida por un gas está en frecuencias discretas conforme los niveles de energía cambian entre los estados permitidos.

Se puede ver que la emisión de energía de un sólido comprende un espectro de frecuencias continuas. Por otra parte, la emisión y absorción gaseosa está restringida a bandas de frecuencias características de los niveles permitidos de energía para cualquier gas que esté presente. La figura 6.38 muestra las bandas de emisión y absorción para el vapor de agua y el bióxido de carbono a 2000°R.

Se pueden considerar determinados tipos de moléculas gaseosas como transparentes por lo que respecta a la radiación térmica. Estos gases incluyen a los inertes tales como el argón y el neón y aquellos con moléculas diatómicas simétricas tales como el oxígeno, nitrógeno e hidrógeno. Se ve que el aire es esencialmente transparente.

Las moléculas gaseosas que son asimétricas, tales como el monóxido de carbono, y los gases poliatómicos tales como el dióxido de carbono, el vapor de agua y los óxidos de azufre y nitrógeno, al igual que prácticamente todos los vapores orgánicos, son emisores y absorbentes de la radiación térmica. Es claro que los productos de la combustión están en la categoría de los gases emisores-absorbentes.

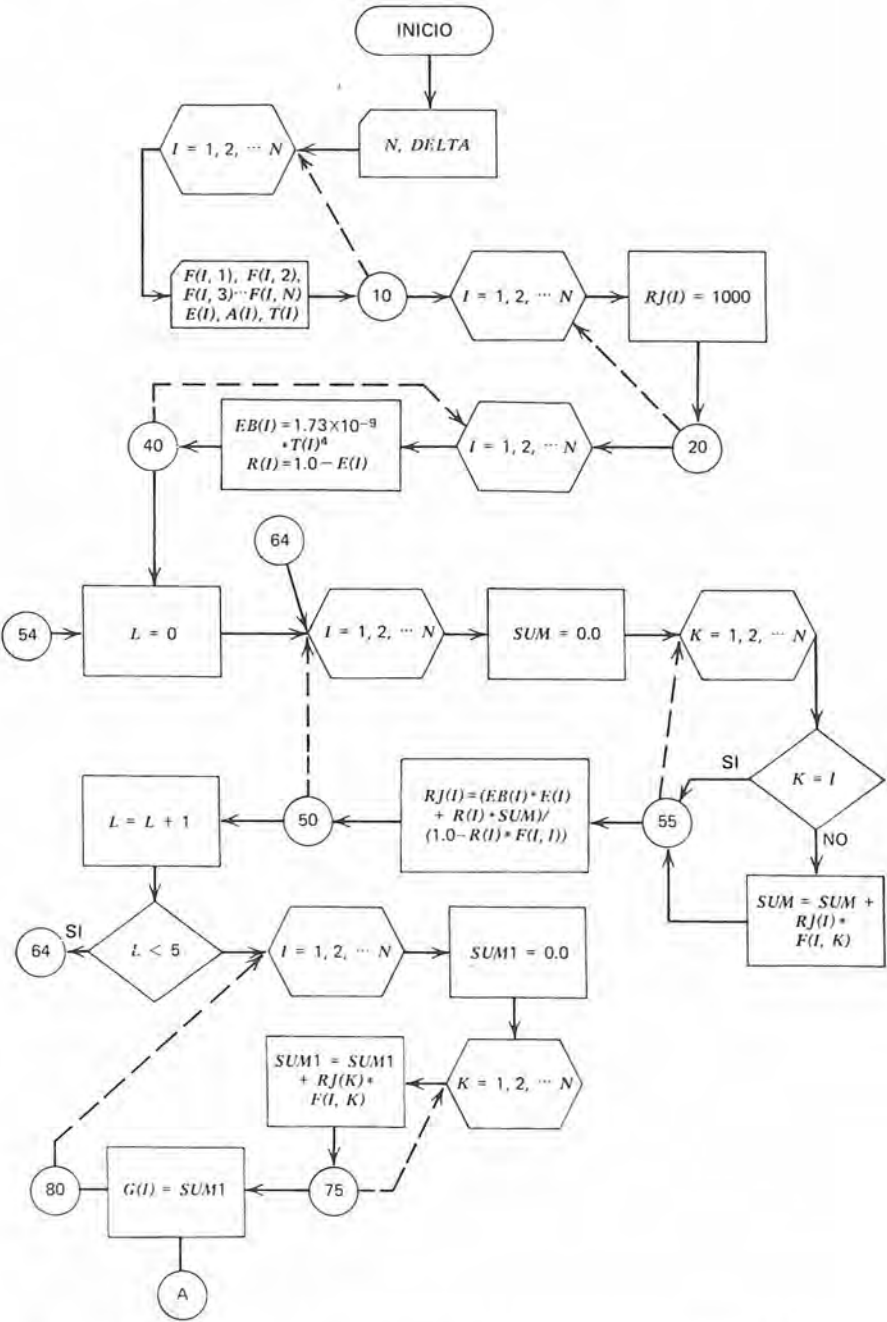


Figura 6.37 Diagrama de flujo para programa de computadora en el ejemplo 6.14.

La descripción de la emisión y absorción gaseosa involucra la temperatura, composición, densidad y geometría. Es bastante difícil realizar un análisis completo de la interacción de radiación de la

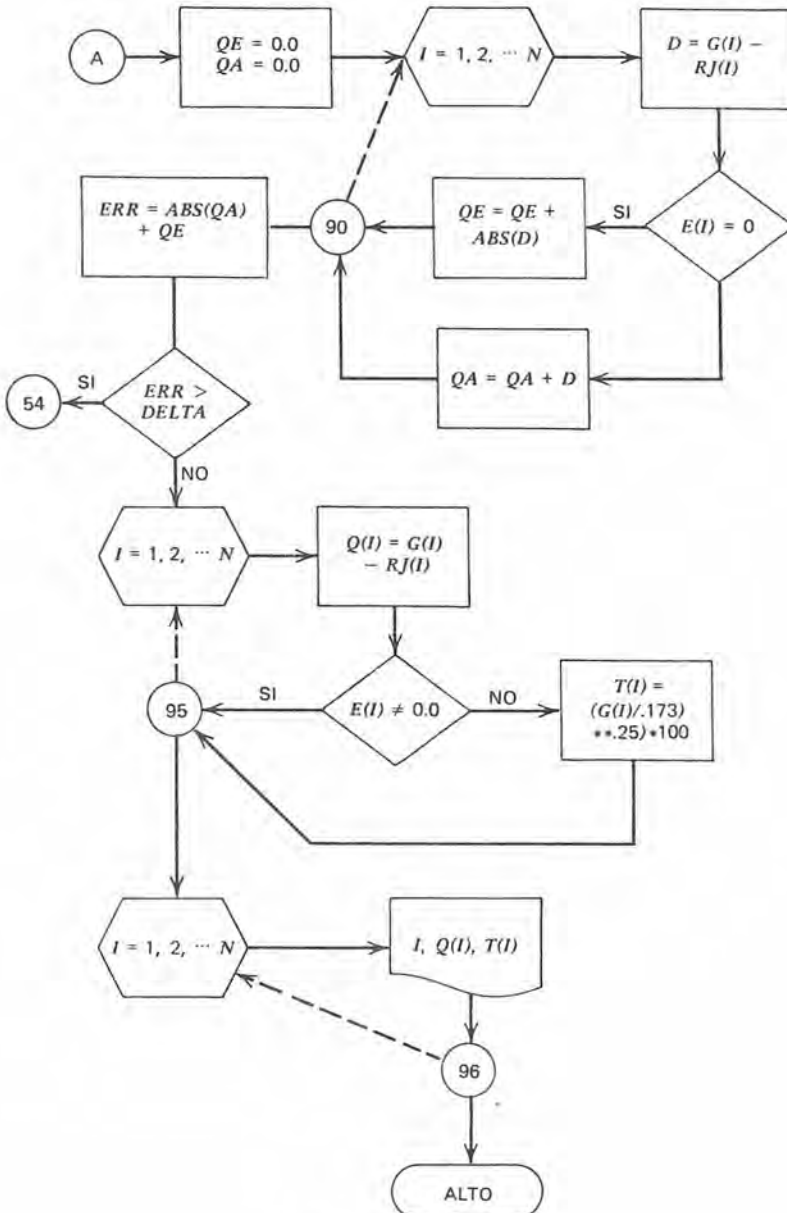


Figura 6.37 (continúa)

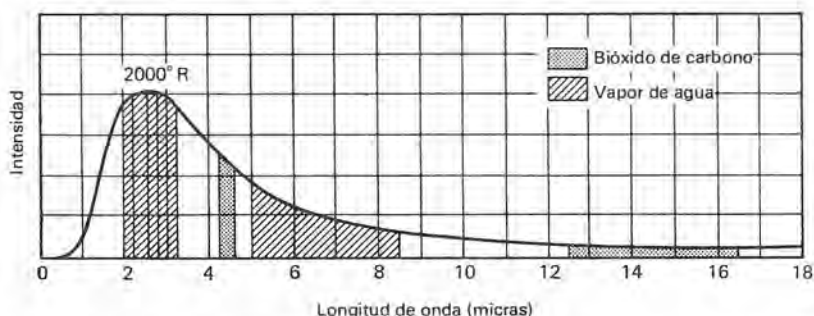


Figura 6.38 Bandas de emisión para el vapor de agua y del bióxido de carbono a 2,000°R.

superficie del gas, que está bastante más allá del alcance de este libro. Para los propósitos del mismo, se consideran algunos casos ideales que permiten efectuar un análisis no muy extenso; las idealizaciones son

1. Se establece la suposición de que los gases son *grises*; con ello se permite describir las características de absorción y emisión por medio de un solo parámetro, o sea, $\alpha = \epsilon$.
2. Se supone que los gases están en equilibrio térmico; en consecuencia, una sola temperatura indica el estado termodinámico.

6.6-1 Absorción monocromática y transmisión a través de una capa de gas

Considere una capa de gas de espesor L , con radiación incidente monocromática de intensidad $I_{\lambda 0}$ que pasa a través de la misma. La intensidad de la radiación a determinada distancia x a través de la capa del gas es igual a $I_{\lambda x}$ y la diferencia $I_{\lambda 0} - I_{\lambda x}$ es la absorción debida al gas. La expresión

$$dI_{\lambda x} = -k_{\lambda} I_{\lambda x} dx \quad (6-121)$$

da la cantidad de absorción por una capa de gas con espesor dx en donde k_{λ} es el coeficiente de absorción monocromática, que es una función de la densidad del gas (que a su vez es una función de la presión y de la temperatura).

Separando las variables e integrando entre las fronteras de la capa del gas se tiene

$$\int_{I_{\lambda 0}}^{I_{\lambda L}} \frac{dI_{\lambda x}}{I_{\lambda x}} = - \int_0^L k_{\lambda} dx$$

lo que da

$$I_{\lambda L} = I_{\lambda 0} e^{-k_{\lambda} L} \quad (6-122)$$

La energía absorbida por la capa del gas está dada por

$$I_{\lambda 0} - I_{\lambda L} = I_{\lambda 0} (1 - e^{-k_{\lambda} L}) \quad (6-123)$$

La cantidad entre paréntesis es la absorptividad monocromática de la capa. La sumatoria sobre todas las longitudes de onda da la absorptividad efectiva de la capa de gas. Se puede notar que una capa de gas se aproxima al comportamiento de cuerpo negro para grandes valores de L .

6.6-2 Aproximaciones de gas gris para H_2O y CO_2

Hottel¹¹ desarrolló un método aproximado para describir las características de absorción y emisión de los gases grises que es bastante sencillo y exacto para la mayoría de los cálculos de ingeniería. Los cálculos de Hottel para las emisividades de gas para distintas temperaturas y presiones se presentan en forma gráfica. Las figuras 6.39 y 6.40 corresponden al vapor de agua y al bióxido de carbono respectivamente. Dichas figuras representan propiedades para una masa semiesférica de gas a la temperatura T_G con presiones parciales P_w y P_c para el vapor de agua y el bióxido de carbono respectivamente, intercambiando energía con un elemento negro de superficie a la temperatura T_s localizada en la base de la semiesfera y en su centro.

En la tabla 6.3 se puede encontrar la longitud media efectiva del haz para otros entornos distintos a los semiesféricos. Para las formas que no están incluidas en la tabla, se puede aproximar la longitud media del haz por el factor 3.4 (volumen)/área superficial.

Tabla 6.3 Longitudes medias L de haz para distintas formas de gas

forma	L
esfera	$2/3 \times \text{diámetro}$
cilindro infinito	$1 \times \text{diámetro}$
cilindro circular recto, altura = diámetro	$2/3 \times \text{diámetro}$
espacio entre planos paralelos infinitos	$2 \times \text{distancia entre planos}$
cubo	$2/3 \times \text{lado}$

En las cifras correspondientes al vapor de agua y al bióxido de carbono, la emisividad está representada como una función de la temperatura absoluta para un rango de valores del producto de presión parcial y longitud media del haz. En cada caso, los valores son exactos si el constituyente de absorción tiene una presión parcial cercana a cero y la presión total del sistema es de 1 atmósfera. Se debe emplear un factor de corrección si la presión del sistema no es igual a 1 atmósfera. La figura 6.41 permite obtener el factor adecuado de corrección para el vapor de agua, y la figura 6.42 se aplica al bióxido

¹¹Hottel, op. cit.

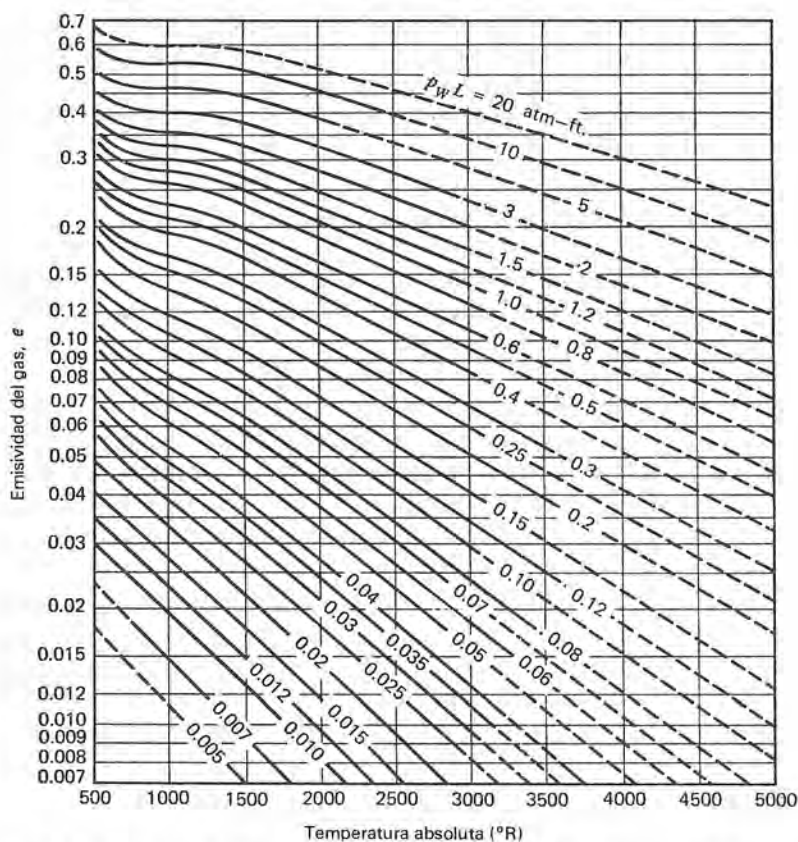


Figura 6.39 Emisividad del vapor de agua a presión total de una atmósfera y cercana a la presión parcial cero.

de carbono. La emisividad a la presión total P es el producto del factor de corrección, obtenido de una de estas gráficas por el valor de emisividad para una presión total de 1 atmósfera.

Se requiere un factor adicional de corrección cuando hay tanto vapor de agua como bióxido de carbono en una mezcla gaseosa.

Como se puede ver de la figura 6.38, hay cierto traslape en las bandas de emisión de estos dos gases. Cuando el CO_2 y H_2O están presentes, la emisividad total de la mezcla gaseosa queda determinada por

$$\varepsilon_{\text{total}} = \varepsilon_{\text{H}_2\text{O}} + \varepsilon_{\text{CO}_2} - \Delta\varepsilon \quad (6-124)$$

en donde $\Delta\varepsilon$, la corrección para el traslape, se puede obtener de la gráfica en la figura 6.43.

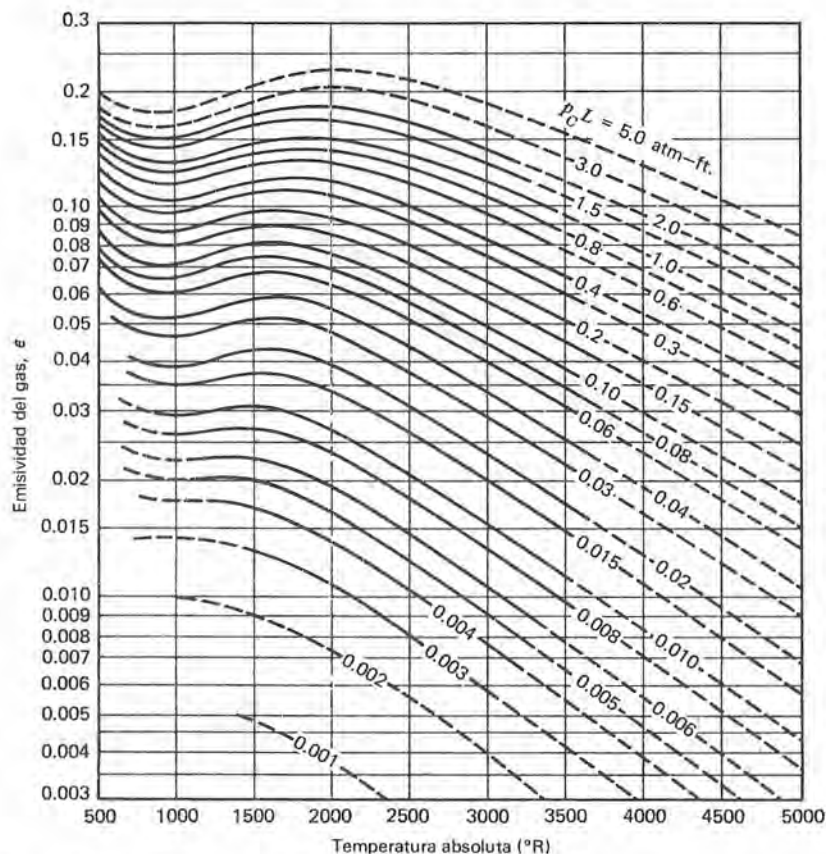


Figura 6.40 Emisividad del bióxido de carbono a presión total de una atmósfera y presión parcial cercana a cero.

6.6-3 Intercambio radiante entre gases absorbentes y una superficie negra

La razón de intercambio de calor entre una superficie negra a la temperatura T_s y un gas absorbente a la temperatura T_G involucra usar emisividades gaseosas y/o absorptividades obtenidas de las gráficas de la sección anterior. Las características de emisión del gas están comprendidas en la emisividad ϵ_G evaluada a la temperatura T_G . La absorción por el gas de la energía radiante emitida por una superficie negra a la temperatura T_s requiere que la absorptividad efectiva α_s sea evaluada a T_s . La razón neta de transferencia de calor es la diferencia entre la energía emitida y absorbida y queda expresada como

$$q_{\text{net}} = \sigma A (\epsilon_G T_G^4 - \alpha_s T_s^4) \quad (6-125)$$

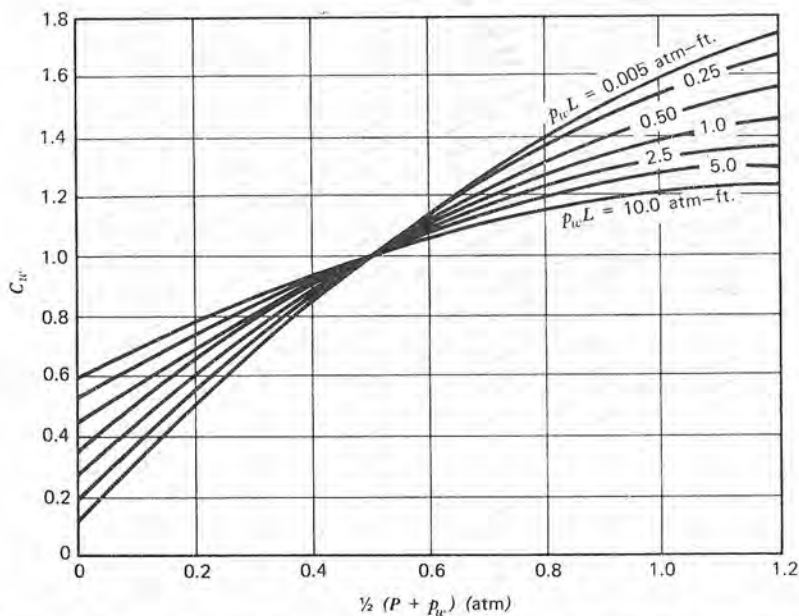


Figura 6.41 Factor de corrección para la determinación de la emisividad de vapor de agua a una presión total de sistema de P atmósferas.

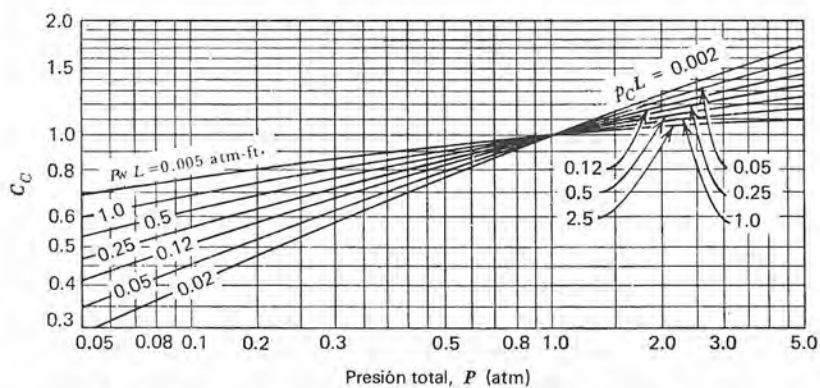


Figura 6.42 Factor de corrección para la determinación de la emisividad de bióxido de carbono a una presión total de sistema de P atmósferas.

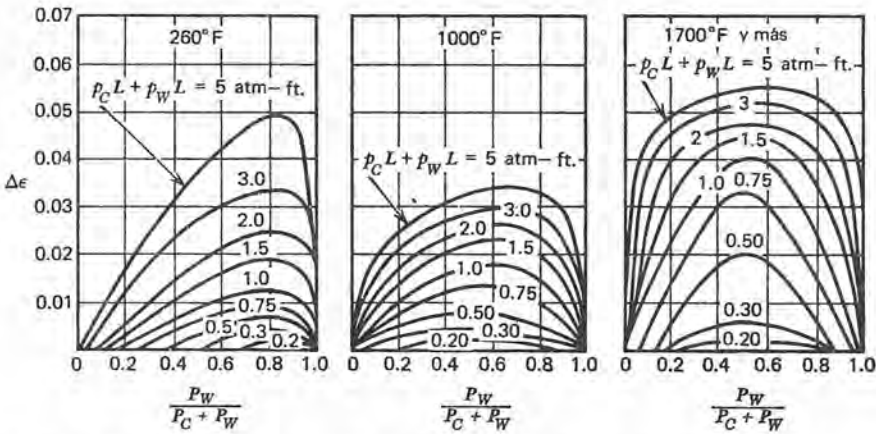


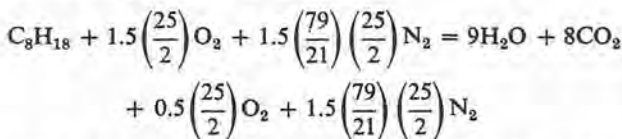
Figura 6.43 Corrección de la emisividad para mezclas de gas que contienen vapor de agua y bióxido de carbono.

En el ejemplo 6.15 se ilustra el uso de la ecuación (6-114) y mucha de la información anterior.

Ejemplo 6.15

Se desea diseñar un sistema de escape para un motor estacionario de combustión interna. El motor quemará combustible que se puede tomar como octano (C_8H_{18}) con 150% de aire estequiométrico. Los productos de combustión pasan a través del sistema de escape a la temperatura de $2000^\circ F$ en tanto que las paredes del tubo de escape están a la temperatura de $450^\circ F$. Aproximando el tubo de escape por un cilindro negro infinito de 3 in de diámetro, calcular la cantidad de intercambio radiante entre los gases calientes de la combustión y la pared del tubo. Se puede suponer que los gases de combustión están a la presión de 1.2 atmósferas.

Las presiones parciales de H_2O y CO_2 se determinan del análisis de la reacción de combustión, que es, por mol de C_8H_{18}



Las moles totales en los gases de escape, por mol de combustible, incluyen 9 moles de H_2O , 8 moles de CO_2 , 6.25 moles de O_2 , y 70.5 moles de N_2 , lo que constituye un total de 93.75 moles de gas. Las fracciones de mol de H_2O y CO_2 son $9/93.75 = 0.096$ y $8/93.75 = 0.085$ respectivamente. Las presiones parciales, que se requieren para el cálculo, son

Usando la tabla 6.3 se calcula la longitud media del haz L para la línea de escape, aproximado en forma de un cilindro infinito igual a $1/4$ ft. Los parámetros requeridos para usar las figuras 6.39 y 6.40 son

$$p_w L = 0.115(0.25) = 0.029 \text{ atm-ft}$$

$$p_c L = 0.102(0.25) = 0.026 \text{ atm-ft}$$

Ahora se leen las emisividades y absortividades

para H_2O :	$\epsilon_G = 0.014$	Figura 6.39
	$\alpha_s = 0.045$	Figura 6.39
	$C_w = 1.2$	Figura 6.41
para CO_2 :	$\epsilon_G = 0.036$	Figura 6.40
	$\alpha_s = 0.043$	
	$C_c = 1.1$	Figura 6.42
	$\Delta\epsilon \simeq 0$	Figura 6.43

Los valores totales corregidos de la emisividad y absortividad son

$$\epsilon_{G \text{ total}} = 0.014(1.2) + 0.036(1.1) = 0.0564$$

$$\alpha_{s \text{ total}} = 0.045(1.2) + 0.043(1.1) = 0.1013$$

El flujo de calor del gas a las paredes del tubo se puede obtener ahora mediante la sustitución adecuada en la ecuación (6-125)

$$\begin{aligned} \frac{q_{\text{neta}}}{A} &= \sigma(\epsilon_G T_G^4 - \alpha_s T_s^4) \\ &= 0.173 \left[0.0564 \left(\frac{2460}{100} \right)^4 - 0.1013 \left(\frac{910}{100} \right)^4 \right] \\ &= 0.173 [0.0564(36.6 \times 10^4) - 0.1013(0.686 \times 10^4)] \\ &= 3450 \text{ Btu/hr por pie cuadrado} \end{aligned}$$

Hasta este momento, en todo lo que se ha visto al igual que en este ejemplo, no se ha tenido en cuenta el intercambio entre un gas y una superficie no negra. Agregar reflexiones múltiples a un caso que ya es difícil de por sí involucra complicaciones bastante complejas para este libro. La aproximación del gas gris y las gráficas solamente se aplican al intercambio con superficies negras o casi negras. Para superficies con emisividades inferiores a 0.7, se requiere un análisis mucho más riguroso y más complicado. Con emisividades superficiales iguales o mayores a 0.7, se puede corregir el intercambio radiante dado por la ecuación (6-125) multiplicando el resultado por $(\epsilon_s + 1)/2$, en donde ϵ_s es la emisividad superficial. Aunque esta corrección es poco exacta, se obtienen resultados satisfactorios en la mayoría de los casos.

6.7 EL COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE CALOR POR RADIACION

Con frecuencia la radiación y la convección suceden simultáneamente en los casos de transferencia de calor. En estos casos es conveniente

usar el *coeficiente de transferencia de calor por radiación* que describe la contribución de la radiación en una forma análoga al coeficiente convectivo. El efecto de tal tratamiento es determinar una conductancia superficial total o efectiva definida por

$$h_{\text{total}} = h_{\text{convección}} + h_{\text{radiación}} \quad (6-126)$$

en donde

$$\begin{aligned} h_r &= \frac{q/A|_{\text{radiación}}}{(T - T_{\text{ref}})} \\ &= \frac{\mathcal{F}_{1-2}(E_{b1} - E_{b2})}{(T - T_{\text{ref}})} \end{aligned} \quad (6-127)$$

En la ecuación (6-127), el término \mathcal{F} es el factor de vista del cuerpo gris, que da cuenta de todos los efectos geométricos y todas las desviaciones del comportamiento de cuerpo negro de las superficies involucradas.

6.8 RESUMEN

En este capítulo se ha considerado el fenómeno de la radiación térmica. Se han mencionado algunos de los problemas involucrados en un análisis profundo del intercambio de energía radiante entre superficies reales con o sin un gas absorbente/emisor presente. En todos los casos, se han visto las simplificaciones que permiten resolver los problemas de interés en ingeniería y se trabajó en problemas ilustrativos.

Se definió y analizó una superficie ideal o negra. Se presentó la ley de Planck como la relación entre la potencia emisiva del cuerpo negro, la longitud de onda y la temperatura absoluta.

Se definieron y relacionaron las propiedades de emisividad, absorptividad, transmisividad y reflectividad con la distribución espectral y la dirección. Para una superficie en equilibrio térmico con su medio ambiente, la ley de Kirchhoff permitió igualar la emisividad y la absorptividad.

Se vio que la suposición del *comportamiento del cuerpo gris*, o sea que la emisividad superficial y su absorptividad no varían con la longitud de onda, permite considerable simplificación al tratar el comportamiento de superficie no negra sin omitir una exactitud apreciable.

Al tratar el intercambio radiante entre superficies, fue necesario considerar la orientación y configuración de las superficies involucradas. En el factor de vista geométrico F , se incluyeron las consideraciones geométricas; la determinación de F para numerosos casos tomó gran parte del esfuerzo de este capítulo. Se presentaron tablas para evaluar los factores de vista para configuraciones comunes; se

examinaron numerosas técnicas para relacionar los valores de las tablas tanto como para evaluar factores de vista para casos adicionales.

Se examinó el intercambio radiante entre dos superficies y entre todas las superficies que forman un entorno. Se vio que es útil el tratamiento del intercambio radiante usando un circuito eléctrico análogo. Se examinaron las analogías eléctricas cuando todas las superficies que comprenden un entorno eran negras, cuando una o más de las superficies que forman un entorno eran rerradiantes, y cuando una o más de esas superficies eran grises.

Se vio que la presencia de un gas absorbente y emisor es una seria complicación en el análisis de la transferencia de calor por radiación. Se estudió el caso sencillo de un gas gris; el análisis más complicado del comportamiento gaseoso está fuera del alcance de este libro.

Siempre que fue posible, se vieron problemas de ejemplos con detalle. Se han presentado técnicas para la formulación y solución de problemas en cada caso aplicable.

Equipo de transferencia de calor

En los grandes procesos industriales no es raro que sea necesario transferir cantidades relativamente grandes de energía térmica entre el sistema y el medio ambiente o entre distintas partes de un sistema dado. Se llama *intercambiador de calor* al dispositivo cuyo propósito principal es transferir el calor entre dos fluidos. Normalmente se emplean tres categorías para clasificar los intercambiadores de calor:

- a) regeneradores.
- b) intercambiadores de tipo abierto.
- c) intercambiadores de tipo cerrado o recuperadores.

Los regeneradores son intercambiadores en donde un fluido caliente fluye a través del mismo espacio seguido de uno frío en forma alternada, con tan poca mezcla física como sea posible entre las dos corrientes. La superficie, que alternativamente recibe y luego libera la energía térmica, es muy importante en este dispositivo. Las propiedades del material superficial, junto con las propiedades de flujo y del fluido de las corrientes fluidas, y con la geometría del sistema, son cantidades que se deben conocer para analizar o diseñar los regeneradores. Solamente se pueden analizar estos dispositivos por los medios que ya se han presentado en los capítulos 4 y 5.

Como su nombre lo indica, los intercambiadores de calor de tipo abierto son dispositivos en los que las corrientes de fluido de entrada fluyen hacia una cámara abierta, y ocurre una mezcla física completa de las dos corrientes. Las corrientes caliente y fría que entran por separado a este intercambiador salen mezcladas en una sola. El análisis de los intercambiadores de tipo abierto involucra la ley de la conservación de la masa y la primera ley de la termodinámica; no se necesitan ecuaciones de relación para el análisis o diseño de este tipo de intercambiador.

Los intercambiadores de tipo cerrado son aquellos en los cuales ocurre transferencia de calor entre dos corrientes fluidas que no se mezclan o que no tienen contacto entre sí. Las corrientes de fluido que están involucradas en esa forma están separadas entre sí por una pared de tubo, o por cualquier otra superficie que pueda estar involucrada en el camino de la transferencia de calor. En consecuencia, la transferencia de calor ocurre por la convección desde el fluido más caliente a la superficie sólida, por conducción a través del sólido, y de ahí por convección desde la superficie sólida al fluido más frío. En los capítulos anteriores se ha considerado en detalle cada uno de estos procesos. El propósito de este capítulo es analizar las situaciones en que ocurren estos procesos de transferencia de calor en serie, y producen cambio continuo de temperatura, de al menos una, aunque generalmente las dos corrientes de fluido involucradas.

Aunque se aplica a las tres categorías mencionadas antes, el término *intercambiador de calor* se emplea en el resto de este capítulo para designar el intercambiador de tipo cerrado. El interés en estos dispositivos se refiere principalmente al análisis térmico. Las consideraciones de la primera ley, como para un intercambiador de tipo abierto, pueden imponer la condición limitante en los intercambiadores de tipo cerrado, como se verá directamente. Un diseño completo para un intercambiador de calor requiere que se tengan en cuenta las restricciones estructurales, económicas y de flujo además de satisfacer los requerimientos básicos de intercambio de calor. Semejante diseño y análisis completo está más allá del alcance de este texto.

7.1 CLASIFICACION DEL INTERCAMBIADOR DE CALOR

Se clasifica a un recuperador de acuerdo con su configuración. La información que lleva esta clasificación es: las direcciones de flujo relativo de las dos corrientes fluidas y el número de pasadas que hace cada fluido al recorrer el intercambiador.

A las direcciones relativas de flujo de las corrientes de fluido se les llaman flujo de *contraflujo* o *contracorriente* cuando las corrientes de fluido fluyen en direcciones opuestas, flujo *concorriente* o flujo *paralelo* cuando las corrientes fluyen en la misma dirección, y flujo *cruzado* si las corrientes de fluido fluyen perpendiculares entre sí. En la figura 7.1 se ilustran estas configuraciones sencillas de paso.

Es posible tener variaciones a la configuración de flujo cruzado con una u otra corriente de fluido *mezclada*. En la figura 7.1 se muestra el caso en que ambos fluidos no están mezclados. Si se suprimen los tabiques mostrados en el caso de una corriente, quedaría no separada o mezclada. Cuando el caso de flujo cruzado es como se

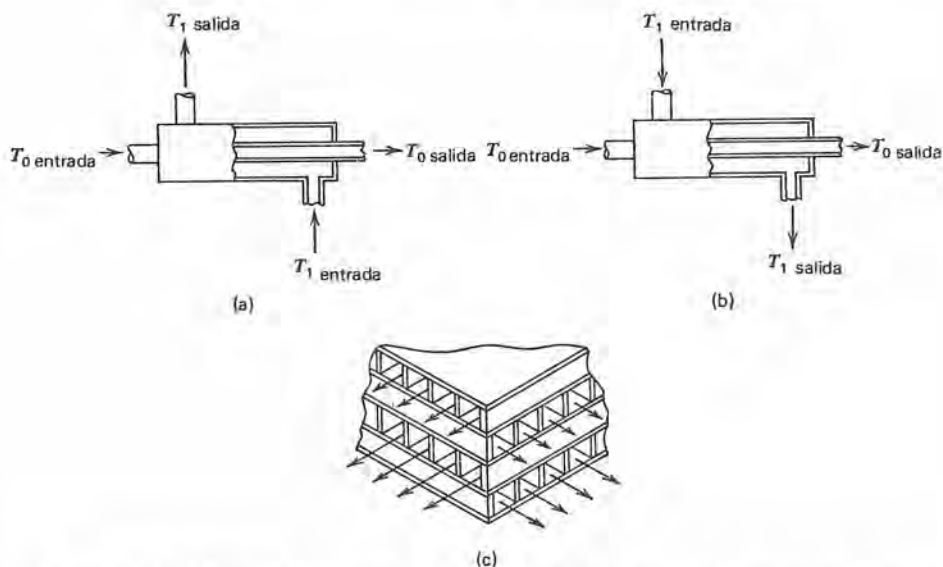


Figura 7.1 Configuraciones de intercambiadores de calor sencillos de una sola pasada. a) contraflujo. b) flujo paralelo. c) flujo cruzado.

muestra en la figura 7.1, la corriente de fluido en una capa dada tiene una variación en la temperatura de uno a otro lado, ya que cada sección contiene una corriente de fluido adyacente a una temperatura distinta. Generalmente es deseable que una o las dos corrientes de fluido no estén mezcladas.

El diseño de los intercambiadores de calor generalmente comienza con la determinación del área requerida para transferir el calor necesario entre las corrientes fluidas que entran a temperaturas especificadas con determinadas razones de flujo. Otras cantidades de interés son las temperaturas de salida de las dos corrientes. Se han desarrollado distintas configuraciones de intercambiadores de calor para incorporar el área requerida de transferencia de calor en un volumen tan pequeño como sea posible. En la figura 7.2 se muestran algunas configuraciones "compactas" de intercambiadores de calor. El libro de Kays y London¹ es una referencia excelente en el diseño de intercambiadores de calor para configuraciones compactas.

Un tipo común de configuración de intercambiador compacto es el denominado de *coraza y tubo*, en el cual una cámara grande —la coraza— aloja muchos tubos que pueden hacer una, dos o muchas pasadas dentro de la coraza. En la figura 7.3 se muestra un diagrama esquemático de un intercambiador de coraza y tubo. En este diagrama el fluido del lado de la coraza hace una pasada y el fluido del

¹ W. M. Kays y A. L. London, *Compact Heat Exchangers*, 2a. ed. (Nueva York: McGraw-Hill, 1964).

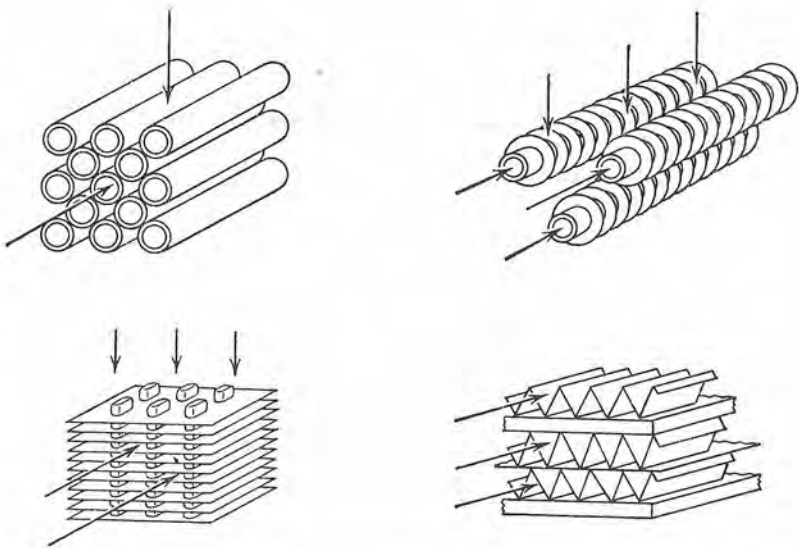


Figura 7.2 Ejemplos de configuraciones de intercambiadores compactos de calor.

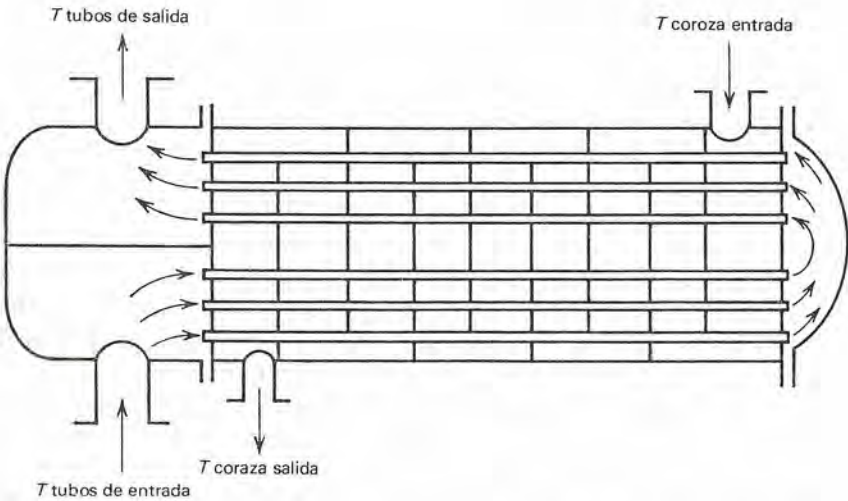


Figura 7.3 Diagrama esquemático de un intercambiador de calor de coraza y tubo.

lado de los tubos hace dos pasadas. Note que se forza al fluido del lado de la coraza a fluir hacia atrás y adelante a través de los tubos por efecto de los tabiques mostrados. Sin la presencia de estos tabiques, el fluido del lado de la coraza tiende a formar "canales" o sea a avanzar desde la entrada a la salida por rutas relativamente directas. Si se permite este fenómeno, el fluido del lado de la coraza permanece relativamente estancado en determinadas posiciones y estas regiones estancadas o "muertas" significan un desempeño inferior al óptico del intercambiador de calor.

Los intercambiadores de calor de coraza y tubos pueden ser enormes, con dimensiones de muchos metros de diámetro y longitud, y pueden incluir millares de tubos. Se pueden incorporar varias pasadas de tubos a una sola coraza; es raro que se usen más de dos pasadas de coraza.

Se debe mencionar brevemente la determinación del fluido que se necesita usar en los tubos y en la coraza. Un aspecto práctico es el de la limpieza. Si un fluido es muy corrosivo o genera películas o nata en la superficie e sólida, generalmente se utiliza del lado de los tubos debido a que se pueden limpiar las paredes interiores de los mismos con relativa facilidad comparada con sus partes externas y el resto de la coraza. En este contexto, la otra consideración de importancia es la de caída de presión y/o los requerimientos de bombeo para los dos fluidos. Generalmente se encuentra la mayor caída de presión del lado del tubo; en consecuencia, esto influye en la selección de los fluidos para este intercambiador. Otras consideraciones, específicas a determinada aplicación, pueden controlar la selección de los fluidos del lado de los tubos y del lado de la coraza.

El análisis de los intercambiadores compactos y de coraza y tubo es relativamente complejo comparado con el caso de una sola pasada. De hecho, cada uno de estos arreglos complejos es solamente una combinación de distintos efectos de una sola pasada. En consecuencia, es conveniente considerar inicialmente el caso de un solo paso para iniciar el análisis de los intercambiadores de calor.

7.2 ANÁLISIS DE INTERCAMBIADOR DE CALOR DE UN SOLO PASO

En la figura 7.4 se representan los perfiles de temperatura para las corrientes de fluido en las cuatro configuraciones básicas de pasada sencilla y doble tubería. Note que en los casos *c*) y *d*), solamente una de las corrientes de fluido experimenta un cambio de temperatura. Naturalmente, esto se debe al hecho que el otro fluido pasa por un cambio de fase al liberar o recibir el calor, en que tal cambio de fase ocurre a temperatura constante.

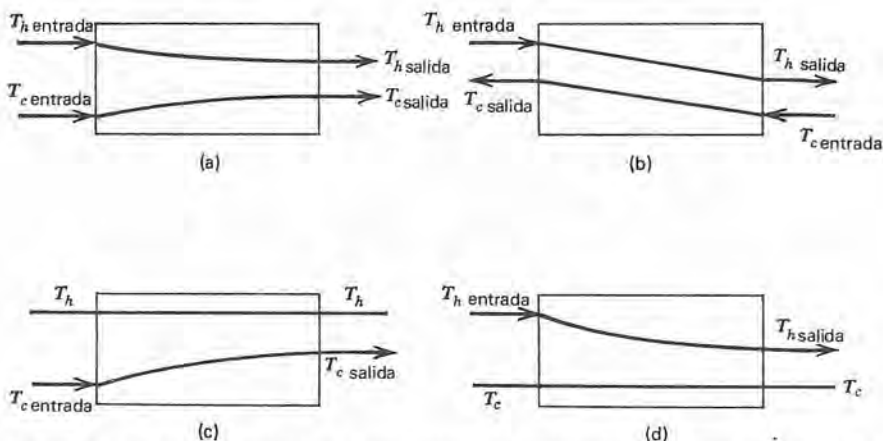


Figura 7.4 Perfiles de temperatura para cuatro configuraciones de intercambiadores de calor de una sola pasada y doble tubería. *a*) flujo paralelo. *b*) contraflujo. *c*) condensador. *d*) evaporador.

En cada uno de los casos mostrados, la variación de temperatura de las dos corrientes del fluido es intuitivamente correcta. Note que la temperatura del fluido más caliente T_h disminuye al liberar calor excepto en el caso *c*) en el que se condensa el fluido caliente. En forma análoga, la temperatura del fluido frío T_c se eleva conforme la corriente pasa a través del intercambiador excepto en el caso *d*), en el cual el calor recibido hace que el fluido frío se evapore, o cambie de líquido a vapor. Se muestran las direcciones de flujo para cada corriente de fluido excepto en los casos *c*) y *d*), en que no están involucradas las direcciones de las corrientes de los fluidos de condensación y de evaporación; los perfiles son los mismos, sin considerar si las corrientes fluyen en paralelo o en contraflujo.

La dirección del flujo en los condensadores y evaporadores es significativa si el cambio de fase es completo dentro del intercambiador. La figura 7.5 muestra un caso de estos para corrientes de fluido que fluyen en direcciones opuestas cuando se condensa el fluido, luego se enfría por debajo de la temperatura de su condición saturada, conforme la transferencia de calor continúa ocurriendo dentro del intercambiador de doble tubería. Se puede considerar este caso como si el intercambiador estuviera dividido en dos partes. Una parte el con-

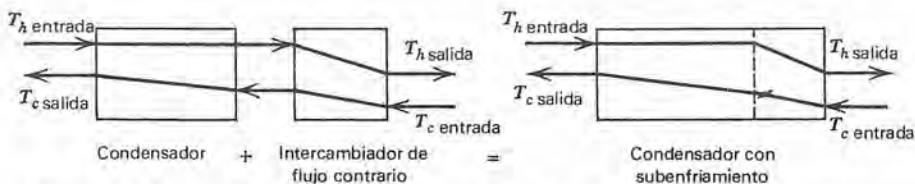


Figura 7.5 Perfiles de temperatura en un condensador de contraflujo con subenfriamiento.

densador, y la otra un intercambiador de contraflujo por donde entra el fluido caliente como líquido saturado. Se muestra la superposición de estas dos partes para dar un perfil completo de la temperatura.

Con referencia a la figura 7.4, es aparente que hay una diferencia básica en el potencial de transferencia de calor de las configuraciones de flujo paralelo y contraflujo. La segunda ley de la termodinámica requiere que en cualquier posición a lo largo de un intercambiador de calor de doble tubería, no pueda haber intercambio de papeles entre las corrientes que entran como fluidos "caliente" y "frío". Si se extiende un intercambiador para proporcionar área infinita de transferencia de calor en el límite, las dos corrientes en el intercambiador de flujo paralelo saldrían a la misma temperatura. Es sencillo demostrar que esta sería la misma temperatura cuando la única corriente de fluido sale en el caso de un intercambiador de calor de tipo abierto.

Por otra parte, en el caso de un intercambiador de flujo contrario con área infinita, una de las corrientes de fluido saldría a la temperatura de *entrada* de la otra. En breve se considerarán estos dos límites con mayor detalle. Por ahora basta observar que el potencial de transferencia de calor para un par dado de fluidos en un intercambiador dado de calor, es mayor para el contraflujo que para el flujo paralelo. En consecuencia, la configuración de contraflujo de una sola pasada es la que estudiaremos primero para un análisis detallado.

7.2-1 Análisis del intercambiador de calor de contraflujo de paso sencillo y doble tubería

Lo siguiente se refiere a la terminología y caso mostrado en la figura 7.6. La ilustración es semejante a la figura 7.4(b), excepto que se muestran más detalles. El fluido caliente entra en (1), el lado izquier-

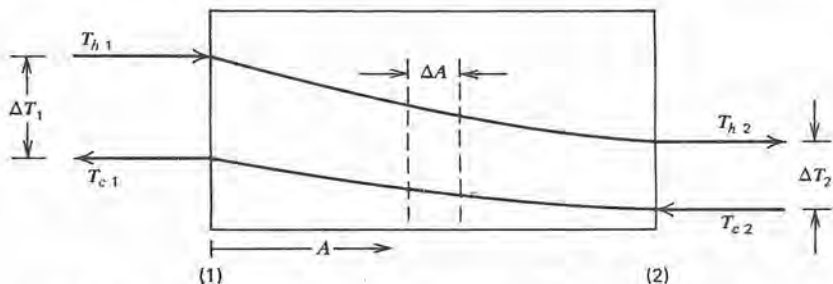


Figura 7.6 Perfiles de temperatura en un intercambiador de calor de contraflujo y doble tubería.

do del intercambiador mostrado, y el fluido frío entra en (2). La abscisa es A , el área del intercambiador de calor, que está relacionada directamente con la longitud de la configuración de doble tubería que se está considerando.

Se necesitan dos herramientas básicas para el análisis de este caso, que son la primera ley de la termodinámica y la ecuación aplicable de la razón expresada en términos de un coeficiente global de transferencia de calor, la ecuación (1-15).

Una consideración de primera ley de cada fluido con razón de flujo de masa \dot{m} , para un área incrementada ΔA del intercambiador da

$$\Delta q = (\dot{m}c_p)_c \Delta T_c$$

y

$$\Delta q = (\dot{m}c_p)_h \Delta T_h$$

Conforme el área incremental se aproxima al tamaño diferencial, se puede escribir

$$dq = (\dot{m}c_p)_c dT_c = C_c dT_c \quad (7-1)$$

$$dq = (\dot{m}c_p)_h dT_h = C_h dT_h \quad (7-2)$$

en donde se introduce la *razón C de capacidad* y se emplea en lugar del producto $\dot{m}c_p$, que es más largo.

Es obvio que la transferencia de calor del fluido caliente y de la transferencia de calor al fluido frío es igual conforme las dos corrientes recorren el intercambiador. En consecuencia, se pueden integrar las ecuaciones (7-1) y (7-2) desde un extremo del intercambiador de calor al otro, para obtener

$$q = \int_1^2 dq_c = C_c \int_1^2 dT_c = C_c(T_{c2} - T_{c1}) \quad (7-3)$$

$$q = \int_1^2 dq_h = C_h \int_1^2 dT_h = C_h(T_{h2} - T_{h1}) \quad (7-4)$$

Igualando los resultados, se obtiene, para el cociente de las razones de capacidad,

$$\frac{C_h}{C_c} = \frac{T_{c2} - T_{c1}}{T_{h2} - T_{h1}} \quad (7-5)$$

El desarrollo hasta ahora ha involucrado únicamente la aplicación de la primera ley de la termodinámica.

Se obtiene otra expresión para dq usando en esta ocasión ecuaciones de razón, escribiendo la ecuación (1-15) para las condiciones en dA ; la expresión que se obtiene es

$$dq = U dA(T_h - T_c) \quad (7-6)$$

Ahora se escribe la diferencia de temperaturas $T_h - T_c$ en la forma ΔT ; se sigue que

$$d(\Delta T) = dT_h - dT_c \quad (7-7)$$

Ahora se emplean las ecuaciones (7-1) y (7-2) para sustituir los valores de dT_h y dT_c ; con lo que se obtiene

$$d(\Delta T) = dq \left(\frac{1}{C_h} - \frac{1}{C_c} \right) = \frac{dq}{C_h} \left(1 - \frac{C_h}{C_c} \right) \quad (7-8)$$

Ahora se sustituye la razón C_h/C_c , de la ecuación (7-5), y con algo de trabajo se obtiene

$$\begin{aligned} d(\Delta T) &= \frac{dq}{C_h} \left(1 - \frac{T_{c2} - T_{c1}}{T_{h2} - T_{h1}} \right) \\ &= \frac{dq}{C_h} \left(\frac{T_{h2} - T_{h1} - T_{c2} + T_{c1}}{T_{h2} - T_{h1}} \right) \\ &= \frac{dq}{C_h} \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{T_{h2} - T_{h1}} \end{aligned} \quad (7-9)$$

Ahora se usan las ecuaciones (7-4), (7-6) y (7-9); combinando estas expresiones se tiene

$$d(\Delta T) = \frac{U dA \Delta T}{q} (\Delta T_2 - \Delta T_1)$$

y mediante una separación de variables se tiene

$$\frac{d(\Delta T)}{\Delta T} = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{q} U dA$$

Integrando esta expresión entre los límites en cada extremo del intercambiador se tiene

$$\int_{\Delta T_1}^{\Delta T_2} \frac{d \Delta T}{\Delta T} = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{q} \int_1^2 U dA$$

o sea

$$\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{q} \int_1^2 U dA \quad (7-10)$$

Por lo general se escribe la ecuación (7-10) en la forma

$$q = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln (\Delta T_2 / \Delta T_1)} \int_1^2 U dA \quad (7-11)$$

que, para U constante, se reduce a

$$q = UA \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln (\Delta T_2 / \Delta T_1)} \quad (7-12)$$

La fuerza motriz de temperatura al lado derecho de la ecuación (7-12) es la *diferencia logarítmica media, de la temperatura*,

$$\Delta T_{lm} \equiv \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln (\Delta T_2 / \Delta T_1)} \quad (7-13)$$

en consecuencia, con frecuencia se escriben las ecuaciones (7-11) y (7-12) en la forma

$$q = \left(\int_1^2 U dA \right) \Delta T_{lm} \quad (7-14)$$

y

$$q = UA \Delta T_{lm} \quad (7-15)$$

Se obtuvieron los resultados del desarrollo anterior, ecuaciones (7-14) y (7-15), suponiendo contraflujo. Se hubieran obtenido los resultados idénticos —y en consecuencia son igualmente válidos— para cualesquiera de las configuraciones de un solo paso mostradas en la figura 7.4.

Se debe hacer especial mención de cuándo se puede usar la ecuación (7-15) en lugar de la ecuación (7-14), o sea, cuándo el coeficiente global de transferencia de calor se considera debidamente constante. El trabajo en el capítulo 5 indicaría que en general, U no es constante cuando los fluidos experimentan un cambio significativo en la temperatura. Generalmente, los cálculos basados en un valor de U tomado en el punto intermedio entre los extremos de un intercambiador son suficientemente exactos. Si el cambio en la temperatura es extremo, especialmente para los fluidos cuyas viscosidades son fuertes funciones de la temperatura, entonces es apropiada una solución de diferencias finitas para la ecuación (7-14). Para tales condiciones, se divide al intercambiador en n incrementos y se expresa la transferencia total de calor en la forma

$$q = \sum_{i=1}^n \Delta q_i = \sum_{i=1}^n U_i \Delta A_i \Delta T_{lm} \quad (7-16)$$

El tedio de evaluar U_i varias veces sugiere que una solución del tipo indicado por la ecuación (7-16) sería un trabajo bastante largo.

Hay un caso especial al evaluar ΔT_{lm} cuando ΔT tiene el mismo valor en cada extremo de un intercambiador de calor de contraflujo. En tal caso

$$\Delta T_{lm} = \frac{\Delta T - \Delta T}{\ln (\Delta T / \Delta T)} = \frac{0}{0}$$

que es indeterminado. Se puede manejar sencillamente este caso aplicando la regla de L'Hospital en la forma siguiente

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta T_2 \rightarrow \Delta T_1} \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln (\Delta T_2 / \Delta T_1)} &= \lim_{(\Delta T_2 / \Delta T_1) \rightarrow 1} \frac{\Delta T_1 \left\{ \left[\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} \right] - 1 \right\}}{\ln (\Delta T_2 / \Delta T_1)} \\ &= \lim_{F \rightarrow 1} \frac{\Delta T (F - 1)}{\ln F} \end{aligned}$$

en donde se designa por F a la razón $\Delta T_2 / \Delta T_1$. Diferenciando el numerador y denominador con respecto a F , y tomando el límite, se tiene

$$\lim_{F \rightarrow 1} \frac{\Delta T}{1/F} = \Delta T$$

Cuando $\Delta T_1 = \Delta T_2$, la ecuación (7-15) se reduce sencillamente a

$$q = UA \Delta T \quad (7-17)$$

Cuando ΔT_1 y ΔT_2 tienen valores muy próximos entre sí, la ecuación (7-17) es razonablemente exacta. En este caso, la regla empírica es que cuando $\Delta T_{m\max} / \Delta T_{m\min} < 1.5$, un valor de media aritmética simple para ΔT da resultados con exactitud de 1%.

En el ejemplo 7.1 se ilustra el uso de resultados de una sola pasada y doble tubería para evaluar el funcionamiento de intercambio de calor o criterios de diseño.

Ejemplo 7.1

Se obtiene benceno de una columna fraccionadora en forma de vapor saturado a 176°F. Determinar el área de transferencia de calor necesaria para condensar y subenfriar 8000 lb_m/hr de benceno a 115°F si el refrigerante es agua que fluye a 40,000 lb_m/hr disponible a 55°F. Comparar las áreas requeridas para configuraciones de a) contraflujo y b) flujo paralelo. Para este caso se puede usar un coeficiente de transferencia global de calor igual a

Determinando el calor total que se debe transferir, se tiene para la sección de condensación,

$$q = 8000 \frac{\text{lb}_m}{\text{hr}} \left(169.6 \frac{\text{Btu}}{\text{lb}_m} \right) = 1.36 \times 10^6 \frac{\text{Btu}}{\text{hr}}$$

y en la sección de subenfriamiento,

$$\begin{aligned} q &= 8000 \frac{\text{lb}_m}{\text{hr}} (176 - 115)^{\circ}\text{F} \left(0.42 \frac{\text{Btu}}{\text{lb}_m \cdot ^{\circ}\text{F}} \right) \\ &= 205,000 \text{ Btu/hr} \end{aligned}$$

El análisis de los casos de contraflujo y paralelo se refiere a las ilustraciones en la figura 7.7. Para el caso de contraflujo, en la sección de subenfriamiento,

$$q = 205,000 \frac{\text{Btu}}{\text{hr}} = C_w(T_{wc} - 55^\circ\text{F})$$

$$T_{wc} = 55^\circ\text{F} + \frac{205,000 \text{ Btu/hr}}{40,000 \text{ lb}_m/\text{hr} \left(1 \frac{\text{Btu}}{\text{lb}_m \cdot ^\circ\text{F}}\right)}$$

$$= 55^\circ\text{F} + 5.12^\circ\text{F} = 60.1^\circ\text{F}$$

Entonces, en la sección de subenfriamiento para (a),

$$\Delta T_{1m} = \frac{(176 - 60.1) - (115 - 55)}{\ln \frac{176 - 60.1}{115 - 55}}$$

$$= \frac{115.9 - 60}{\ln 115.9/60} = \frac{55.9}{0.658} = 84.9$$

$$A = \frac{q}{U \Delta T_{1m}} = \frac{205,000 \text{ Btu/hr}}{(200 \text{ Btu/hr ft}^2 \cdot ^\circ\text{F})(84.9^\circ\text{F})} = 12.1 \text{ ft}^2$$

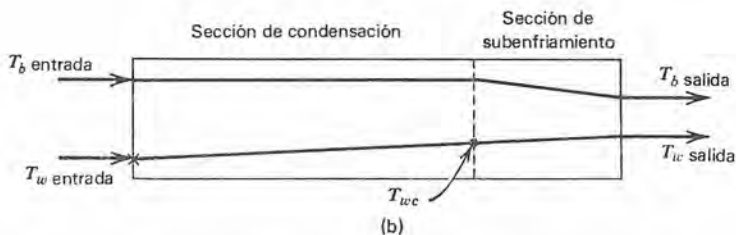
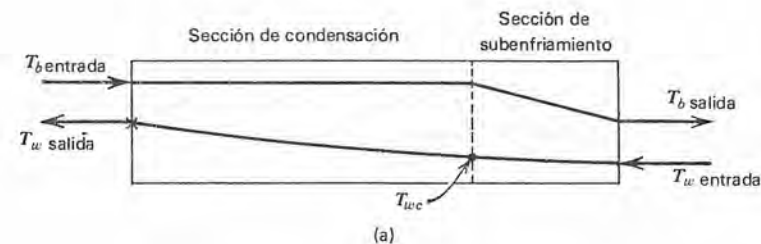


Figura 7.7 Perfiles de temperatura para benceno en condensación con subenfriamiento — ejemplo 7.1.

En la sección de condensación,

$$q = 1.36 \times 10^6 \frac{\text{Btu}}{\text{hr}} = C_w(T_{w \text{ salida}} - 60.1^\circ\text{F})$$

$$T_{w \text{ salida}} = 60.1^\circ\text{F} + \frac{1.36 \times 10^6 \text{ Btu/hr}}{(40,000 \text{ Btu/hr-}^\circ\text{F})} = 94.1^\circ\text{F}$$

$$\Delta T_{\text{lm}} = \frac{(176 - 94.1) - (176 - 60.1)}{\ln \frac{176 - 94.1}{176 - 60.1}}$$

$$A = \frac{1.36 \times 10^6 \text{ Btu/hr}}{\left(200 \frac{\text{Btu}}{\text{hr}} \text{ ft}^2\text{-}^\circ\text{F}\right)(97.9^\circ\text{F})} = 69.5 \text{ ft}^2$$

El área requerida para el caso de contraflujo es la suma de las dos partes, o sea

Para el caso de flujo paralelo, en la sección de condensación,

$$q = 1.36 \times 10^6 \text{ Btu/hr} = C_w(T_{wc} - 55^\circ\text{F})$$

$$T_{wc} = 55^\circ\text{F} + \frac{1.36 \times 10^6 \text{ Btu/hr}}{40,000 \text{ Btu/hr-}^\circ\text{F}} = 89^\circ\text{F}$$

$$\Delta T_{\text{lm}} = \frac{(176 - 55) - (176 - 89)}{\ln \frac{176 - 55}{176 - 89}} = 103.1^\circ\text{F}$$

$$A = \frac{1.36 \times 10^6 \text{ Btu/hr}}{(200 \text{ Btu/hr ft}^2\text{-}^\circ\text{F})(103.1^\circ\text{F})} = 66.0 \text{ ft}^2$$

En la sección de subenfriamiento,

$$q = 205,000 \text{ Btu/hr} = C_w(T_{w \text{ salida}} - 89^\circ\text{F})$$

$$T_{w \text{ salida}} = 89^\circ\text{F} + \frac{205,000 \text{ Btu/hr}}{40,000 \text{ Btu/hr-}^\circ\text{F}} = 94.1^\circ\text{F}$$

$$\Delta T_{\text{lm}} = \frac{(176 - 89) - (115 - 94.1)}{\ln \frac{176 - 89}{115 - 94.1}} = 46.3^\circ\text{F}$$

$$A = \frac{205,000 \text{ Btu/hr}}{(200 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^\circ\text{F})(46.3^\circ\text{F})} = 22.1 \text{ ft}^2$$

El área total para el caso de flujo paralelo es aproximadamente 88.1 ft².

De los resultados anteriores, es evidente la naturaleza más eficiente del contraflujo en comparación con el flujo paralelo. En este caso específico, la configuración de flujo paralelo requiere 8% de área adicional.

7.3 ANÁLISIS DE INTERCAMBIADOR DE CALOR DE CORAZA Y TUBOS Y DE FLUJO CRUZADO

Cuando se tiene que transferir una gran cantidad de calor, a menudo es indeseable o imposible dedicar el espacio que sería necesario si se fuera a utilizar un intercambiador de paso sencillo y doble tubería.

Por lo general, las consideraciones del espacio imponen el uso de configuraciones más compactas de intercambiador de calor que las mostradas en las figuras 7.2 y 7.3.

Estas configuraciones mucho más complejas son más difíciles de tratar analíticamente que los casos de paso sencillo. En el caso de intercambiadores de coraza, tubo y de contraflujo, se puede emplear la ecuación 7-15 junto con un factor de corrección. En las figuras 7.8 y 7.9 se muestran factores de corrección en forma de tabla. Estas gráficas se tomaron de la obra de Bowman, Mueller y Nagel;² la Tubular Exchanger Manufacturers Association³ tiene otras tablas disponibles. La figura 7.8 presenta los factores de corrección F para tres configuraciones de coraza y tubo, y la figura 7.9 da factores de corrección para tres arreglos de flujos cruzados.

En cada caso se muestra el factor de corrección F como una función de dos parámetros, Y y Z , definidos como se muestra con cada figura.

Se usa el factor de corrección F , que se encuentra en la gráfica adecuada, para modificar la ecuación (7-15) en la forma

$$q = UAF \Delta T_{lm} \quad (7-18)$$

en donde *siempre* se determina ΔT_{lm} en base al contraflujo.

En el ejemplo 7.2 siguiente se ilustra el uso de la ecuación (7-18) y el factor F de corrección.

Ejemplo 7.2

Se desea enfriar benceno, que se presenta como líquido saturado a la temperatura de 170°F hasta 115°F para su transportación. El benceno fluye a razón de 8000 lb_m/hr;

El agua refrigerante está a 55°F y fluye a razón de 5,000 lb_m/hr. Determinar el área requerida del intercambiador de calor para las siguientes configuraciones:

- una sola pasada, contraflujo.
- coraza y tubo, donde el agua hace una pasada por la coraza y cuatro pasadas de tubo.
- una sola pasada de flujo cruzado, con agua mezclada y benceno no mezclado.

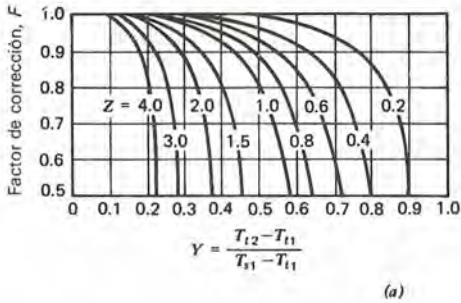
En cada caso se puede emplear un coeficiente de transferencia global de calor igual a 55 Btu/hr-ft²-°F

Un análisis de primera ley da la transferencia total de calor

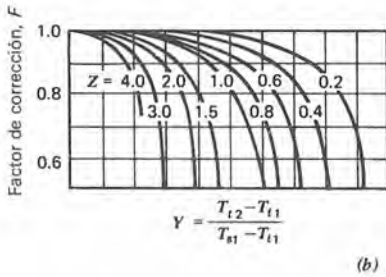
$$\begin{aligned} q &= C_{\text{Benc}} \Delta T_{\text{Benc}} \\ &= \left(8000 \frac{\text{lb}_m}{\text{hr}} \right) \left(0.42 \frac{\text{Btu}}{\text{lb}_m \cdot ^\circ\text{F}} \right) (170^\circ\text{F} - 115^\circ\text{F}) \\ &= 185,000 \text{ Btu/hr} \end{aligned}$$

² R. A. Bowman, A. C. Mueller, y W. M. Nagle, *A.S.M.E. Transactions* 62 (1940): 283.

³ Tubular Exchanger Manufacturers Association, *TEMA Standards*, 3a. ed. (Nueva York, 1952).



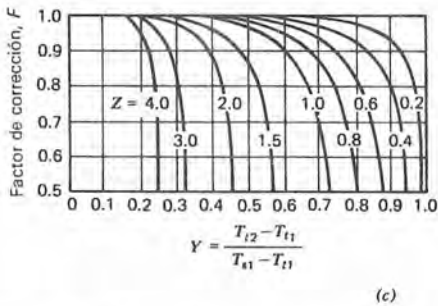
$$Z = \frac{T_{s1} - T_{s2}}{T_{i2} - T_{i1}}$$



fluido de la coraza

Fluido del tubo

$$Z = \frac{T_{s1} - T_{s2}}{T_{i2} - T_{i1}}$$



$$Z = \frac{T_{s1} - T_{s2}}{T_{i2} - T_{i1}}$$

Figura 7.8 Factores de corrección para tres arreglos de coraza y tubo. (a) una pasada de coraza y 2, 4 o cualquier múltiplo de 2 pasadas de tubo. (b) una pasada de coraza y 3 o múltiplos de 3 pasadas de tubos. (c) dos pasadas de coraza y 4, 8 o cualquier múltiplo de 4 pasadas de tubo. [De R. A. Bowman, A. C. Mueller y W. M. Nagle, *Trans. A. S. M. E.* 62 (1940): 283. Con permiso del editor.]

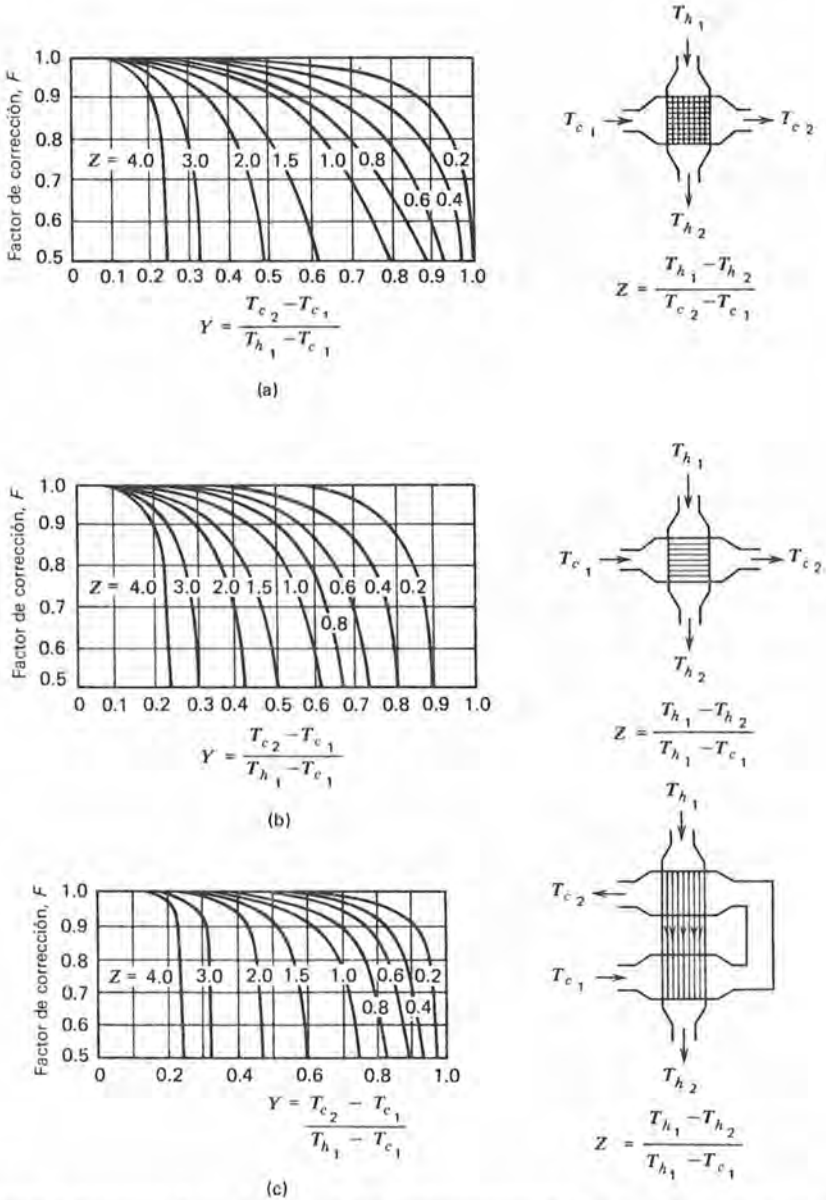


Figura 7.9 Factores de corrección para tres configuraciones de flujo cruzado, (a) Flujo cruzado de una sola pasada, ambos fluidos no mezclados. (b) Flujo cruzado de una sola pasada, un fluido no mezclado. (c) flujo cruzado de dos pasadas, pasadas de tubo mezcladas; el flujo en la primera y segunda pasadas están en serie. [De R. A. Bowman, A. C. Mueller y W. M. Nagle, *Trans. A. S. M. E.* 62 (1940): 283. Con permiso del editor.]

y la temperatura necesaria de excitación del agua

$$q = C_{H_2O} \Delta T_{H_2O}$$

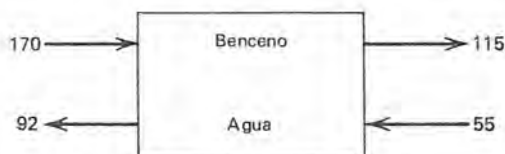
$$185,000 \text{ Btu/hr} = \left(5,000 \frac{\text{lb}_m}{\text{hr}}\right) \left(1 \frac{\text{Btu}}{\text{lb}_m \cdot ^\circ\text{F}}\right) (T_{H_2O \text{ Sal}} - 55^\circ\text{F})$$

$$T_{H_2O \text{ Sal}} = 55 + \frac{185,000 \text{ Btu/hr}}{5,000 \text{ Btu/hr} \cdot ^\circ\text{F}}$$

$$= 55 + 37 = 92^\circ\text{F}$$

Para a), el caso de una sola pasada con contraflujo (con referencia a la ilustración),

$$\begin{aligned} \Delta T_{lm} &= \frac{(170 - 92) - (115 - 55)}{\ln \frac{170 - 92}{115 - 55}} \\ &= \frac{18}{\ln 78/60} = 68.6^\circ\text{F} \end{aligned}$$



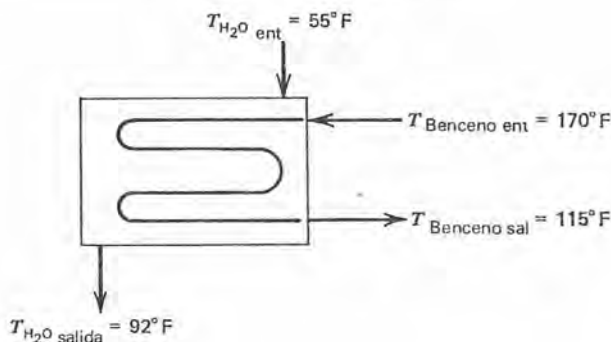
En consecuencia, aplicar la ecuación (7-15) da el resultado

$$\begin{aligned} A &= \frac{q}{U \Delta T_{lm}} = \frac{185,000 \text{ Btu/hr}}{(55 \text{ Btu/hr ft}^2 \cdot ^\circ\text{F})(68.6^\circ\text{F})} \\ &= 49.0 \text{ ft}^2 \end{aligned}$$

Para b), primero se determinan los parámetros Y y Z .

$$Y = \frac{115 - 170}{55 - 170} = \frac{55}{115} = 0.478$$

$$Z = \frac{55 - 92}{115 - 170} = \frac{37}{55} = 0.673$$



Ahora se lee en la figura 7.8(a) el factor de corrección igual a 0.93. Se pueden usar los valores apropiados con la ecuación (7-18) para obtener

$$A = \frac{q}{UF \Delta T_{lm}} = \frac{185,000 \text{ Btu/hr}}{(55 \text{ Btu/hr ft}^2\text{-}^\circ\text{F})(0.93)} (68.6^\circ\text{F})$$

$$= 52.7 \text{ ft}^2$$

Para c), se debe emplear la figura 7.9(b). Los parámetros Y y Z son

$$Y = \frac{115 - 170}{55 - 170} = \frac{55}{115} = 0.478$$

$$Z = \frac{55 - 92}{115 - 170} = \frac{37}{55} = 0.673$$

y, de la gráfica, $F = 0.93$. De la ecuación (7-18) se determina el área como sigue

$$A = \frac{q}{UF \Delta T_{lm}} = \frac{185,000 \text{ Btu/hr}}{(55 \text{ Btu/hr ft}^2\text{-}^\circ\text{F})(0.93)} (68.6^\circ\text{F})$$

$$= 52.7^\circ\text{F}$$

En el ejemplo anterior se ve que ambas configuraciones de intercambiadores de calor designadas "compactas" requieren más área de transferencia de calor. En consecuencia, el efecto de lograr la misma cantidad de transferencia de calor en un volumen más pequeño o en una forma más conveniente está acompañado de una disminución en la *efectividad* de la superficie de transferencia de calor. Este término se discute detalladamente en forma directa. Sin embargo, persiste la cuestión de que generalmente son indeseables los tramos largos de tubería doble en arreglo de una sola pasada, por lo que se usan las configuraciones "compactas" más convenientes incluso aunque se requiera más área para transferir la misma cantidad de calor.

Cada uno de los ejemplos anteriores ha ilustrado el uso de la diferencia de la temperatura media logarítmica para determinar el área del intercambiador de calor. En cada caso se dió el coeficiente de transferencia de calor total. Un problema más completo y mucho más laborioso se encuentra cuando se debe determinar U de acuerdo con los procedimientos presentados en el capítulo 5 y se usa la ecuación (7-11) para determinar el área requerida. Algunos de los problemas al final de este capítulo requieren esta solución más extensa.

Para una discusión más completa del tema de los intercambiadores compactos de calor, se recomienda el excelente libro de Kays y London.⁴

7.4 METODO DE NUMERO DE UNIDADES DE TRANSFERENCIA (NUT) PARA DISEÑO Y ANALISIS DE INTERCAMBIADORES DE CALOR

Nusselt⁵ propuso por primera vez en 1930 el concepto de la *efectividad del intercambiador de calor*. Se define la efectividad \mathcal{E} como la razón de la transferencia real de calor lograda en un intercambiador de calor a la máxima transferencia posible, si se dispusiera de área infinita de transferencia de calor.

Con relación a la figura 7.10, que muestra perfiles típicos de la temperatura para configuraciones de contraflujo y flujo paralelo de una sola pasada, es aparente que, en general, un fluido sufre un mayor cambio de temperatura que el otro. El cambio relativo en la temperatura de los dos fluidos está relacionado inversamente a sus razones de capacidad, el que tiene menor valor de C sufre el mayor cambio en la temperatura.

A la mayor razón de capacidad se le designa mediante C_{\max} y a la menor capacidad mediante C_{\min} . En el caso del contraflujo, es aparente que conforme se aumenta el área del intercambiador de calor, la temperatura de salida del fluido mismo (el que tiene C_{\min}) se aproxima a la temperatura de entrada del fluido máximo en el límite conforme el área se aproxima al infinito: $T_{\min \text{ salida}} \rightarrow T_{\max \text{ entrada}}$. En el caso del flujo paralelo, un área infinita solo significa que la temperatura de ambos fluidos sería la lograda si se permitiera que ambos se mezclaran libremente en un intercambiador de tipo abierto.

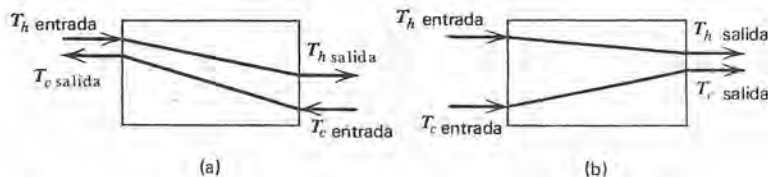


Figura 7.10 Perfiles típicos de temperatura para intercambiadores de calor de contraflujo y flujo paralelo. a) Contraflujo, $C_h > C_c$. b) Flujo paralelo $C_h > C_c$.

⁴ Kays y London, op. cit.

⁵ W. Nusselt, *Tech. Mechanik and Thermodynamik* 12 (1930).

Haciendo referencia una vez más al caso del contraflujo, se ve que para $C_c = C_{\min}$, como se muestra en la figura 7.10(a), y conforme el área de transferencia de calor se aproxima al infinito, $T_{e\text{salida}} \rightarrow T_{h\text{entrada}}$.

En este caso, la efectividad es

$$\mathcal{E} = \frac{C_h(T_{h\text{entrada}} - T_{h\text{salida}})}{C_c(T_{e\text{salida}} - T_{e\text{entrada}})|_{\text{máx}}} = \frac{C_{\text{máx}}(T_{h\text{entrada}} - T_{h\text{salida}})}{C_{\min}(T_{h\text{entrada}} - T_{e\text{entrada}})} \quad (7-19)$$

Si el fluido caliente es el fluido mínimo, entonces, conforme el área se aproxima al infinito, $T_{h\text{salida}} \rightarrow T_{e\text{entrada}}$, y se puede escribir la efectividad en la forma

$$\mathcal{E} = \frac{C_c(T_{e\text{entrada}} - T_{e\text{salida}})}{C_h(T_{h\text{entrada}} - T_{e\text{entrada}})|_{\text{máx}}} = \frac{C_{\text{máx}}(T_{e\text{salida}} - T_{e\text{entrada}})}{C_{\min}(T_{h\text{entrada}} - T_{e\text{entrada}})} \quad (7-20)$$

En cada una de estas dos expresiones el numerador representa la transferencia efectiva de calor, el denominador representa la máxima transferencia de calor, y el denominador es el mismo en cada uno de los casos.

Rescribiendo estas ecuaciones, se tiene una expresión adicional para la transferencia de calor

$$q = \mathcal{E} C_{\min}(T_{h\text{entrada}} - T_{e\text{entrada}}) \quad (7-21)$$

que se puede emplear para analizar y diseñar intercambiadores de calor. La ecuación (7-21) difiere de las otras expresiones de diseño que se han considerado en que la fuerza motriz es la diferencia entre las temperaturas de *entrada* de las corrientes fluídas, y en sí misma contiene la efectividad. Ahora se concentra la atención en el trabajo de evaluar la efectividad \mathcal{E} del intercambiador de calor.

7.4-1 Efectividad del intercambiador de calor

El siguiente análisis se basa en la ecuación (7-21). Se considera la operación de contraflujo de un intercambiador de un solo paso; los subíndices empleados se refieren al caso mostrado en la figura 7.6. Se supone que el fluido frío es el mínimo. Con estas condiciones, las ecuaciones (7-3) y (7-15) se escriben en la forma

$$q = C_c(T_{c1} - T_{c2}) = UA \frac{(T_{h1} - T_{c1}) - (T_{h2} - T_{c2})}{\ln [(T_{h1} - T_{c1})/(T_{h2} - T_{c2})]} \quad (7-22)$$

Se puede expresar la temperatura de entrada del fluido caliente T_{h1} en función de \mathcal{E} , usando la ecuación (7-21) en la forma

$$\begin{aligned}
 T_{h1} &= T_{c2} + q/\mathcal{E}C_{\min} \\
 &= T_{c2} + \frac{T_{c1} - T_{c2}}{\mathcal{E}}
 \end{aligned}
 \quad (7-23)$$

En consecuencia, la diferencia de temperaturas en (1) entre las corrientes del fluido caliente y frío se reduce a

$$\begin{aligned}
 T_{h1} - T_{c1} &= T_{c2} - T_{c1} + \frac{T_{c1} - T_{c2}}{\mathcal{E}} \\
 &= \left(\frac{1}{\mathcal{E}} - 1\right)(T_{c1} - T_{c2})
 \end{aligned}
 \quad (7-24)$$

Se obtiene la otra diferencia de temperaturas $T_{h2} - T_{c2}$ necesaria para la sustitución en la ecuación (7-22) despejando el valor de T_{h2} , de la ecuación (7-5), con lo que se obtiene

$$T_{h2} = T_{h1} - \frac{C_{\min}}{C_{\max}}(T_{c1} - T_{c2})$$

en consecuencia

$$T_{h2} - T_{c2} = T_{h1} - T_{c2} - \frac{C_{\min}}{C_{\max}}(T_{c1} - T_{c2}) \quad (7-25)$$

Usando la ecuación (7-23), se reorganiza esta expresión en la forma

$$T_{h2} - T_{c2} = \frac{T_{c1} - T_{c2}}{\mathcal{E}} - \frac{C_{\min}}{C_{\max}}(T_{c1} - T_{c2})$$

o sea

$$T_{h2} - T_{c2} = \left(\frac{1}{\mathcal{E}} - \frac{C_{\min}}{C_{\max}}\right)(T_{c1} - T_{c2}) \quad (7-26)$$

Ahora se sustituyen las ecuaciones (7-24) y (7-26) en la ecuación (7-22). Rearreglando ligeramente se obtiene

$$\ln \frac{\frac{1}{\mathcal{E}} - \frac{C_{\min}}{C_{\max}}}{\frac{1}{\mathcal{E}} - 1} = \frac{UA}{C_{\min}} \left(1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}}\right)$$

Sacando antilogaritmos en ambos de esta expresión, se obtiene el valor de \mathcal{E}

$$\mathcal{E} = \frac{1 - \exp \left[-\frac{UA}{C_{\min}} \left(1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}}\right) \right]}{1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}} \exp \left[-\frac{UA}{C_{\min}} \left(1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}}\right) \right]}
 \quad (7-27)$$

El lector recordará que la ecuación (7-27) se obtiene suponiendo que el fluido frío es el mínimo. Es sencillo demostrar que se obtiene la misma expresión para el fluido caliente como el mínimo. En consecuencia, con UA/C_{\min} designado por NUT, el *número de unidades de transferencia*, se tiene, como expresión general para la operación de contraflujo, la ecuación

$$\mathcal{E} = \frac{1 - \exp[-NTU(1 - C_{\min}/C_{\max})]}{1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}} \exp[-NTU(1 - C_{\min}/C_{\max})]} \quad (7-28)$$

En el caso del flujo paralelo, un análisis semejante al que se acaba de desarrollar, dará, para \mathcal{E} , la expresión

$$\mathcal{E} = \frac{1 - \exp[-NTU(1 + C_{\min}/C_{\max})]}{1 + C_{\min}/C_{\max}} \quad (7-29)$$

Las dos últimas ecuaciones para los intercambiadores de calor de un paso relacionan la efectividad \mathcal{E} en función de los dos parámetros NUT y C_{\min}/C_{\max} . Parece razonable que se representen gráficamente estas expresiones para su fácil uso. Kays y London⁶ han generado gráficas de la efectividad del intercambiador de calor para estos casos de una sola pasada y para distintos arreglos de coraza y tubo y flujo cruzado. Las figuras 7.11 y 7.12 muestran gráficas de \mathcal{E} para configuraciones de contraflujo, flujo paralelo y configuraciones compactas selectas.

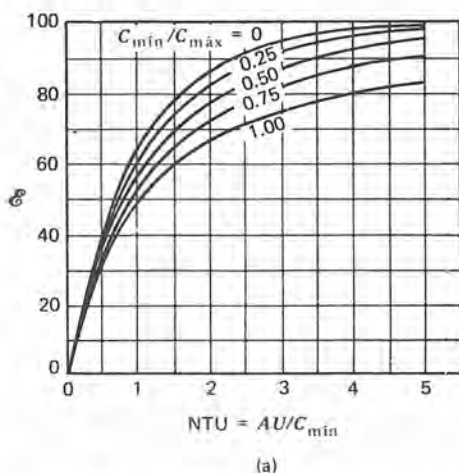
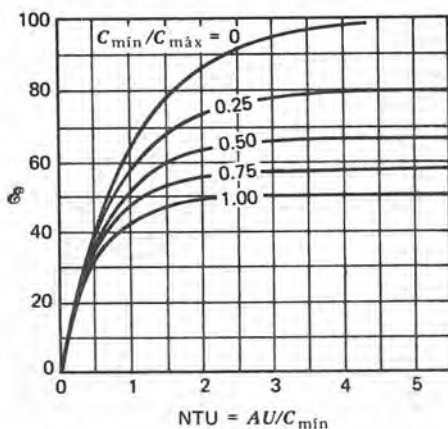
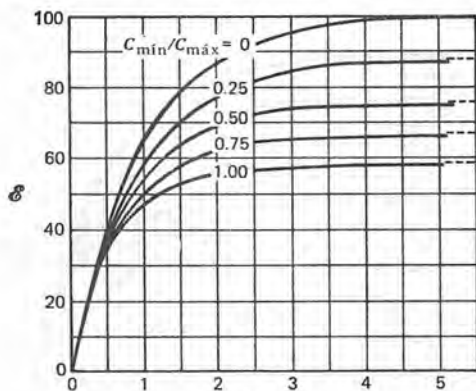


Figura 7.11 Efectividad de intercambiador de calor para configuraciones de una sola pasada y coraza y tubo. a) Contraflujo de una sola pasada. [De W. A. Kays y A. L. London, *Compact Heat Exchangers*, 2a. ed. (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1964). Con permiso del editor.]

⁶ Kays y London, op. cit.



(b)



(c)



Figura 7.11 (b) Flujo paralelo de una sola pasada. c) coraza y tubo con una sola pasada de coraza y dos o un múltiplo de dos pasadas de tubo. [De W. A. Kays y A. L. London, *Compact Heat Exchangers*, 2a. ed. (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1964). Con permiso del editor.]

Se pueden emplear las ecuaciones (7-21), junto con las gráficas de efectividad, tanto para diseñar intercambiadores de calor como para evaluar el equipo existente. Los ejemplos siguientes ilustran estas aplicaciones.

Ejemplo 7.3

Se requiere volver a desarrollar el ejemplo 7.2, utilizando el enfoque de la efectividad del intercambiador de calor para determinar el área requerida. De los cálculos anteriores, se han establecido los siguiente valores.

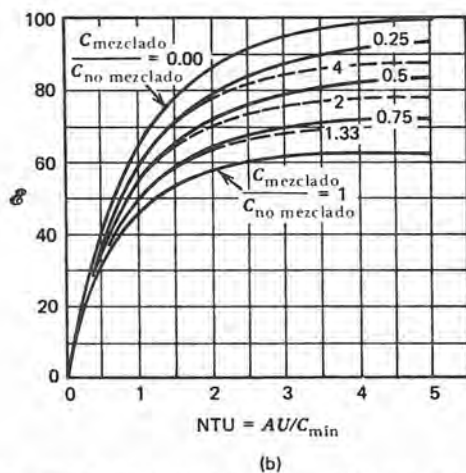
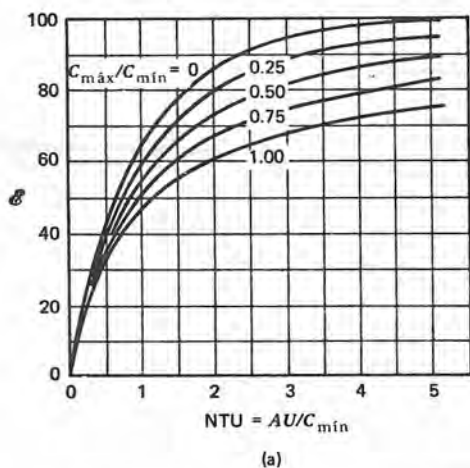


Figura 7.12 Efectividad de intercambiador de calor para tres configuraciones de flujo cruzado. a) Flujo cruzado, ambos fluidos no mezclados. b) Flujo cruzado, un fluido no mezclado. [De W. A. Kays y A. L. London, *Compact Heat Exchangers*, 2a. ed. (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1964). Con permiso del editor.]

$$q = 185,000 \text{ Btu/hr}$$

$$C_{\text{H}_2\text{O}} = 5000 \text{ Btu/hr-}^\circ\text{F}$$

$$T_{\text{H}_2\text{O Sal}} = 92^\circ\text{F}$$

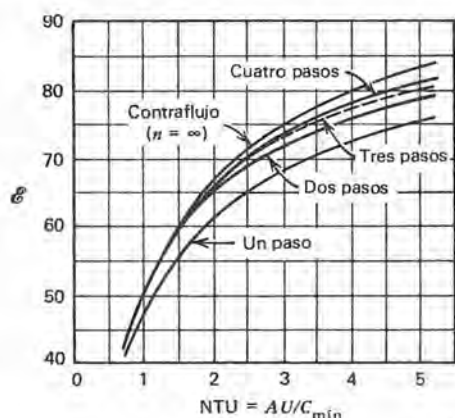
$$C_{\text{Benc}} = 3360 \text{ Btu/hr-}^\circ\text{F}$$

Se ve que el benceno es el fluido mínimo.

Usando la ecuación (7-21) se puede determinar el valor requerido de ε

$$\varepsilon = \frac{q}{C_{\min}(T_{h\text{ entrada}} - T_{c\text{ entrada}})} = \frac{185,000 \text{ Btu/hr}}{(3360 \text{ Btu/hr-}^\circ\text{F})(170 - 55)^\circ\text{F}} = 0.479$$

Este valor y el valor numérico $C_{\min}/C_{\max} = (3360/5000) = 0.672$ permiten determinar NUT para cada una de las configuraciones de que se trata.



(c)

Figura 7.12 (c) Flujo cruzado, pasadas múltiples, ambos fluidos no mezclados. [De W. A. Kays y A. L. London, *Compact Heat Exchangers*, 2a. ed. (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1964). Con permiso del editor.]

Para el caso de contraflujo y una sola pasada, $NUT = UA/C_{\min} \simeq 0.8$, el área requerida se determina en la forma

$$A = \frac{0.8 C_{\min}}{U} = \frac{0.8(3360 \text{ Btu/hr-}^{\circ}\text{F})}{55 \text{ Btu/hr ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}} = 48.9 \text{ ft}^2$$

Para b), con una pasada de coraza y cuatro pasadas de tubo, la figura 7.11 c) da el valor $NUT = UA/C_{\min} \simeq 0.85$,

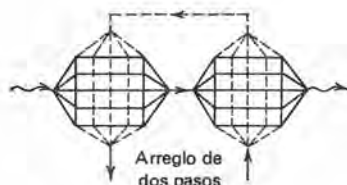
$$A = \frac{0.85 C_{\min}}{U} = \frac{0.85(3360 \text{ Btu/hr-}^{\circ}\text{F})}{55 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}} = 51.9 \text{ ft}^2$$

y para el caso de flujo cruzado con una sola pasada con agua mezclada y benceno no mezclado, la figura 7.12(b) da $NUT = UA/C_{\min} \simeq 0.85$, para la que el área requerida es la misma que en b), 51.9 ft².

En este ejemplo, el trabajo necesario para llegar a la respuesta es aproximadamente igual al correspondiente en el método de $\Delta T_{\text{media logarítmica}}$. Un caso en que el enfoque del uso de la efectividad de intercambiador de calor es claramente superior lo ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.4

Un intercambiador de calor de coraza y tubo con una pasada de coraza y cuatro pasadas de tubo tiene 52 ft² de área de transferencia de calor. El coeficiente de transferencia de calor total efectivo de esta unidad es igual a 55 Btu/hr-ft²-°F. Este intercambiador se diseñó para emplearse con agua y benceno. Ahora se propone enfriar una corriente de aceite ($c_p = 0.53 \text{ Btu/lb}_m\text{-}^{\circ}\text{F}$) a 250°F que fluye a razón de 12.000 lb_m/hr, con agua refrigerante, a la temperatura de 55°F y que fluye a razón de 5000 lb/hr. En esta aplicación, ¿cuáles son las temperaturas de salida de las dos corrientes de fluidos?



Se puede escribir la transferencia de calor usando cuatro expresiones. La primera ley de la termodinámica, ecuaciones (7-3) y (7-4) da el resultado

$$\begin{aligned} q &= C_c(T_{c\text{ sal}} - T_{c\text{ en}}) \\ &= (5000 \text{ lb}_m/\text{hr})(1 \text{ Btu}/\text{lb}_m\text{-}^\circ\text{F})(T_{\text{H}_2\text{O sal}} - 55^\circ\text{F}) \\ &= 5000(T_{\text{H}_2\text{O en}} - 55) \text{ Btu/hr} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} q &= C_H(T_{h\text{ en}} - T_{h\text{ sal}}) \\ &= (12,000 \text{ lb}_m/\text{hr})(0.53 \text{ Btu}/\text{lb}_m\text{-}^\circ\text{F})(250 - T_{\text{sal. aceite}}) \\ &= 6360(250 - T_{\text{sal. aceite}}) \end{aligned} \quad (2)$$

La ecuación (7-18) es la expresión apropiada ΔT_{lm} . Escrita en forma adecuada para este problema, la ecuación (7-18) queda en la forma

$$\begin{aligned} q &= UAF \Delta T_{lm} \\ &= (55 \text{ Btu}/\text{hr}\text{-ft}^2\text{-}^\circ\text{F})(52 \text{ ft}^2)F \left[\frac{(T_{\text{aceite}} - 55) - (250 - T_{\text{H}_2\text{O}})}{\ln \frac{T_{\text{aceite}} - 55}{250 - T_{\text{H}_2\text{O}}}} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

La última de las ecuaciones que se requiere escribir es la (7-21).

$$\begin{aligned} q &= \mathcal{E} C_{\min}(T_{\text{sal. aceite}} - T_{\text{en. H}_2\text{O}}) \\ &= \mathcal{E}(5000 \text{ Btu}/\text{hr}\text{-}^\circ\text{F})(250 - 50)^\circ\text{F} \\ &= \mathcal{E}(10^6) \text{ Btu/hr} \end{aligned} \quad (4)$$

Se deben satisfacer las ecuaciones (1), (2), (3), y (4); las cuales contienen tres incógnitas: q , $T_{\text{H}_2\text{O salida}}$, y $T_{\text{sal. aceite}}$.

Si se usaran las ecuaciones (1), (2) y (3) para resolver este problema, se necesitaría utilizar un procedimiento de prueba y error. Las temperaturas incógnitas están implicadas en el argumento de un logaritmo en la ecuación (3); adicionalmente, el factor F es una función también de las temperaturas incógnitas, y se determina por medio de gráficas. Aunque el procedimiento para resolver el problema en esta forma no es muy difícil, tal prospecto no es tampoco muy atractivo.

Se pueden usar las ecuaciones (1) y (2) junto con (4) en forma bastante directa sin involucrar métodos empíricos de pruebas sucesivas. Definitivamente, este enfoque es más atractivo que el recién mencionado. Realizando los cálculos necesarios,

$$\begin{aligned} \frac{C_{\min}}{C_{\max}} &= \frac{5000}{6360} = 0.786 \\ \frac{UA}{C_{\min}} &= \frac{(55 \text{ Btu}/\text{hr}\text{-ft}^2\text{-}^\circ\text{F})(52 \text{ ft}^2)}{5000 \text{ Btu}/\text{hr}\text{-}^\circ\text{F}} = 0.572 \\ \mathcal{E} &\simeq 0.36 \end{aligned}$$

Ahora se calcula el calor transferido de (4) en la forma

$$q = 0.36(10^6) \text{ Btu/hr} = 360,000 \text{ Btu/hr}$$

y se pueden calcular las temperaturas de salida de (1) y (2), lo que da

$$\begin{aligned} T_{\text{H}_2\text{O sal}} &= 55^\circ\text{F} + \frac{360,000 \text{ Btu/hr}}{5000 \text{ Btu/hr-}^\circ\text{F}} \\ &= 55^\circ\text{F} + 72^\circ\text{F} = 127^\circ\text{F} \\ T_{\text{aceite sal}} &= 250^\circ\text{F} - \frac{360,000 \text{ Btu/hr}}{6360 \text{ Btu/hr-}^\circ\text{F}} = 193^\circ\text{F} \end{aligned}$$

Es conveniente hacer algunos comentarios con relación a las gráficas de efectividad del intercambiador de calor. En cada caso, el valor de \mathcal{E} alcanza un máximo en algún modesto valor de NUT, del orden de 2 a 5. Para áreas mayores de transferencia de calor, aumenta el valor de NUT; sin embargo, la efectividad del intercambiador de calor no muestra aumento significativo, una vez que se aproxima al valor máximo. En consecuencia, es falso el concepto que todo aumento en el área de transferencia de calor en un intercambiador está acompañado por un aumento correspondiente en la capacidad del intercambiador.

El lector notará también que nunca se pueden lograr determinados valores de \mathcal{E} para determinadas configuraciones de equipo y condiciones de operación. Por ejemplo, en un caso de contraflujo y una sola pasada con $C_{\text{mín}}/C_{\text{máx}} = 1$, es poco práctico un valor de $\mathcal{E} = 0.90$.

El ejemplo 7.5 representa un enfoque típico al diseño del intercambiador de calor.

Ejemplo 7.5

Se dispone de agua a 60°F como refrigerante con un flujo de $150 \text{ lb}_\text{m}/\text{min}$. Se debe llegar a la temperatura de 140°F intercambiando calor con un aceite ($c_p = 0.45 \text{ Btu}/\text{lb}_\text{m}\text{-}^\circ\text{F}$). El aceite entra al intercambiador a 240°F y sale a 80°F . El coeficiente de transferencia de calor total es de $50 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^\circ\text{F}$. Determinar

- el área requerida en un intercambiador de contraflujo de una sola pasada.
- el área requerida si se emplea un intercambiador de coraza y tubo, en que el agua hace una pasada de coraza y el aceite dos pasadas de tubo.
- las temperaturas de salida si, para el intercambiador de (a), se disminuye la razón de flujo del agua a $120 \text{ lb}_\text{m}/\text{min}$.

Resolviendo este problema, primero se determina la transferencia requerida de calor de la razón de flujo de agua.

$$\begin{aligned} q &= C_{\text{H}_2\text{O}} \Delta T_{\text{H}_2\text{O}} \\ &= (150 \text{ lb}_\text{m}/\text{min})(1 \text{ Btu}/\text{lb}_\text{m}\text{-}^\circ\text{F})(80^\circ\text{F}) \\ &= 12,000 \text{ Btu}/\text{min} \end{aligned}$$

Se pueden usar los enfoques de ΔT_{lm} o el de efectividad para obtener el área en a). Se utiliza el de NUT/efectividad; se determinan las cantidades necesarias como sigue

$$\begin{aligned}
 q &= C_{H_2O} \Delta T_{H_2O} = C_{aceite} \Delta T_{aceite} \\
 C_{H_2O} &= 150 \text{ Btu/min-}^\circ\text{F} \\
 C_{aceite} &= \frac{12,000 \text{ Btu/min}}{160^\circ\text{F}} = 75 \text{ Btu/min-}^\circ\text{F}
 \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
 C_{aceite} &= C_{\min} \\
 NTU &= \frac{UA}{C_{\min}} = \frac{(50 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^\circ\text{F})(A \text{ ft}^2)}{(75 \text{ Btu/min-}^\circ\text{F})(60 \text{ min/hr})} \\
 &= 0.0111A \text{ ft}^2 \\
 \mathcal{E} &= \frac{q_{\text{actual}}}{q_{\text{máx}}} = \frac{12,000 \text{ Btu/min}}{C_{\min}(T_{h \text{ en}} - T_{c \text{ en}})} \\
 &= \frac{12,000 \text{ Btu/min}}{(75 \text{ Btu/min-}^\circ\text{F})(240^\circ\text{F} - 60^\circ\text{F})} = 0.889 \\
 C_{\min}/C_{\text{máx}} &= 0.5
 \end{aligned}$$

De la figura 7.11(a), $NUT \simeq 3.3$, y el área requerida es

$$A = 3.3/0.0111 = 297 \text{ ft}^2$$

Para b), el enfoque de NUT/efectividad comprende los mismos valores para los parámetros NUT, \mathcal{E} y $C_{\min}/C_{\text{máx}}$.

De la figura 7.11(c) se ve que las condiciones de este problema son imposibles por lo que respecta a la configuración de coraza y tubo. Usando el intercambiador de coraza y tubo para corrientes con las razones de flujo y las temperaturas de entrada especificadas, se logra *menor* transferencia de calor y los cambios de temperatura de las dos corrientes de fluido son menores que en el enunciado del problema.

Para obtener c) de este ejemplo, se tiene ahora

$$\begin{aligned}
 A &= 297 \text{ ft}^2 \\
 C_{H_2O} &= \left(120 \frac{\text{lb}_m}{\text{min}}\right)(1 \text{ Btu/lb}_m\text{-}^\circ\text{F}) = 120 \frac{\text{Btu}}{\text{min-}^\circ\text{F}} \\
 C_{aceite} &= 75 \text{ Btu/min-}^\circ\text{F}, \text{ por lo que } C_{aceite} \text{ is } C_{\min} \\
 NTU &= \frac{UA}{C_{\min}} = 3.3 \\
 \frac{C_{\min}}{C_{\text{máx}}} &= \frac{75}{120} = 0.625
 \end{aligned}$$

y, leyendo en la figura 7.11(a), se obtiene $\mathcal{E} = 0.86$. Ahora se puede determinar q en la forma

$$\begin{aligned}
 q &= \mathcal{E} C_{\min}(T_{h \text{ en}} - T_{c \text{ en}}) \\
 &= 0.86(75 \text{ Btu/min-}^\circ\text{F})(240^\circ\text{F} - 60^\circ\text{F}) \\
 &= 11,610 \text{ Btu/min}
 \end{aligned}$$

De este resultado es fácil determinar cada una de las temperaturas de las corrientes de salida.

$$q = C_{H_2O}(T_{H_2O \text{ sal}} - T_{H_2O \text{ en}}) = C_{\text{aceite}}(T_{\text{en. aceite}} - T_{\text{sal. aceite}})$$

$$T_{\text{sal. } H_2O} = 60 + \frac{11,610 \text{ Btu/min}}{120 \text{ Btu/min-}^\circ\text{F}} = 157^\circ\text{F}$$

$$T_{\text{sal. aceite}} = 240^\circ\text{F} - \frac{11,610 \text{ Btu/min}}{75 \text{ Btu/min-}^\circ\text{F}} = 85.2^\circ\text{F}$$

En este ejemplo, c) fue una evaluación relativamente sencilla, usando el enfoque de NUT/efectividad, en tanto que hubiera sido necesario un procedimiento laborioso de prueba y error si se hubiera usado el enfoque de ΔT_{lm} .

7.5 CONSIDERACIONES ADICIONALES EN EL ANALISIS Y DISEÑO DE INTERCAMBIADORES DE CALOR

7.5-1 Ensuciamiento del intercambiador de calor

Cuando se ha mantenido en uso prolongado un intercambiador de calor, es seguro que se forme sarro en las superficies de los tubos o que se deteriore la propia superficie debido a la corrosión. Con el tiempo, estos efectos alteran el funcionamiento del intercambiador. A la superficie de transferencia de calor que se ha afectado en esa forma se le llama "sucia".

Normalmente se considera que una superficie sucia es la que presenta alguna resistencia adicional a la transferencia del calor debido a la acumulación de materias extrañas o "sarro". Esta resistencia térmica adicional provoca en forma natural que la transferencia de calor sea inferior a la correspondiente en el caso que no haya resistencia de suciedad.

Predecir la acumulación de sarro o el efecto correspondiente en la transferencia del calor es una labor muy difícil. Se puede evaluar el desempeño real de un intercambiador de calor después de un período de servicio, y de ahí determinar la resistencia por ensuciamiento. Con una superficie limpia,

$$q_o = U_o A \Delta T_{lm} = \frac{\Delta T_{lm}}{\sum R_{to}} \quad (7-30)$$

En forma análoga, para una superficie sucia,

$$q_f = U_f A \Delta T_{lm} = \frac{\Delta T_{lm}}{\sum R_{tf}} \quad (7-31)$$

en donde $\sum R_{to}$ y $\sum R_{tf}$ representan la resistencia térmica total para las superficies limpia y sucia respectivamente.

En el caso de una superficie limpia,

$$U_o = \frac{1}{\frac{1}{h_o} + \frac{A_o \ln(r_o/r_i)}{2\pi k} + \frac{A_o}{A_i h_i}} \quad (7-32)$$

donde los términos en el denominador son las resistencias térmicas debidas a la convección en la superficie exterior de los tubos, la conducción a través de la pared de los tubos, y la convección en la superficie interior de los tubos respectivamente.

Para una superficie sucia, la expresión para U es

$$U_f = \frac{1}{\frac{1}{h_o} + R_o + \frac{A_o \ln(r_o/r_i)}{2\pi k} + R_i + \frac{A_o}{A_i h_i}} \quad (7-33)$$

en la cual los términos adicionales R_o y R_i representan las resistencias de ensuciamiento en las superficies exterior e interior del tubo respectivamente. En la Tabla 7.1 se proporcionan algunos valores típicos de resistencia de ensuciamiento que se deben emplear en la ecuación (7-33). La Tubular Exchanger Manufacturers Association⁷ sugiere estos valores.

Tabla 7.1 Resistencia de ensuciamiento para determinados fluidos en los intercambiadores de calor

<i>FLUIDO</i>	<i>RESISTENCIA DE ENSUCIAMIENTO (hr-ft²-°F/Btu)</i>
Agua destilada	0.0005
Agua de mar, por debajo de 125°F	0.0005
por arriba de 125°F	0.001
Agua tratada para caldera	0.001
Agua potable o de pozo, por debajo de 125°F	0.001
por arriba de 125°F	0.002
Líquidos de refrigeración	0.001
Vapores de refrigeración	0.002
Gasolina líquida y vapores orgánicos	0.0005
Aceite combustible	0.005
Aceite de enfriamiento	0.004
Vapor sin aceite	0.0005
Aire industrial	0.002

⁷ TEMA ; OP: CIT:

La Tabla 7.2 da algunos valores representativos del coeficiente de transferencia de calor global para distintas combinaciones de fluidos. Mueller⁸ sugirió los valores listados. No se debe considerar que estos valores son exactos, sino solamente representativos de las magnitudes que se deben esperar en los intercambiadores de calor con las combinaciones listadas de fluidos.

Tabla 7.2 Coeficientes de transferencia de calor global valores aproximados

COMBINACION DE FLUIDOS	$U(\text{Btu/hr-ft}^2\text{°F})$
Agua a aire comprimido	10-30
Agua a agua, camisas de enfriamiento	150-275
Agua a salmuera	100-200
Agua a gasolina	60-90
Agua a gas de petróleo o un destilado	35-60
Agua a solventes orgánicos, alcohol	50-150
Agua a alcohol de condensación	45-120
Agua a aceite de lubricación	20-60
Agua a vapores de aceite de condensación	40-100
Agua a Freón-12 de condensación o de ebullición	50-150
Agua a amonio de condensación	150-250
Vapor a agua, calentador instantáneo	400-600
de caldera almacenaje-tanque	175-300
Vapor a aceite, combustible pesado	10-30
combustible ligero	30-60
destilado ligero de petróleo	50-200
Vapor a soluciones acuosas	100-600
Vapor a gases	5-50
Orgánicos ligeros a orgánicos ligeros	40-75
Orgánicos medianos a orgánicos medianos	20-60
Orgánicos pesados a orgánicos pesados	10-40
Orgánicos pesados a orgánicos ligeros	10-60
Petróleo crudo a gas de petróleo	30-55

7.6 CONCLUSION

En este capítulo se estudió la clasificación, nomenclatura estándar y técnicas cuantitativas para el diseño y análisis de intercambiadores de calor. Las siguientes ecuaciones proporcionan la base para todos estos análisis:

⁸ A. C. Mueller, *Purdue Univ. Eng. Expt. Sta., Engr. Bulletin Res. Ser.* 121 (1954).

$$q = C_c(T_{c \text{ salida}} - T_{c \text{ entrada}}) \quad (7-3)$$

$$q = C_H(T_{h \text{ entrada}} - T_{h \text{ salida}}) \quad (7-4)$$

$$q = UAF\Delta T_{lm} \quad (7-18)$$

$$q = \mathcal{E}C_{\min}(T_{h \text{ entrada}} - T_{c \text{ entrada}}) \quad (7-21)$$

Se incluyen tablas para proporcionar la forma de obtener F y \mathcal{E} para configuraciones de intercambiadores de una sola pasada y compactos.

El enfoque de ΔT_{lm} al diseño y análisis de intercambiadores está representado por la ecuación (7-18). El enfoque de NUT/efectividad utiliza la ecuación (7-21). Cualquiera de las técnicas es válida; sin embargo, el segundo enfoque es más sencillo de utilizar cuando se opera un intercambiador en condiciones distintas a las de diseño.

Se dio una lista de las resistencias de ensuciamiento para proporcionar una forma aproximada de predecir el funcionamiento del intercambiador de calor cuando se ha formado sarro durante un largo período de operación del equipo.

Propiedades materiales

A-1 Propiedades físicas de los sólidos

<i>Material</i>	ρ (lb _m /ft ³)	c_p (Btu/lb _m °F)	α (ft ² /hr)	k (Btu/hr-ft°F)		
	(68°F)	(68°F)	(68°F)	(68°F)	(212°F)	(572°F)
<i>Metales</i>						
Aluminio	168.6	0.224	3.55	132	132	133
Cobre	555	0.092	3.98	223	219	213
Oro	1206	0.031	4.52	169	170	172
Fierro	492	0.122	0.83	42.3	39.0	31.6
Plomo	708	0.030	0.80	20.3	19.3	17.2
Magnesio	109	0.248	3.68	99.5	96.8	91.4
Níquel	556	0.111	0.87	53.7	47.7	36.9
Platino	1340	0.032	0.09	40.5	41.9	43.5
Plata	656	0.057	6.42	240	237	209
Estaño	450	0.051	1.57	36	34	...
Tungsteno	1206	0.032	2.44	94	87	77
Uranio α	1167	0.027	0.53	16.9	17.2	19.6
Zinc	446	0.094	1.55	65	63	58
<i>Aleaciones</i>						
Aluminio 2024	173	0.23	1.76	70.2		
Latón (70% Cu, 30% Zn)	532	0.091	1.27	61.8	73.9	85.3

(sigue)

<i>Material</i>	ρ	c_p	α	k		
	(lb _m /ft ³) (68°F)	(Btu/lb _m °F) (68°F)	(ft ² /hr) (68°F)	(Btu/hr-ft°F) (68°F)	(212°F)	(572°F)
<i>Aleaciones</i>						
Constatán						
(60% Cu, 40% Ni)	557	0.098	0.24	13.1	15.4	
Fierro, fundido	455	0.100	0.65	29.6	26.8	
Nicromo V	530	0.106	0.12	7.06	7.99	9.94
Acero inoxidable	488	0.110	0.17	9.4	10.0	13
Acero, suave (1% C)	488	0.113	0.45	24.8	24.8	22.9
<i>No metales</i>						
Asbesto	36	0.25		0.092	0.11	0.125
Tabique (arcilla refractaria)	144	0.22			0.65	
Tabique (de construcción)	106	0.20		0.38		
Tabique (cromo)	188	0.20			0.67	
Concreto	144	0.21		0.70		
Lámina de corcho	10	0.4		0.025		
Tierra diatomácea, pulverizada	14	0.2		0.03		
Vidrio, de ventana	170	0.2		0.45		
Vidrio, Pyrex	140	0.2		0.63	0.67	0.84
Tabique refractario de kaolín	19					0.052
Magnesia al 85%	17			0.038	0.041	
Marga arenosa, 4% H ₂ O	104	~0.4		0.54		
Marga arenosa, 10% H ₂ O	121			1.08		
Lana de roca	~10	0.2		0.023	0.033	
Madera, roble, ⊥ a veta	51	0.57		0.12		
Madera, roble, a la veta	51	0.57		0.23		

A-2 Propiedades físicas de los líquidos

<i>Líquidos</i>							
T (°F)	ρ (lb _m /ft ³)	c_p (Btu/lb _m -°F)	$\mu \times 10^3$ (lb _m /ft-sec)	$\nu \times 10^5$ (ft ² /sec)	k (Btu/hr-ft-°F)	$\alpha \times 10^3$ (ft ² /hr)	Pr
						$\beta \times 10^4$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2 \times 10^{-6}$ (1/°F-ft ³)
<i>Agua</i>							
32	62.4	1.01	1.20	1.93	0.319	5.06	13.7
60	62.3	1.00	0.760	1.22	0.340	5.45	8.07
80	62.2	0.999	0.578	0.929	0.353	5.67	5.89
100	62.1	0.999	0.458	0.736	0.364	5.87	4.51
150	61.3	1.00	0.290	0.474	0.383	6.26	2.72
200	60.1	1.01	0.206	0.342	0.392	6.46	1.91
250	58.9	1.02	0.160	0.272	0.395	6.60	1.49
300	57.3	1.03	0.130	0.227	0.395	6.70	1.22
400	53.6	1.08	0.0930	0.174	0.382	6.58	0.950
500	49.0	1.19	0.0700	0.143	0.349	5.98	0.859
600	42.4	1.51	0.0579	0.137	0.293	4.58	1.07
							17.5
							30,300

(sigue hasta la página)

T (°F)	ρ (lb _m /ft ³)	c_p (Btu/lb _m -°F)	$\mu \times 10^5$ (lb _m /ft-sec)	$\nu \times 10^5$ (ft ² /sec)	k (Btu/hr-ft-°F)	$\alpha \times 10^3$ (ft ² /hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2 \times 10^{-6}$ (1/°F-ft ³)
-------------	---	------------------------------------	--	---	-----------------------	---	----	-------------------------------	--

Anilina

60	64.0	0.480	305	4.77	0.101	3.29	52.3		
80	63.5	0.485	240	3.78	0.100	3.25	41.8		
100	63.0	0.490	180	2.86	0.100	3.24	31.8	0.45	17.7
150	61.6	0.503	100	1.62	0.0980	3.16	18.4		
200	60.2	0.515	62	1.03	0.0962	3.10	12.0		
250	58.9	0.527	42	0.714	0.0947	3.05	8.44		
300	57.5	0.540	30	0.522	0.0931	2.99	6.28		

T (°F)	ρ (lb _m /ft ³)	c_p (Btu/lb _m -°F)	$\mu \times 10^5$ (lb _m /ft-sec)	$\nu \times 10^5$ (ft ² /sec)	k (Btu/hr-ft-°F)	$\alpha \times 10^3$ (ft ² /hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2 \times 10^{-7}$ (1/°F-ft ³)
-------------	---	------------------------------------	--	---	-----------------------	---	----	-------------------------------	--

Amoníaco

-60	43.9	1.07	20.6	0.471	0.316	6.74	2.52	0.94	132
-30	42.7	1.07	18.2	0.426	0.317	6.93	2.22	1.02	265
0	41.3	1.08	16.9	0.409	0.315	7.06	2.08	1.1	467
30	40.0	1.11	16.2	0.402	0.312	7.05	2.05	1.19	757
60	38.5	1.14	15.0	0.391	0.304	6.92	2.03	1.3	1130
80	37.5	1.16	14.2	0.379	0.296	6.79	2.01	1.4	1650
100	36.4	1.19	13.5	0.368	0.287	6.62	2.00	1.5	2200
120	35.3	1.22	12.6	0.356	0.275	6.43	2.00	1.68	3180

T (°F)	ρ (lb _m /ft ³)	c_p (Btu/lb _m ·°F)	$\mu \times 10^5$ (lb _m /ft·seg)	$\nu \times 10^5$ (ft ² /seg)	k (Btu/hr·ft·°F)	$\alpha \times 10^3$ (ft ² /hr)	Pr	$\beta \times 10^4$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2 \times 10^{-6}$ (1/°F·ft ³)
<i>Freon-12</i>									
-40	94.5	0.202	125	1.32	0.0650	3.40	14.0	9.10	168
-30	93.5	0.204	123	1.32	0.0640	3.35	14.1	9.60	179
0	90.9	0.212	116	1.28	0.0578	3.00	15.4	11.4	225
30	87.4	0.221	108	1.24	0.0564	2.92	15.3	13.1	277
60	84.0	0.230	99.6	1.19	0.0528	2.74	15.6	14.9	341
80	81.3	0.238	94.0	1.16	0.0504	2.60	16.0	16.0	384
100	78.7	0.246	88.4	1.12	0.0480	2.48	16.3	17.2	439
150	71.0	0.271	74.8	1.05	0.0420	2.18	17.4	19.5	625

T (°F)	ρ (lb _m /ft ³)	c_p (Btu/lb _m ·°F)	$\mu \times 10^5$ (lb _m /ft·seg)	$\nu \times 10^5$ (ft ² /seg)	k (Btu/hr·ft·°F)	$\alpha \times 10^3$ (ft ² /hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2 \times 10^{-6}$ (1/°F·ft ³)
<i>Alcohol n-butílico</i>									
60	50.5	0.55	225	4.46	0.100	3.59	44.6		
80	50.0	0.58	180	3.60	0.099	3.41	38.0	0.25	6.23
100	49.6	0.61	130	2.62	0.098	3.25	29.1	0.43	2.02
150	48.5	0.68	68	1.41	0.098	2.97	17.1		

T (°F)	ρ (lb _m /ft ³)	c_p (Btu/lb _m -°F)	$\mu \times 10^5$ (lb _m /ft-seg)	$\nu \times 10^5$ (ft ² /seg)	k (Btu/hr-ft-°F)	$\alpha \times 10^3$ (ft ² /hr)	Pr	$\beta \times 10^4$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2 \times 10^{-6}$ (1/°F-ft ³)
<i>Benceno</i>									
60	55.2	0.395	44.5	0.806	0.0856	3.93	7.39		
80	54.6	0.410	38	0.695	0.0836	3.73	6.70	7.5	498
100	53.6	0.420	33	0.615	0.0814	3.61	6.13	7.2	609
150	51.8	0.450	24.5	0.473	0.0762	3.27	5.21	6.8	980
200	49.9	0.480	19.4	0.390	0.0711	2.97	4.73		

T (°F)	ρ (lb _m /ft ³)	c_p (Btu/lb _m -°F)	$\mu \times 10^5$ (lb _m /ft-seg)	$\nu \times 10^5$ (ft ² /seg)	k (Btu/hr-ft-°F)	$\alpha \times 10^3$ (ft ² /hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2 \times 10^{-4}$ (1/°F-ft ³)
<i>Fluido hidráulico (MIL-M-5606)</i>									
0	55.0	0.400	5550	101	0.0780	3.54	1030	0.76	2.39
30	54.0	0.420	2220	41.1	0.0755	3.32	446	0.68	13.0
60	53.0	0.439	1110	20.9	0.0732	3.14	239	0.60	44.1
80	52.5	0.453	695	13.3	0.0710	3.07	155	0.52	95.7
100	52.0	0.467	556	10.7	0.0690	2.84	136	0.47	132
150	51.0	0.499	278	5.45	0.0645	2.44	80.5	0.32	346
200	50.0	0.530	250	5.00	0.0600	2.27	79.4	0.20	258

T (°F)	ρ (lb _m /ft ³)	c_p (Btu/lb _m -°F)	μ (lb _m /ft-seg)	$\nu \times 10^2$ (ft ² /seg)	k (Btu/hr-ft-°F)	$\alpha \times 10^3$ (ft ² /hr)	$Pr \times 10^{-2}$	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2$ (1/°F-ft ³)
<i>Glycerina</i>									
30	79.7	0.540	7.2	9.03	0.168	3.91	832		
60	79.1	0.563	1.4	1.77	0.167	3.75	170		
80	78.7	0.580	0.6	0.762	0.166	3.64	75.3	0.30	166
100	78.2	0.598	0.1	0.128	0.165	3.53	13.1		

T (°F)	ρ (lb _m /ft ³)	c_p (Btu/lb _m -°F)	$\mu \times 10^5$ (lb _m /ft-seg)	$\nu \times 10^5$ (ft ² /seg)	k (Btu/hr-ft-°F)	$\alpha \times 10^3$ (ft ² /hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2 \times 10^{-4}$ (1/°F-ft ³)
<i>Kerosene</i>									
30	48.8	0.456	800	16.4	0.0809	3.63	163		
60	48.1	0.474	600	12.5	0.0805	3.53	127	0.58	120
80	47.6	0.491	490	10.3	0.0800	3.42	108	0.48	146
100	47.2	0.505	420	8.90	0.0797	3.35	95.7	0.47	192
150	46.1	0.540	320	6.83	0.0788	3.16	77.9		

T (°F)	ρ (lb _m /ft ³)	c_p (Btu/lb _m -°F)	$\mu \times 10^5$ (lb _m /ft-seg)	$\nu \times 10^5$ (ft ² /seg)	k (Btu/hr-ft-°F)	$\alpha \times 10^3$ (ft ² /hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2 \times 10^{-4}$ (1/°F-ft ³)
<i>Hidrógeno líquido</i>									
-435	4.84	1.69	1.63	0.337	0.0595	7.28	1.67		
-433	4.77	1.78	1.52	0.319	0.0610	7.20	1.59		
-431	4.71	1.87	1.40	0.297	0.0625	7.09	1.51	7.1	2.59
-429	4.64	1.96	1.28	0.276	0.0640	7.03	1.41		
-427	4.58	2.05	1.17	0.256	0.0655	6.97	1.32		
-425	4.51	2.15	1.05	0.233	0.0670	6.90	1.21		

T (°F)	ρ (lb _m /ft ³)	c_p (Btu/lb _m -°F)	$\mu \times 10^5$ (lb _m /ft-seg)	$\nu \times 10^5$ (ft ² /seg)	$k \times 10^3$ (Btu/hr-ft-°F)	$\alpha \times 10^5$ (ft ² /hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2 \times 10^{-8}$ (1/°F-ft ³)
<i>Oxígeno líquido</i>									
-350	80.1	0.400	38.0	0.474	3.1	9.67	172		
-340	78.5	0.401	28.0	0.356	3.4	10.8	109		
-330	76.8	0.402	21.8	0.284	3.7	12.0	85.0		
-320	75.1	0.404	17.4	0.232	4.0	12.2	63.5	3.19	186
-310	73.4	0.405	14.8	0.202	4.3	14.5	50.1		
-300	71.7	0.406	13.0	0.181	4.6	15.8	41.2		

T (F°)	ρ (lb/ft ³)	c_p (Btu/lb _m -°F)	$\mu \times 10^3$ (lb _m /ft-seg)	$\nu \times 10^6$ (ft ² /seg)	k (Btu/hr-ft-°F)	α (ft ² /hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2 \times 10^{-9}$ (1/°F-ft ³)
<i>Bismuto</i>									
600	625	0.0345	1.09	1.75	8.58	0.397	0.0159		
700	622	0.0353	0.990	1.59	8.87	0.405	0.0141	0.062	0.786
800	618	0.0361	0.900	1.46	9.16	0.408	0.0129	0.065	0.985
900	613	0.0368	0.830	1.35	9.44	0.418	0.0116	0.068	1.19
1000	608	0.0375	0.765	1.26	9.74	0.427	0.0106	0.071	1.45
1100	604	0.0381	0.710	1.17	10.0	0.435	0.00970	0.074	1.72
1200	599	0.0386	0.660	1.10	10.3	0.446	0.00895	0.077	2.04
1300	595	0.0391	0.620	1.04	10.6	0.456	0.00820		

T (°F)	ρ (lb _m /ft ³)	c_p (Btu/lb _m -°F)	$\mu \times 10^3$ (lb _m /ft-secg)	$\nu \times 10^6$ (ft ² /secg)	k (Btu/hr-ft-°F)	α (ft ² /hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2 \times 10^{-9}$ (1/°F-ft ³)
<i>Mercurio</i>									
40	848	0.0334	1.11	1.31	4.55	0.161	0.0292		1.57
60	847	0.0333	1.05	1.24	4.64	0.165	0.0270		1.76
80	845	0.0332	1.00	1.18	4.72	0.169	0.0252		1.94
100	843	0.0331	0.960	1.14	4.80	0.172	0.0239		2.09
150	839	0.0330	0.893	1.06	5.03	0.182	0.0210		2.38
200	835	0.0328	0.850	1.02	5.25	0.192	0.0191		2.62
250	831	0.0328	0.806	0.970	5.45	0.200	0.0175		2.87
300	827	0.0328	0.766	0.928	5.65	0.209	0.0160		3.16
400	819	0.0328	0.700	0.856	6.05	0.225	0.0137	0.084	3.70
500	811	0.0328	0.650	0.803	6.43	0.243	0.0119		4.12
600	804	0.0328	0.606	0.754	6.80	0.259	0.0105		4.80
800	789	0.0329	0.550	0.698	7.45	0.289	0.0087		5.54

T (°F)	ρ (lb _m /ft ³)	c_p (Btu/lb _m -°F)	$\mu \times 10^3$ (lb _m /ft-sec)	$\nu \times 10^6$ (ft ² /sec)	k (Btu/hr-ft-°F)	α (ft ² /hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2 \times 10^{-6}$ (1/°F-ft ³)
<i>Sodio</i>									
200	58.1	0.332	0.489	8.43	49.8	2.58	0.0118		68.0
250	57.6	0.328	0.428	7.43	49.3	2.60	0.0103		87.4
300	57.2	0.324	0.378	6.61	48.8	2.64	0.00903		110
400	56.3	0.317	0.302	5.36	47.3	2.66	0.00725		168
500	55.5	0.309	0.258	4.64	45.5	2.64	0.00633	0.15	224
600	54.6	0.305	0.224	4.11	43.1	2.58	0.00574		287
800	52.9	0.304	0.180	3.40	38.8	2.41	0.00510		418
1000	51.2	0.304	0.152	2.97	36.0	2.31	0.00463		548
1300	48.7	0.305	0.120	2.47	34.2	2.31	0.00385		795

A-3 Propiedades físicas de los gases

T (°F)	ρ (lb _m /ft ³)	c_p (Btu/lb _m -°F)	$\mu \times 10^5$ (lb _m /ft-seg)	$\nu \times 10^3$ (ft ² /seg)	k (Btu/hr-ft-°F)	α (ft ² /hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2$ (1/°F-ft ³)
<i>Aire</i>									
0	0.0862	0.240	1.09	0.126	0.0132	0.639	0.721	2.18	4.39×10^6
30	0.0810	0.240	1.15	0.142	0.0139	0.714	0.716	2.04	3.28
60	0.0764	0.240	1.21	0.159	0.0146	0.798	0.711	1.92	2.48
80	0.0735	0.240	1.24	0.169	0.0152	0.855	0.708	1.85	2.09
100	0.0710	0.240	1.28	0.181	0.0156	0.919	0.703	1.79	1.76
150	0.0651	0.241	1.36	0.209	0.0167	1.06	0.698	1.64	1.22
200	0.0602	0.241	1.45	0.241	0.0179	1.24	0.694	1.52	0.840
250	0.0559	0.242	1.53	0.274	0.0191	1.42	0.690	1.41	0.607
300	0.0523	0.243	1.60	0.306	0.0203	1.60	0.686	1.32	0.454
400	0.0462	0.245	1.74	0.377	0.0225	2.00	0.681	1.16	0.264
500	0.0413	0.247	1.87	0.453	0.0246	2.41	0.680	1.04	0.163
600	0.0374	0.251	2.00	0.535	0.0270	2.88	0.680	0.944	79.4×10^3
800	0.0315	0.257	2.24	0.711	0.0303	3.75	0.684	0.794	50.6
1000	0.0272	0.263	2.46	0.906	0.0337	4.72	0.689	0.685	27.0
1500	0.0203	0.277	2.92	1.44	0.0408	7.27	0.705	0.510	7.96

Nota: Todas las propiedades de los gases son para presión atmosférica.

T (°F)	ρ (lb _m /ft ³)	c_p (Btu/lb _m -°F)	$\mu \times 10^5$ (lb _m /ft-seg)	$\nu \times 10^3$ (ft ² /seg)	k (Btu/hr-ft-°F)	α (ft ² /hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2$ (1/°F-ft ²)
<i>Vapor de agua</i>									
212	0.0372	0.493	0.870	0.234	0.0145	0.794	1.06	1.49	0.873×10^6
250	0.0350	0.483	0.890	0.254	0.0155	0.920	0.994	1.41	0.698
300	0.0327	0.476	0.960	0.294	0.0171	1.10	0.963	1.32	0.493
400	0.0289	0.472	1.09	0.377	0.0200	1.47	0.924	1.16	0.262
500	0.0259	0.477	1.23	0.474	0.0228	1.85	0.922	1.04	0.148
600	0.0234	0.483	1.37	0.585	0.0258	2.29	0.920	0.944	88.9×10^3
800	0.0197	0.498	1.63	0.828	0.0321	3.27	0.912	0.794	37.8
1000	0.0170	0.517	1.90	1.12	0.0390	4.44	0.911	0.685	17.2
1500	0.0126	0.564	2.57	2.05	0.0580	8.17	0.906	0.510	3.97

T (°F)	ρ (lb _m /ft ³)	c_p (Btu/lb _m -°F)	$\mu \times 10^5$ (lb _m /ft-seg)	$\nu \times 10^3$ (ft ² /seg)	k (Btu/hr-ft-°F)	α (ft ² /hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2$ (1/°F-ft ³)
<i>Nitrógeno</i>									
0	0.0837	0.249	1.06	0.127	0.0132	0.633	0.719	2.18	4.38×10^6
30	0.0786	0.249	1.12	0.142	0.0139	0.710	0.719	2.04	3.29
60	0.0740	0.249	1.17	0.158	0.0146	0.800	0.716	1.92	2.51
80	0.0711	0.249	1.20	0.169	0.0151	0.853	0.712	1.85	2.10
100	0.0685	0.249	1.23	0.180	0.0154	0.915	0.708	1.79	1.79
150	0.0630	0.249	1.32	0.209	0.0168	1.07	0.702	1.64	1.22
200	0.0580	0.249	1.39	0.240	0.0174	1.25	0.690	1.52	0.854
250	0.0540	0.249	1.47	0.271	0.0192	1.42	0.687	1.41	0.616
300	0.0502	0.250	1.53	0.305	0.0202	1.62	0.685	1.32	0.457
400	0.0443	0.250	1.67	0.377	0.0212	2.02	0.684	1.16	0.263
500	0.0397	0.253	1.80	0.453	0.0244	2.43	0.683	1.04	0.163
600	0.0363	0.256	1.93	0.532	0.0252	2.81	0.686	0.944	0.108
800	0.0304	0.262	2.16	0.710	0.0291	3.71	0.691	0.794	0.0507
1000	0.0263	0.269	2.37	0.901	0.0336	4.64	0.700	0.685	0.0272
1500	0.0195	0.283	2.82	1.45	0.0423	7.14	0.732	0.510	0.00785

T (°F)	ρ (lb _m /ft ³)	c_p (Btu/lb _m -°F)	$\mu \times 10^5$ (lb _m /ft-sec)	$\nu \times 10^3$ (ft ² /sec)	k (Btu/hr-ft-°F)	α (ft ² /hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2$ (1/°F-ft ³)
<i>Oxígeno</i>									
0	0.0955	0.219	1.22	0.128	0.0134	0.641	0.718	2.18	4.29×10^6
30	0.0897	0.219	1.28	0.143	0.0141	0.718	0.716	2.04	3.22
60	0.0845	0.219	1.35	0.160	0.0149	0.806	0.713	1.92	2.43
80	0.0814	0.220	1.40	0.172	0.0155	0.866	0.713	1.85	2.02
100	0.0785	0.220	1.43	0.182	0.0160	0.925	0.708	1.79	1.74
150	0.0720	0.221	1.52	0.211	0.0172	1.08	0.703	1.64	1.19
200	0.0665	0.223	1.62	0.244	0.0185	1.25	0.703	1.52	0.825
250	0.0618	0.225	1.70	0.276	0.0197	1.42	0.700	1.41	0.600
300	0.0578	0.227	1.79	0.310	0.0209	1.60	0.700	1.32	0.442
400	0.0511	0.230	1.95	0.381	0.0233	1.97	0.698	1.16	0.257
500	0.0458	0.234	2.10	0.458	0.0254	2.37	0.696	1.04	0.160
600	0.0414	0.239	2.25	0.543	0.0281	2.84	0.688	0.944	0.103
800	0.0349	0.246	2.52	0.723	0.0324	3.77	0.680	0.794	49.4×10^3
1000	0.0300	0.252	2.79	0.930	0.0366	4.85	0.691	0.685	25.6
1500	0.0224	0.264	3.39	1.52	0.0465	7.86	0.696	0.510	7.22

T (°F)	ρ (lb _m /ft ³)	c_p (Btu/lb _m -°F)	$\mu \times 10^5$ (lb _m /ft-seg)	$\nu \times 10^3$ (ft ² /seg)	k (Btu/hr-ft-°F)	α (ft ² /hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2$ (1/°F-ft ³)
<i>Bióxido de carbono</i>									
0	0.132	0.193	0.865	0.0655	0.00760	0.298	0.792	2.18	16.3×10^6
30	0.124	0.198	0.915	0.0739	0.00830	0.339	0.787	2.04	12.0
60	0.117	0.202	0.965	0.0829	0.00910	0.387	0.773	1.92	9.00
80	0.112	0.204	1.00	0.0891	0.00960	0.421	0.760	1.85	7.45
100	0.108	0.207	1.03	0.0953	0.0102	0.455	0.758	1.79	6.33
150	0.100	0.213	1.12	0.113	0.0115	0.539	0.755	1.64	4.16
200	0.092	0.219	1.20	0.131	0.0130	0.646	0.730	1.52	2.86
250	0.0850	0.225	1.32	0.155	0.0148	0.777	0.717	1.41	2.04
300	0.0800	0.230	1.36	0.171	0.0160	0.878	0.704	1.32	1.45
400	0.0740	0.239	1.45	0.196	0.0180	1.02	0.695	1.16	1.11
500	0.0630	0.248	1.65	0.263	0.0210	1.36	0.700	1.04	0.485
600	0.0570	0.256	1.78	0.312	0.0235	1.61	0.700	0.944	0.310
800	0.0480	0.269	2.02	0.420	0.0278	2.15	0.702	0.794	0.143
1000	0.0416	0.280	2.25	0.540	0.0324	2.78	0.703	0.685	75.3×10^3
1500	0.0306	0.301	2.80	0.913	0.0340	4.67	0.704	0.510	19.6

T (°F)	ρ (lb _m /ft ³)	c_p (Btu/lb _m -°F)	$\mu \times 10^5$ (lb _m /ft-seg)	$\nu \times 10^3$ (ft ² /seg)	k (Btu/hr-ft-°F)	α (ft ² /hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2$ (1/°F-ft ³)
<i>Hidrógeno</i>									
0	0.00597	3.37	0.537	0.900	0.092	4.59	0.713	2.18	87,000
30	0.00562	3.39	0.562	1.00	0.097	5.09	0.709	2.04	65,700
60	0.00530	3.41	0.587	1.11	0.102	5.65	0.707	1.92	50,500
80	0.00510	3.42	0.602	1.18	0.105	6.04	0.705	1.85	42,700
100	0.00492	3.42	0.617	1.25	0.108	6.42	0.700	1.79	36,700
150	0.00450	3.44	0.653	1.45	0.116	7.50	0.696	1.64	25,000
200	0.00412	3.45	0.688	1.67	0.123	8.64	0.696	1.52	17,500
250	0.00382	3.46	0.723	1.89	0.130	9.85	0.690	1.41	12,700
300	0.00357	3.46	0.756	2.12	0.137	11.1	0.687	1.32	9,440
400	0.00315	3.47	0.822	2.61	0.151	13.8	0.681	1.16	5,470
500	0.00285	3.47	0.890	3.12	0.165	16.7	0.675	1.04	3,430
600	0.00260	3.47	0.952	3.66	0.179	19.8	0.667	0.944	2,270
800	0.00219	3.49	1.07	4.87	0.205	26.8	0.654	0.794	1,080
1000	0.00189	3.52	1.18	6.21	0.224	33.7	0.664	0.685	571
1500	0.00141	3.62	1.44	10.2	0.265	51.9	0.708	0.510	158

T (°F)	ρ (lb _m /ft ³)	c_p (Btu/lb _m -°F)	$\mu \times 10^5$ (lb _m /ft-seg)	$\nu \times 10^3$ (ft ² /seg)	k (Btu/hr-ft-°F)	α (ft ² /hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho/\mu^2$ (1/°F-ft ³)
<i>Monóxido de carbono</i>									
0	0.0832	0.249	1.05	0.126	0.0128	0.620	0.749	2.18	4.40×10^6
30	0.0780	0.249	1.11	0.142	0.0134	0.691	0.744	2.04	3.32
60	0.0736	0.249	1.16	0.157	0.0142	0.775	0.740	1.92	2.48
80	0.0709	0.249	1.20	0.169	0.0146	0.828	0.737	1.85	2.09
100	0.0684	0.249	1.23	0.180	0.0150	0.884	0.735	1.79	1.79
150	0.0628	0.249	1.32	0.210	0.0163	1.04	0.730	1.64	1.19
200	0.0580	0.250	1.40	0.241	0.0174	1.20	0.726	1.52	0.842
250	0.0539	0.250	1.48	0.275	0.0183	1.36	0.722	1.41	0.604
300	0.0503	0.251	1.56	0.310	0.0196	1.56	0.720	1.32	0.442
400	0.0445	0.253	1.73	0.389	0.0217	1.92	0.726	1.16	0.248
500	0.0399	0.256	1.85	0.463	0.0234	2.30	0.729	1.04	0.156
600	0.0361	0.259	1.97	0.545	0.0253	2.71	0.726	0.944	0.101
800	0.0304	0.266	2.21	0.728	0.0288	3.57	0.735	0.794	48.2×10^3
1000	0.0262	0.273	2.43	0.929	0.0324	4.54	0.740	0.685	25.6
1500	0.0195	0.286	3.00	1.54	0.0410	7.35	0.756	0.510	6.93

T (°F)	ρ (lb _m /ft ³)	c_p (Btu/lb _m -°F)	$\mu \times 10^6$ (lb _m /ft-sec)	$\nu \times 10^3$ (ft ² /sec)	k (Btu/hr-ft-°F)	α (ft ² /hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta^2/\mu^2 \times 10^{-6}$ (1/°F-ft ³)
<i>Cloro</i>									
0	0.211	0.113	8.06	0.0381	0.00418	0.175	0.785	2.18	48.3
30	0.197	0.114	8.40	0.0426	0.00450	0.201	0.769	2.04	36.6
60	0.187	0.114	8.80	0.0470	0.00480	0.225	0.753	1.92	28.1
80	0.180	0.115	9.07	0.0504	0.00500	0.242	0.753	1.85	24.3
100	0.173	0.115	9.34	0.0540	0.00520	0.261	0.748	1.79	19.9
150	0.159	0.117	10.0	0.0629	0.00570	0.306	0.739	1.64	13.4

T (°F)	ρ (lb _m /ft ³)	c_p (Btu/lb _m -°F)	$\mu \times 10^7$ (lb _m /ft-sec)	$\nu \times 10^3$ (ft ² /sec)	k (Btu/hr-ft-°F)	α (ft ² /hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2$ (1/°F-ft ³)
<i>Helio</i>									
0	0.0119	1.24	122	1.03	0.0784	5.30	0.698	2.18	66,800
30	0.0112	1.24	127	1.14	0.0818	5.89	0.699	2.04	51,100
60	0.0106	1.24	132	1.25	0.0852	6.46	0.700	1.92	40,000
80	0.0102	1.24	135	1.32	0.0872	6.88	0.701	1.85	33,900
100	0.00980	1.24	138	1.41	0.0892	7.37	0.701	1.79	29,000
150	0.00900	1.24	146	1.63	0.0937	8.36	0.703	1.64	20,100
200	0.00829	1.24	155	1.87	0.0977	9.48	0.705	1.52	14,000
250	0.00772	1.24	162	2.09	0.102	10.7	0.707	1.41	10,400
300	0.00722	1.24	170	2.36	0.106	11.8	0.709	1.32	7,650
400	0.00637	1.24	185	2.91	0.114	14.4	0.714	1.16	4,410
500	0.00572	1.24	198	3.46	0.122	17.1	0.719	1.04	2,800
600	0.00517	1.24	209	4.04	0.130	20.6	0.720	0.944	1,850
800	0.00439	1.24	232	5.28	0.145	27.6	0.722	0.794	915
1000	0.00376	1.24	255	6.78	0.159	35.5	0.725	0.685	480
1500	0.00280	1.24	309	11.1	0.189	59.7	0.730	0.510	135

T (°F)	ρ (lb _m /ft ³)	c_p (Btu/lb _m -°F)	$\mu \times 10^5$ (lb _m /ft-sec)	$\nu \times 10^3$ (ft ² /sec)	k (Btu/hr-ft-°F)	α (ft ² /hr)	Pr	$\beta \times 10^3$ (1/°F)	$g\beta\rho^2/\mu^2$ (1/°F-ft ³)
<i>Bióxido de sulfuro</i>									
0	0.195	0.142	0.700	3.59	0.00460	0.166	0.778	2.03	50.6×10^6
100	0.161	0.149	0.890	5.52	0.00560	0.233	0.854	1.79	19.0
200	0.136	0.157	1.05	7.74	0.00670	0.313	0.883	1.52	8.25
300	0.118	0.164	1.20	10.2	0.00790	0.407	0.898	1.32	4.12
400	0.104	0.170	1.35	13.0	0.00920	0.520	0.898	1.16	2.24
500	0.0935	0.176	1.50	16.0	0.00990	0.601	0.958	1.04	1.30
600	0.0846	0.180	1.65	19.5	0.0108	0.711	0.987	0.994	0.795

Gráficas para la solución de problemas de conducción transitoria

Tabla B.1 Símbolos para las gráficas de estado no estable

	<i>Símbolo del parámetro</i>	<i>Conducción de calor</i>
Temperatura adimensional	<i>Y</i>	$\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}}$
Tiempo relativo	<i>X</i>	$\frac{\alpha t}{x_1^2}$
Posición relativa	<i>n</i>	$\frac{x}{x_1}$
Resistencia relativa	<i>m</i>	$\frac{k}{hx_1}$

T = temperatura

x = distancia desde el centro a
cualquier punto

t = tiempo

k = conductividad térmica

h = coeficiente de transferencia
convectiva

α = difusividad térmica

Subíndices:

0 = condición inicial al tiempo

t = 0

1 = límite

∞ = condición de referencia del fluido

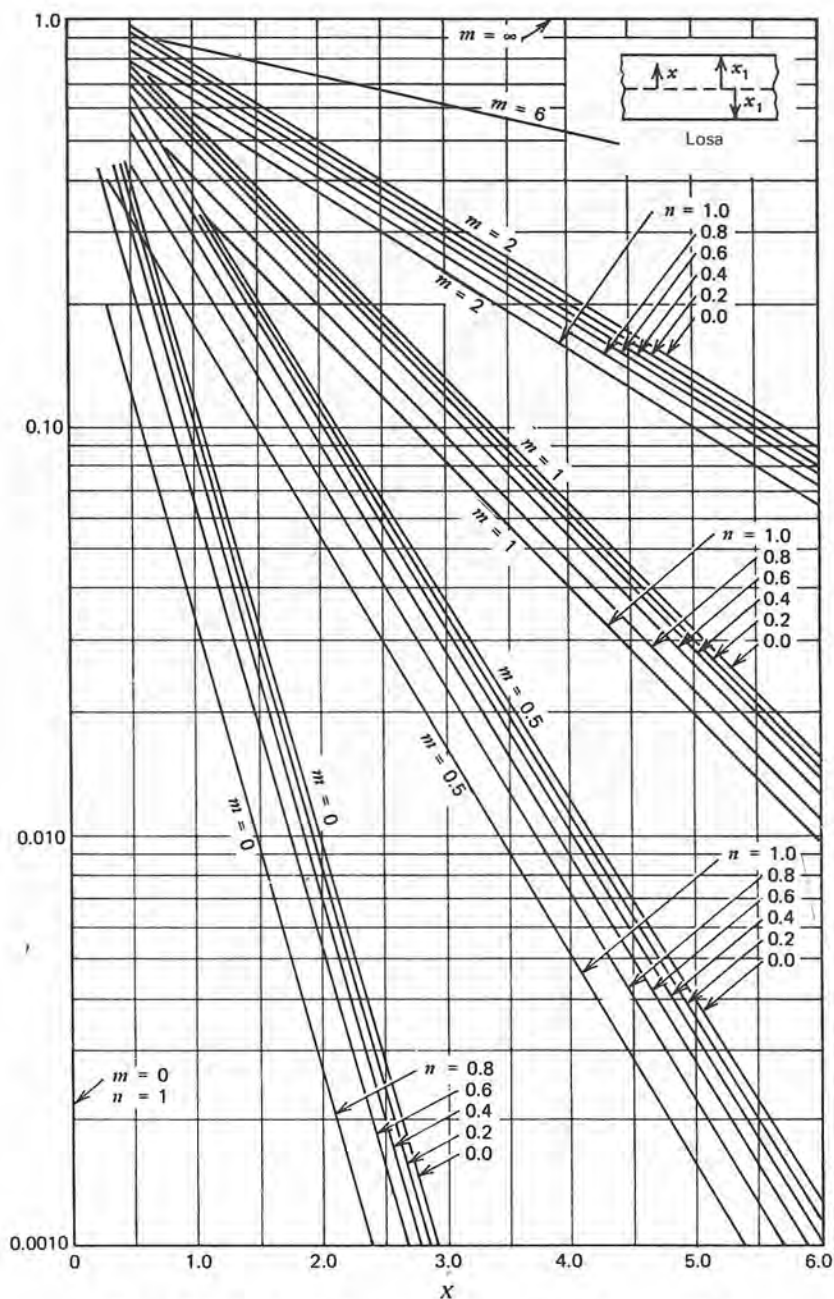


Figura B.1 Conducción de estado no estable en una losa grande plana.

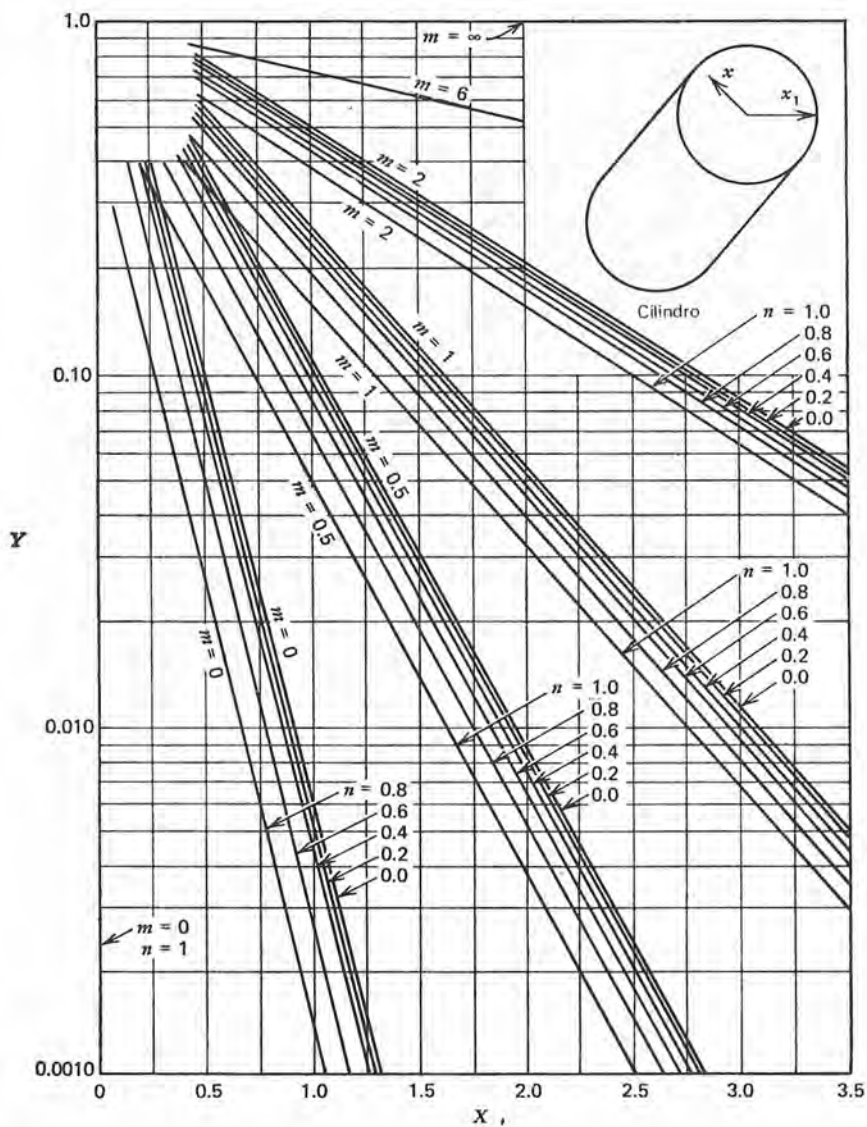


Figura B.2 Conducción de estado no estable en un cilindro largo.

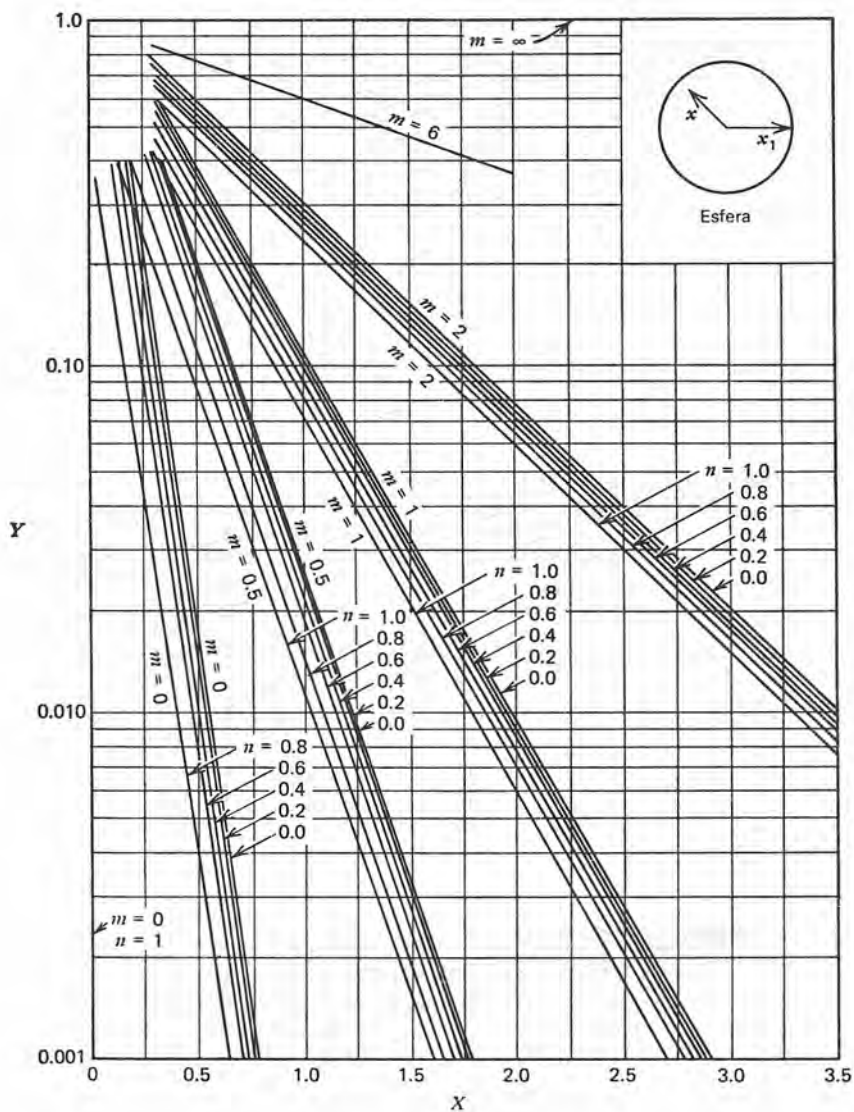


Figura B.3 Conducción de estado no estable en una esfera.

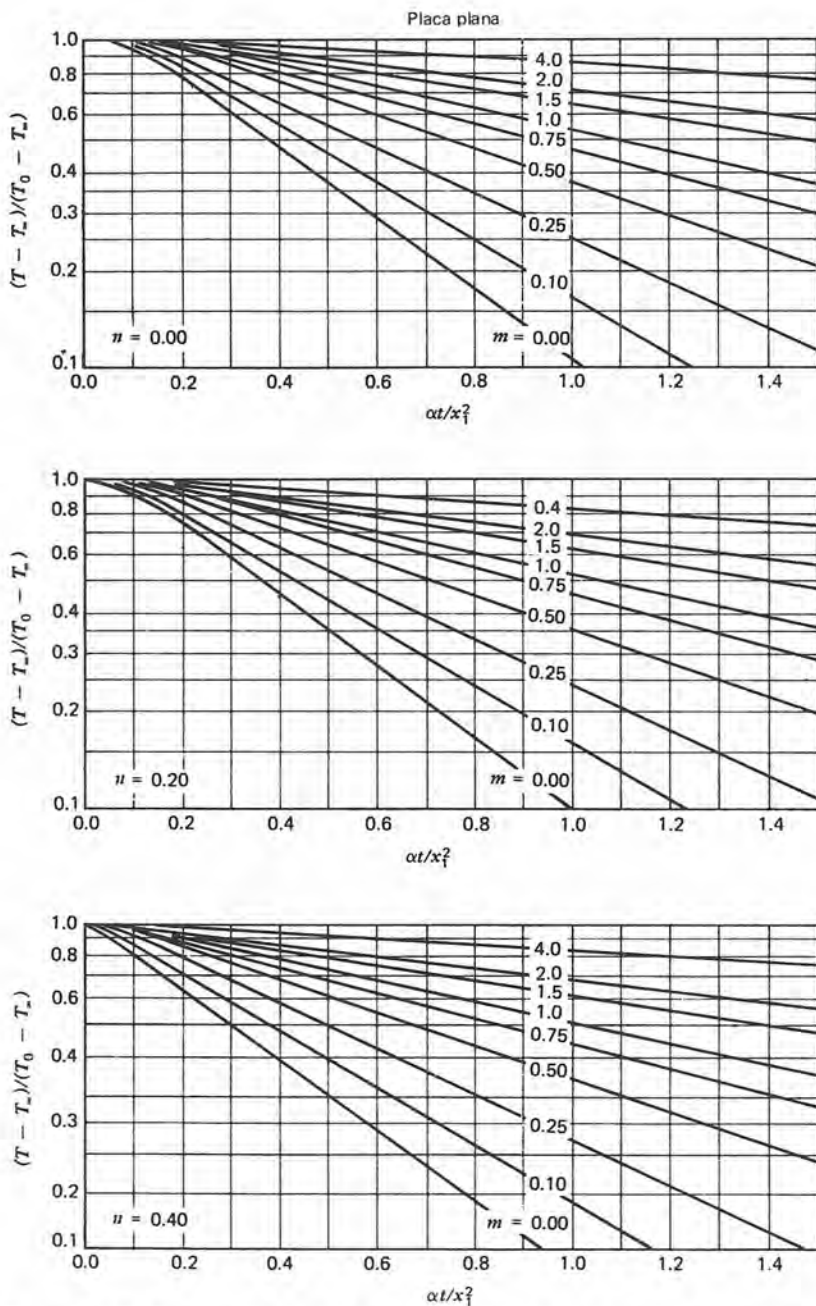


Figura B.4 Gráficas para la solución de problemas de conducción inestable: placa plana.

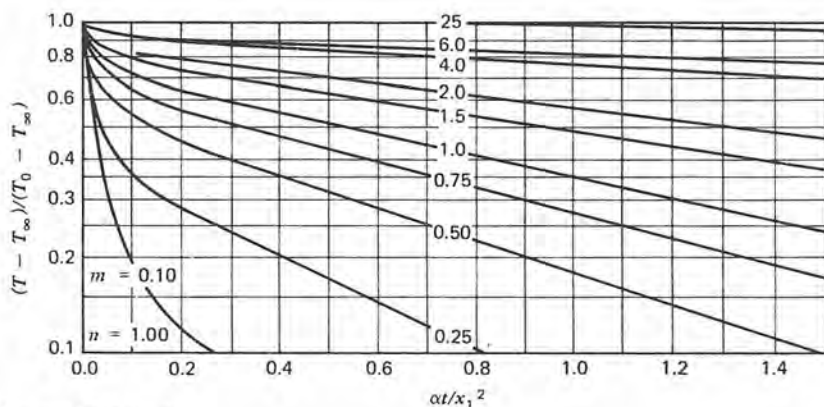
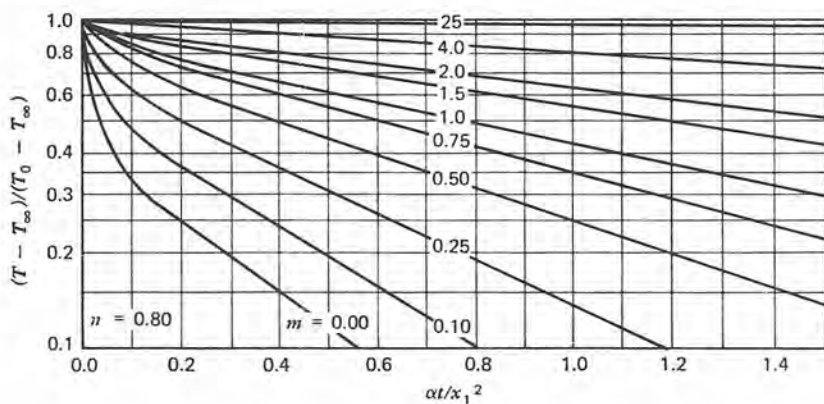
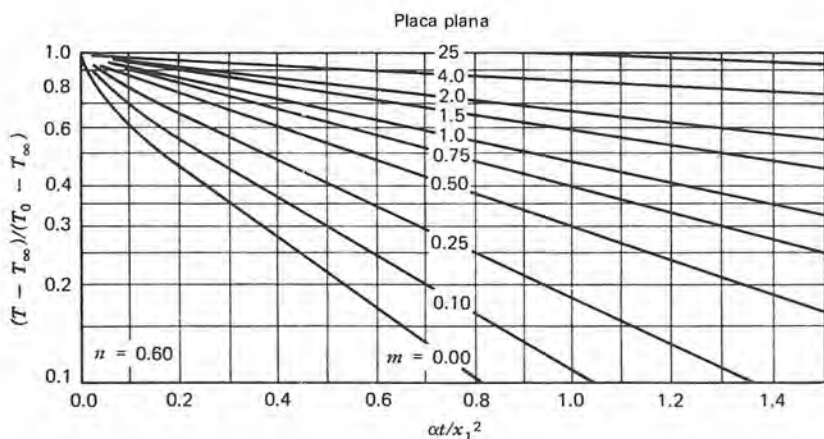


Figura B.4 (sigue)

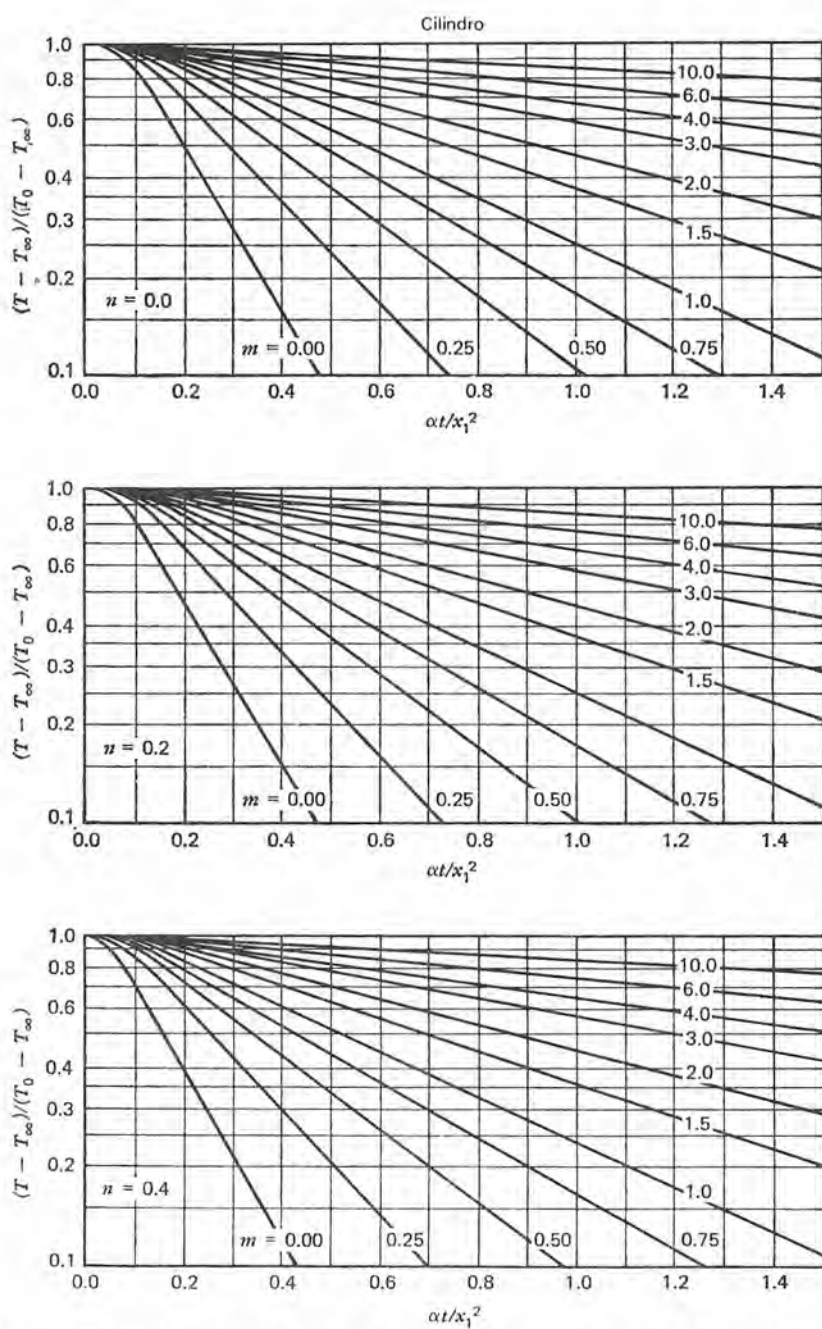


Figura B.5 Gráficas para la solución de problemas de conducción inestable: cilindro.

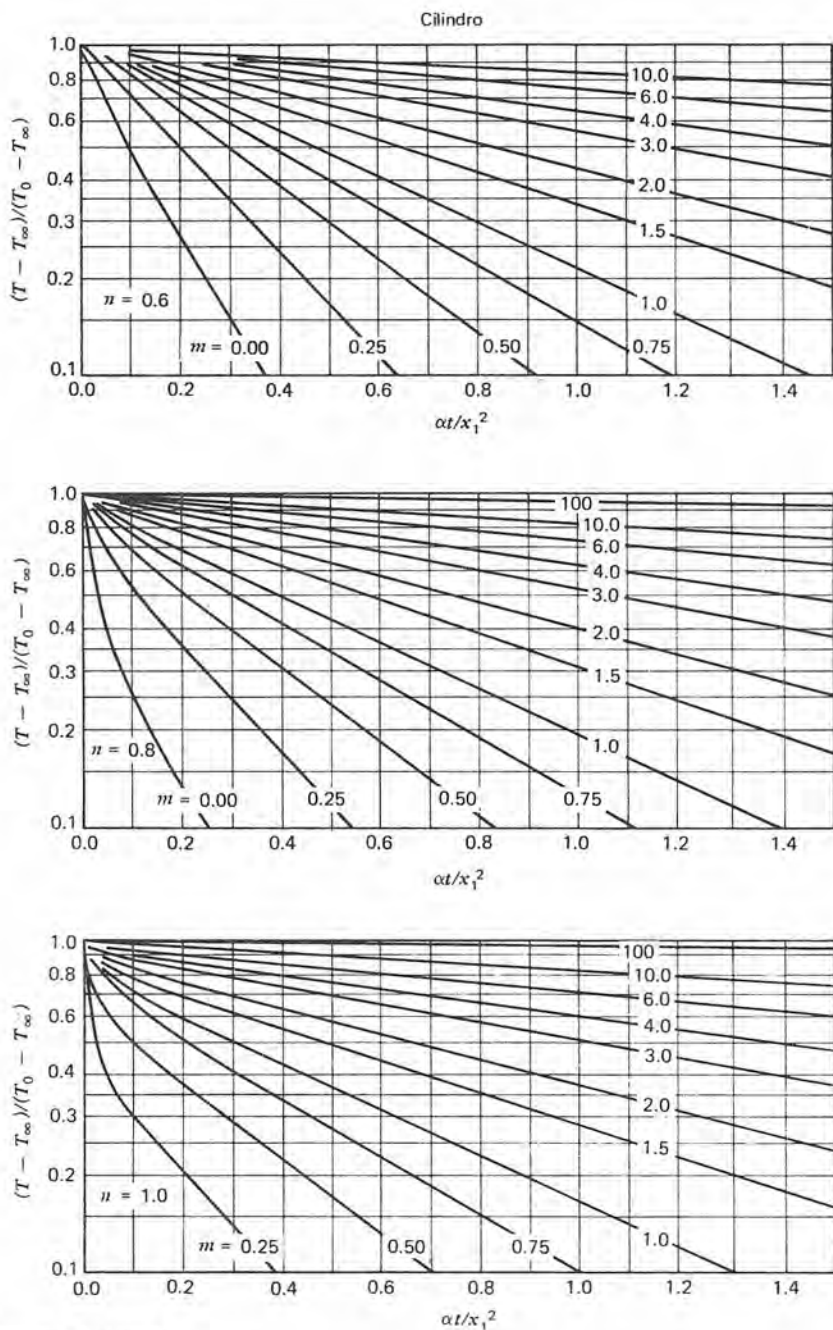


Figura B.5 (sigue)

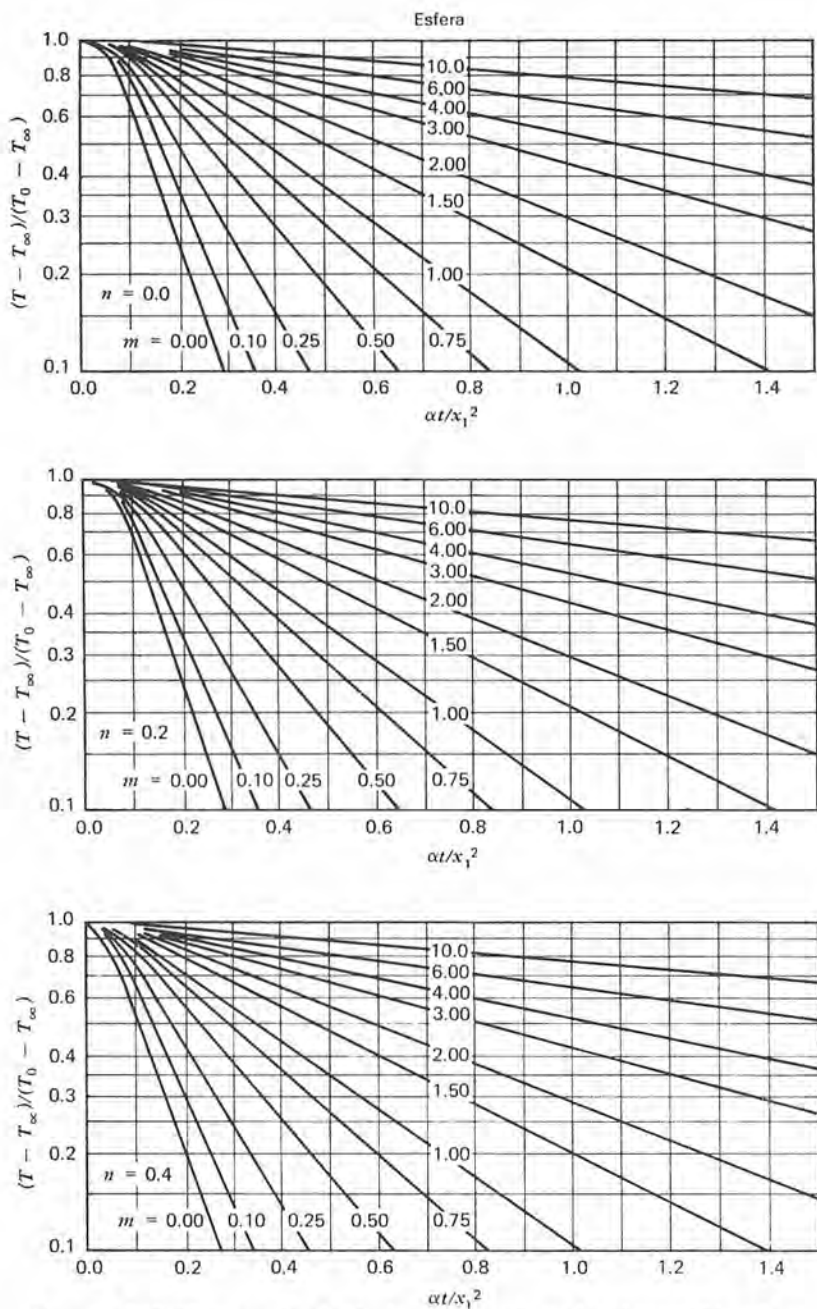


Figura B.6 Gráficas para la solución de problemas de conducción inestable: esfera.

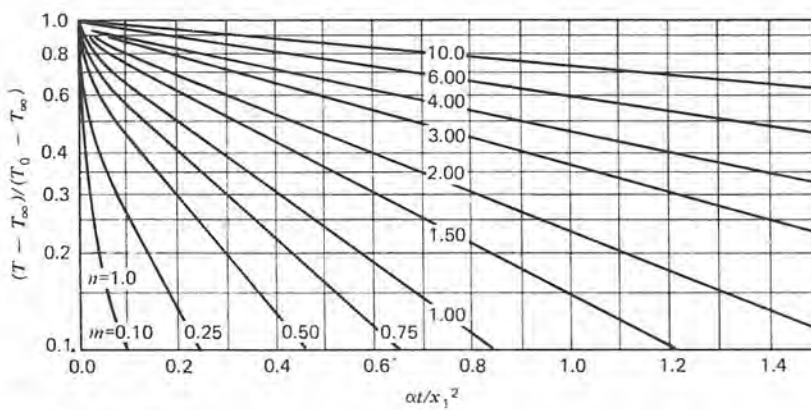
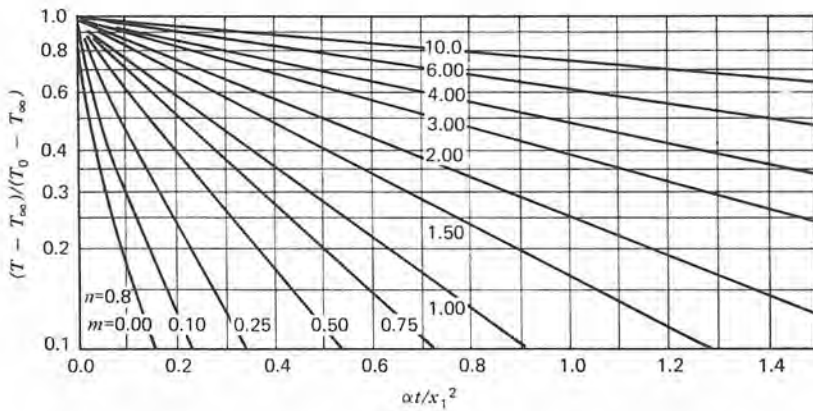
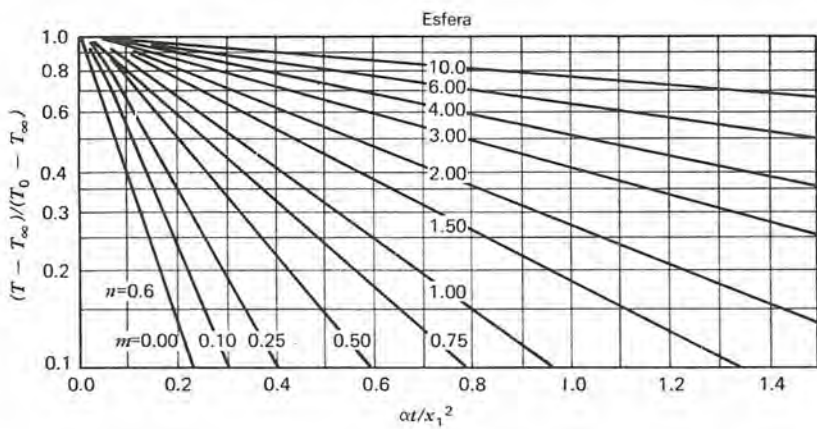


Figura B.6 (sigue)

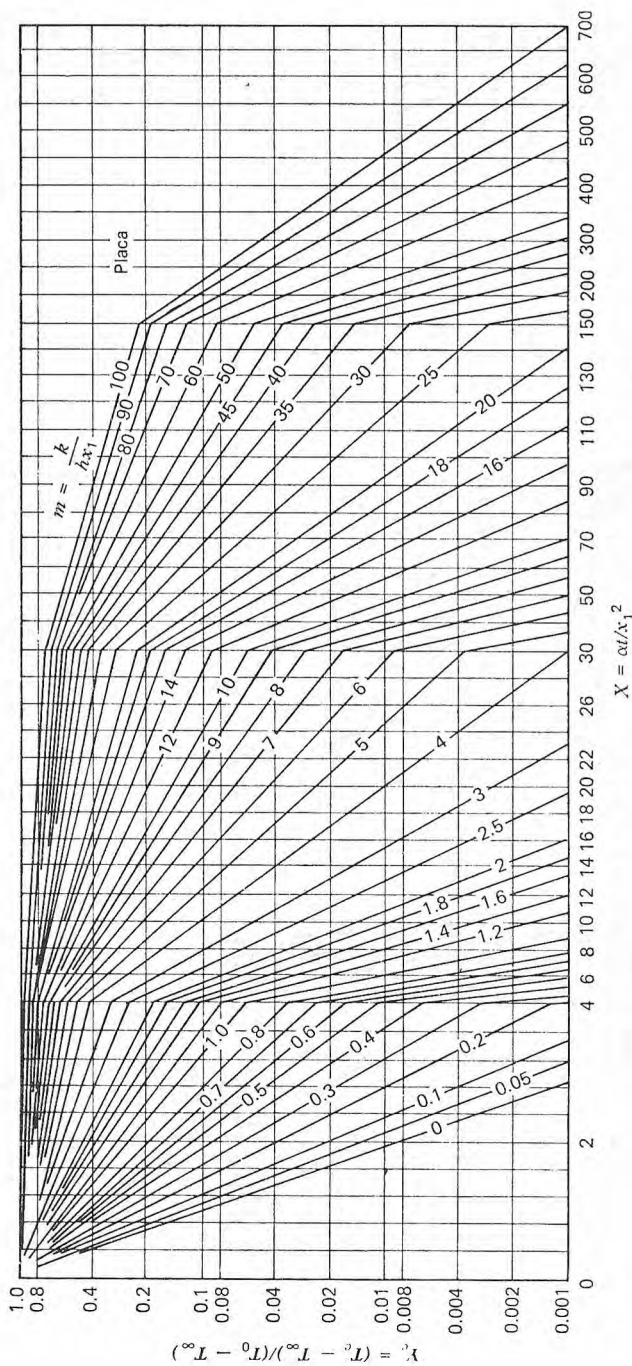


Figura B.7 Historia de la temperatura central para una placa infinita.

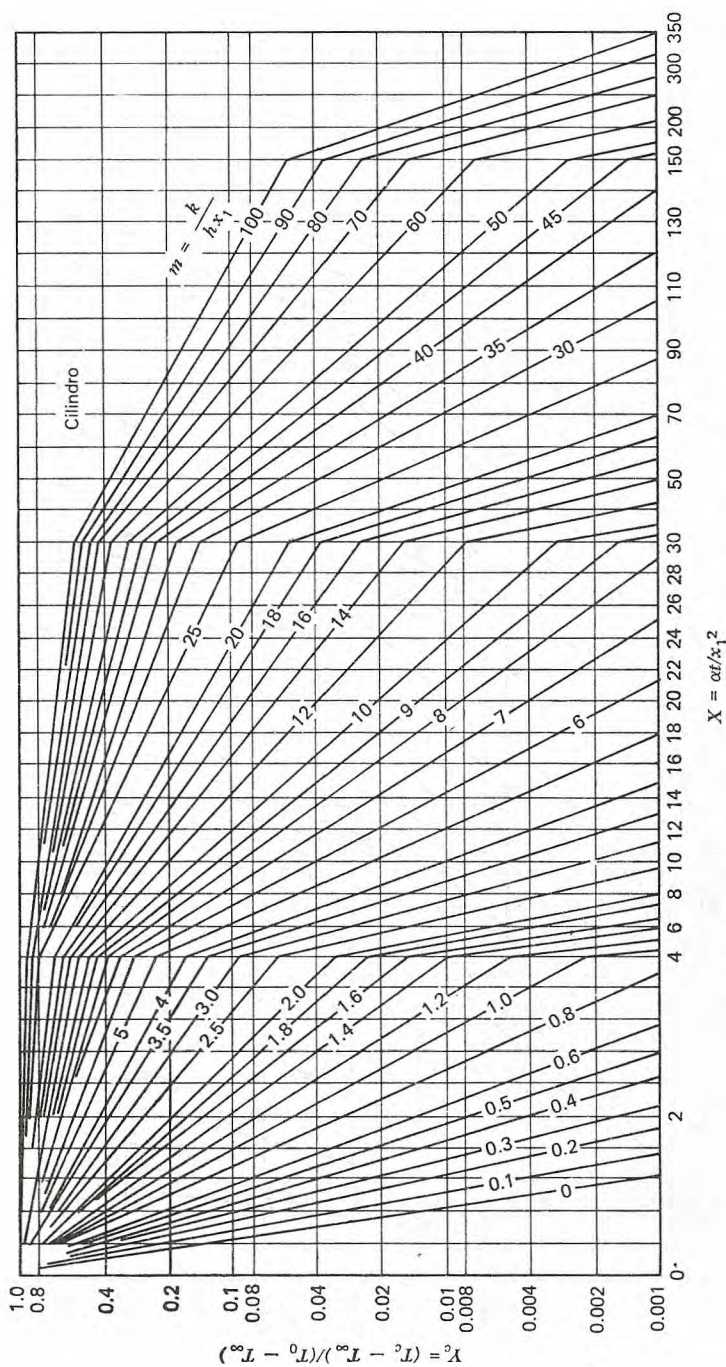


Figura B.8 Historia de la temperatura central para un cilindro infinito.

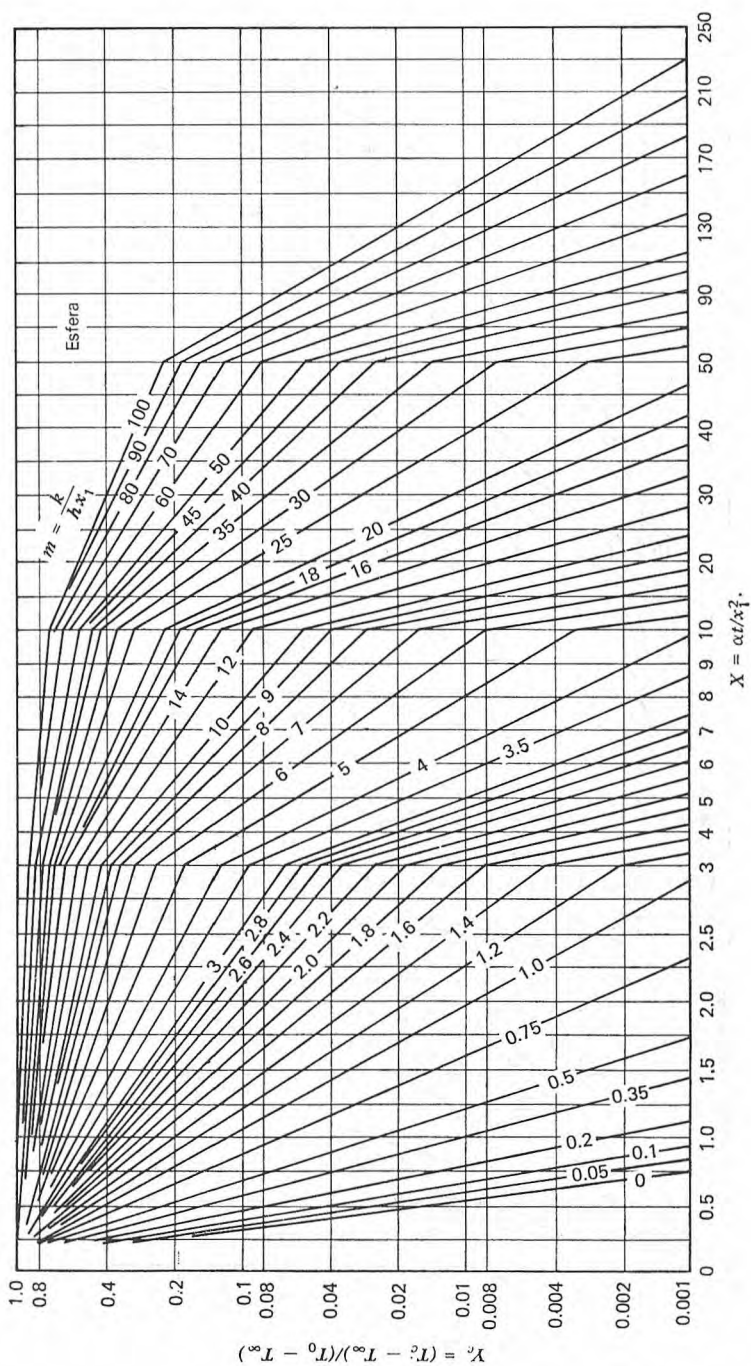


Figura B.9 Historia de la temperatura central para una esfera.

La función de error

$$\text{fe } \phi \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\phi} e^{-\eta^2} d\eta$$

ϕ	fe ϕ	ϕ	fe ϕ
0	0.0	0.85	0.7707
0.025	0.0282	0.90	0.7970
0.05	0.0564	0.95	0.8209
0.10	0.1125	1.0	0.8427
0.15	0.1680	1.1	0.8802
0.20	0.2227	1.2	0.9103
0.25	0.2763	1.3	0.9340
0.30	0.3286	1.4	0.9523
0.35	0.3794	1.5	0.9661
0.40	0.4284	1.6	0.9763
0.45	0.4755	1.7	0.9838
0.50	0.5205	1.8	0.9891
0.55	0.5633	1.9	0.9926
0.60	0.6039	2.0	0.9953
0.65	0.6420	2.2	0.9981
0.70	0.6778	2.4	0.9993
0.75	0.7112	2.6	0.9998
0.80	0.7421	2.8	0.9999

Emisividades totales normales de distintas superficies

<i>Superficie</i>	<i>T(°F)</i>	<i>Emisividad</i>
<i>Metales y sus óxidos</i>		
Aluminio		
Placa altamente pulida, 98.3% puro	440-1070	0.039-0.057
Placa comercial	212	0.09
Oxidado a 1110°F	390-1110	0.11-0.19
Fuertemente oxidado	200-940	0.20-0.31
Latón		
Pulido	100-600	0.10
Oxidado por calentamiento a 1110°F	390-1110	0.61-0.59
Cromo (vea las aleaciones de níquel para los aceros Ni-Cr)		
Pulido	100-2000	0.08-0.36
Cobre		
Pulido	212	0.052
Placa caliente a 1110°F	390-1110	0.57
Oxido cuproso	1470-2010	0.66-0.54
Cobre fundido	1970-2330	0.16-0.13
Oro		
Puro, altamente pulido	440-1160	0.018-0.035
Grafito	100-5000	0.41-0.73

<i>Superficie</i>	<i>T(°F)</i>	<i>Emisividad</i>
<i>Metales y sus óxidos</i>		
Hierro y acero (sin incluir al inoxidable)		
Superficies metálicas (o capa muy delgada de óxido)		
Fierro, pulido	800-1880	0.14-0.38
Fierro fundido, pulido	392	0.21
Fierro forjado, altamente pulido	100-480	0.28
Superficies oxidadas		
Placa de fierro, completamente oxidada	67	0.69
Placa de acero, áspera	100-700	0.94-0.97
Superficies fundidas		
Fierro fundido	2370-2550	0.29
Acero suave	2910-3270	0.28
Plomo		
Puro (99.96 %), sin oxidar	260-440	0.057-0.075
Gris oxidado	75	0.28
Magnesio	100-1000	0.07-0.18
Molibdeno	1000-5000	0.08-0.29
Níquel		
Puro, pulido	500-1000	0.07-0.10
Puro, oxidado	100-1000	0.39-0.67
Aleaciones de níquel		
Cromoníquel	125-1894	0.64-0.76
Cobre-níquel, pulido	212	0.059
Alambre de nicromo, brillante	120-1830	0.65-0.79
Alambre de nicromo, oxidado	120-930	0.95-0.98
Platino		
Puro, placa pulida	440-1160	0.054-0.104
Tira	1700-2960	0.12-0.17
Filamento	80-2240	0.036-0.192
Alambre	440-2510	0.073-0.182
Plata		
Pulida, pura	440-1160	0.020-0.032
Pulida	100-700	0.022-0.031
Aceros inoxidables		
Inconel X, pulido	-300-900	0.19-0.20
Inconel B, pulido	-300-900	0.19-0.22
Tipo 301, pulido	75	0.16
Tipo 310, liso	1500	0.39
Tipo 316, pulido	400-1900	0.24-0.31
Tántalo	2500-5000	0.20-0.30
Tungsteno		
Filamento, envejecido	80-6000	0.032-0.35
Filamento	6000	0.39
Capa pulida	212	0.066

<i>Superficie</i>	<i>T(°F)</i>	<i>Emisividad</i>
<i>Metales y sus óxidos</i>		
Zinc		
Comercial 99.1 % puro, pulido	440-620	0.045-0.053
Placa galvanizada, relativamente brillante	100	0.23
Oxidado por calentamiento a 750°F	750	0.11
<i>Refractarios, materiales de construcción y misceláneos</i>		
Asbesto		
En lámina	74	0.96
En papel	100-700	0.93-0.94
Asfalto	solar	0.85
Tabique		
Rojo, áspero, pero sin irregularidades grandes	70	0.93
Vidriado	2012	0.75
De construcción	1832	0.45
Refractario	1832	0.75
Carbón		
Filamento	1900-2560	0.526
Recubrimiento de negro de humo-vidrio soluble	209-440	0.96-0.95
Capa delgada del mismo sobre placa de hierro	69	0.927
Baldosas de cerámica		
Rojas	solar	0.71
Púrpuras oscuras	solar	0.82
Concreto, áspero	100	0.94
Baldosas de concreto		
Incoloras	solar	0.65
Cafés	solar	0.85

<i>Superficie</i>	<i>T(°F)</i>	<i>Emisividad</i>
<i>Refractarios, materiales de construcción y misceláneos</i>		
Vidrio		
Liso	72	0.94
Pyrex, plomo y sosa	500–1000	0.95–0.85
Yeso, de espesor de 0.02 in (0.0508 cm) en placa lisa o enegrecida	70	0.903
Tabique refractario de magnesita	1832	0.38
Mármol, gris claro, pulido	72	0.93
Roble, en plancha	70	0.90
Pinturas, lacas, barnices		
Laca negra o blanca	100–200	0.80–0.95
Placa negra mate	100–200	0.96–0.98
Pinturas de aceite, 16 distintas, de todos colores	212	0.92–0.96
Pintura Al, después de calentar a 620°F	300–600	0.35
Yeso, de cal gruesa	50–190	0.91
Porcelana, vidriada	70	0.92
Papel asfaltado	69	0.91
Hule		
Duro, placa lustrosa	74	0.94
Suave, gris, áspero (reprocesado)	76	0.86
Pizarra	100	0.67–0.80
Agua	32–212	0.95–0.963
Hielo	32	0.97

Funciones de radiación de Planck

$\lambda T [^\circ \text{R}]$	$\frac{E_{b\lambda} \times 10^5}{\sigma T^5}$	$\frac{F_{0-\lambda T}}{\sigma T^4}$	$\lambda T [^\circ \text{R}]$	$\frac{E_{b\lambda} \times 10^5}{\sigma T^5}$	$\frac{F_{0-\lambda T}}{\sigma T^4}$
1000.0	0.000039	0.0000	10400.0	5.142725	0.7183
1200.0	0.001191	0.0000	10600.0	4.921745	0.7284
1400.0	0.012008	0.0000	10800.0	4.710716	0.7380
1600.0	0.062118	0.0000	11000.0	4.509291	0.7472
1800.0	0.208018	0.0003	11200.0	4.317109	0.7561
2000.0	0.517405	0.0010	11400.0	4.133804	0.7645
2200.0	1.041926	0.0025	11600.0	3.959010	0.7726
2400.0	1.797651	0.0053	11800.0	3.792363	0.7803
2600.0	2.761875	0.0098	12000.0	3.633505	0.7878
2800.0	3.882650	0.0164	12200.0	3.482084	0.7949
3000.0	5.093279	0.0254	12400.0	3.337758	0.8017
3200.0	6.325614	0.0368	12600.0	3.200195	0.8082
3400.0	7.519353	0.0507	12800.0	3.069073	0.8145
3600.0	8.626936	0.0668	13000.0	2.944084	0.8205
3800.0	9.614973	0.0851	13200.0	2.824930	0.8263
4000.0	10.463377	0.1052	13400.0	2.711325	0.8318
4200.0	11.163315	0.1269	13600.0	2.602997	0.8371
4400.0	11.714711	0.1498	13800.0	2.499685	0.8422
4600.0	12.123821	0.1736	14000.0	2.401139	0.8471
4800.0	12.401105	0.1982	14200.0	2.307123	0.8518

$\lambda T [\mu^{\circ}\text{R}]$	$\frac{E_{b\lambda} \times 10^5}{\sigma T^5}$	$\frac{F_{0-\lambda T}}{\sigma T^4}$	$\lambda T [\mu^{\circ}\text{R}]$	$\frac{E_{b\lambda} \times 10^5}{\sigma T^5}$	$\frac{F_{0-\lambda T}}{\sigma T^4}$
5000.0	12.559492	0.2232	14400.0	2.217411	0.8564
5200.0	12.613057	0.2483	14600.0	2.131788	0.8607
5400.0	12.576066	0.2735	14800.0	2.050049	0.8649
5600.0	12.462308	0.2986	15000.0	1.972000	0.8689
5800.0	12.284687	0.3234	16000.0	1.630989	0.8869
6000.0	12.054971	0.3477	17000.0	1.358304	0.9018
6200.0	11.783688	0.3715	18000.0	1.138794	0.9142
6400.0	11.480102	0.3948	19000.0	0.960883	0.9247
6600.0	11.152254	0.4174	20000.0	0.815714	0.9335
6800.0	10.807041	0.4394	21000.0	0.696480	0.9411
7000.0	10.450309	0.4607	22000.0	0.597925	0.9475
7200.0	10.086964	0.4812	23000.0	0.515964	0.9531
7400.0	9.721078	0.5010	24000.0	0.447405	0.9579
7600.0	9.355994	0.5201	25000.0	0.389739	0.9621
7800.0	8.994419	0.5384	26000.0	0.340978	0.9657
8000.0	8.638524	0.5561	27000.0	0.299540	0.9689
8200.0	8.290014	0.5730	28000.0	0.264157	0.9717
8400.0	7.950202	0.5892	29000.0	0.233807	0.9742
8600.0	7.620072	0.6048	30000.0	0.207663	0.9764
8800.0	7.300336	0.6197	40000.0	0.074178	0.9891
9000.0	6.991475	0.6340	50000.0	0.032617	0.9941
9200.0	6.693786	0.6477	60000.0	0.016479	0.9965
9400.0	6.407408	0.6608	70000.0	0.009192	0.9977
9600.0	6.132361	0.6733	80000.0	0.005521	0.9984
9800.0	5.868560	0.6853	90000.0	0.003512	0.9989
10000.0	5.615844	0.6968	100000.0	0.002339	0.9991
10200.0	5.373989	0.7078			

Calibres estándares de tuberías

F-1 Tamaños estándar de tubos

<i>Tamaño nominal del tubo (in)</i>	<i>Diámetro exterior (in)</i>	<i>Número de calibre</i>	<i>Espesor de la pared (in)</i>	<i>Diámetro interior (in)</i>	<i>Area transversal del metal (in²)</i>	<i>Sección transversal interior (ft²)</i>
$\frac{1}{8}$	0.405	40	0.068	0.269	0.072	0.00040
		80	0.095	0.215	0.093	0.00025
$\frac{1}{4}$	0.540	40	0.088	0.364	0.125	0.00072
		80	0.119	0.302	0.157	0.00050
$\frac{3}{8}$	0.675	40	0.091	0.493	0.167	0.00133
		80	0.126	0.423	0.217	0.00098
$\frac{1}{2}$	0.840	40	0.109	0.622	0.250	0.00211
		80	0.147	0.546	0.320	0.00163
		160	0.187	0.466	0.384	0.00118
$\frac{3}{4}$	1.050	40	0.113	0.824	0.333	0.00371
		80	0.154	0.742	0.433	0.00300
		160	0.218	0.614	0.570	0.00206

<i>Tamaño nominal del tubo (in)</i>	<i>Diámetro exterior (in)</i>	<i>Número de calibre</i>	<i>Espesor de la pared (in)</i>	<i>Diámetro interior (in)</i>	<i>Area transversal del metal (in²)</i>	<i>Sección transversal interior (ft²)</i>
1	1.315	40	0.133	1.049	0.494	0.00600
		80	0.179	0.957	0.639	0.00499
		160	0.250	0.815	0.837	0.00362
1½	1.900	40	0.145	1.610	0.799	0.01414
		80	0.200	1.500	1.068	0.01225
		160	0.281	1.338	1.429	0.00976
2	2.375	40	0.154	2.067	1.075	0.02330
		80	0.218	1.939	1.477	0.02050
		160	0.343	1.689	2.190	0.01556
2½	2.875	40	0.203	2.469	1.704	0.03322
		80	0.276	2.323	2.254	0.02942
		160	0.375	2.125	2.945	0.02463
3	3.500	40	0.216	3.068	2.228	0.05130
		80	0.300	2.900	3.016	0.04587
		160	0.437	2.626	4.205	0.03761
4	4.500	40	0.237	4.026	3.173	0.08840
		80	0.337	3.826	4.407	0.07986
		120	0.437	3.626	5.578	0.07170
		160	0.531	3.438	6.621	0.06447
5	5.563	40	0.258	5.047	4.304	0.1390
		80	0.375	4.813	6.112	0.1263
		120	0.500	4.563	7.953	0.1136
		160	0.625	4.313	9.696	0.1015
6	6.625	40	0.280	6.065	5.584	0.2006
		80	0.432	5.761	8.405	0.1810
		120	0.562	5.501	10.71	0.1650
		160	0.718	5.189	13.32	0.1469

<i>Tamaño nominal del tubo (in)</i>	<i>Diámetro exterior (in)</i>	<i>Número de calibre</i>	<i>Espesor de la pared (in)</i>	<i>Diámetro interior (in)</i>	<i>Area transversal del metal (in²)</i>	<i>Sección transversal interior (ft²)</i>
8	8.625	20	0.250	8.125	6.570	0.3601
		30	0.277	8.071	7.260	0.3553
		40	0.322	7.981	8.396	0.3474
		60	0.406	7.813	10.48	0.3329
		80	0.500	7.625	12.76	0.3171
		100	0.593	7.439	14.96	0.3018
		120	0.718	7.189	17.84	0.2819
		140	0.812	7.001	19.93	0.2673
10	10.75	160	0.906	6.813	21.97	0.2532
		20	0.250	10.250	8.24	0.5731
		30	0.307	10.136	10.07	0.5603
		40	0.365	10.020	11.90	0.5475
		60	0.500	9.750	16.10	0.5158
		80	0.593	9.564	18.92	0.4989
		100	0.718	9.314	22.63	0.4732
		120	0.843	9.064	26.24	0.4481
12	12.75	140	1.000	8.750	30.63	0.4176
		160	1.125	8.500	34.02	0.3941
		20	0.250	12.250	9.82	0.8185
		30	0.330	12.090	12.87	0.7972
		40	0.406	11.938	15.77	0.7773
		60	0.562	11.626	21.52	0.7372
		80	0.687	11.376	26.03	0.7058
		100	0.843	11.064	31.53	0.6677
		120	1.000	10.750	36.91	0.6303
		140	1.125	10.500	41.08	0.6013
		160	1.312	10.126	47.14	0.5592

F-2 Calibres estándar de los tubos

Diámetro exterior (in)	Espesor de la pared (in)		Diámetro interior (in)	Sección transversal (ft ²)	Area transversal interior (ft ²)
	Calibre B. W. G. y de Stubs	(in)			
$\frac{1}{2}$	12	0.109	0.282	0.1338	0.000433
	14	0.083	0.334	0.1087	0.000608
	16	0.065	0.370	0.0888	0.000747
	18	0.049	0.402	0.0694	0.000882
	20	0.035	0.430	0.0511	0.001009
$\frac{3}{4}$	12	0.109	0.532	0.2195	0.00154
	13	0.095	0.560	0.1955	0.00171
	14	0.083	0.584	0.1739	0.00186
	15	0.072	0.606	0.1534	0.00200
	16	0.065	0.620	0.1398	0.00210
1	17	0.058	0.634	0.1261	0.00219
	18	0.049	0.652	0.1079	0.00232
	12	0.109	0.782	0.3051	0.00334
	13	0.095	0.810	0.2701	0.00358
	14	0.083	0.834	0.2391	0.00379
$1\frac{1}{4}$	15	0.072	0.856	0.2099	0.00400
	16	0.065	0.870	0.1909	0.00413
	17	0.058	0.884	0.1716	0.00426
	18	0.049	0.902	0.1463	0.00444
	12	0.109	1.032	0.3907	0.00581
$1\frac{1}{2}$	13	0.095	1.060	0.3447	0.00613
	14	0.083	1.084	0.3042	0.00641
	15	0.072	1.106	0.2665	0.00677
	16	0.065	1.120	0.2419	0.00684
	17	0.058	1.134	0.2172	0.00701
	18	0.049	1.152	0.1848	0.00724
	12	0.109	1.282	0.4763	0.00896
	13	0.095	1.310	0.4193	0.00936
	14	0.083	1.334	0.3694	0.00971
	15	0.072	1.358	0.3187	0.0100
	16	0.065	1.370	0.2930	0.0102
	17	0.058	1.384	0.2627	0.0107
	18	0.049	1.402	0.2234	0.0109

<i>Diámetro exterior</i> (in)	<i>Espesor de la pared (in)</i>		<i>Diámetro interior</i> (in)	<i>Sección transversal</i> (ft ²)	<i>Area transversal interior</i> (ft ²)
	<i>Calibre B. W. G.</i> <i>y de Stubs</i>	(in)			
1 $\frac{3}{4}$	10	0.134	1.482	0.6803	0.0120
	11	0.120	1.510	0.6145	0.0124
	12	0.109	1.532	0.5620	0.0128
	13	0.095	1.560	0.4939	0.0133
	14	0.083	1.584	0.4346	0.0137
	15	0.072	1.606	0.3796	0.0141
	16	0.065	1.620	0.3441	0.0143
2	10	0.134	1.732	0.7855	0.0164
	11	0.120	1.760	0.7084	0.0169
	12	0.109	1.782	0.6475	0.0173
	13	0.095	1.810	0.5686	0.0179
	14	0.083	1.834	0.4998	0.0183
	15	0.072	1.856	0.4359	0.0188
	16	0.065	1.870	0.3951	0.0191

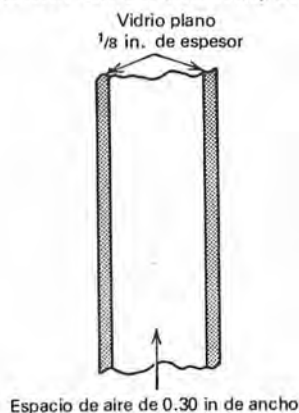
Problemas

- 1.1 Hay aire encerrado entre las paredes exterior e interior de una casa. Este espacio tiene $3\frac{5}{8}$ in suficientemente grande en las otras dimensiones para que se pueda considerar unidimensional la transferencia de calor. Si se puede suponer que la conducción es el modo dominante de transferencia de calor entre las paredes a las temperaturas 122°F y 73°F respectivamente, ¿cuál es el flujo de calor de estado estable que ocurre?

Si se vacía de alguna forma el espacio hasta una presión de 0.05 atmósferas, ¿cuál es el flujo de calor existente?

Comparar el flujo de calor calculado para el aire con el correspondiente cuando se rellena el espacio entre las paredes con aislante de lana de roca.

- 1.2 Se usan ventanas sobrepuestas contra tormentas para disminuir la transferencia de calor entre el interior de una casa y su medio ambiente. En un día frío, cuando la temperatura del



aire exterior está a 10°F y se mantiene el aire del interior de la casa a 71°F , ¿cuánto es el calor perdido a través de una ventana de dimensiones 6 ft por 12 ft. En la figura se muestra una sección de la sobreventana.

Los coeficientes de transferencia convectiva de calor en las superficies interior y exterior de la ventana son $3.5 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$ y $2.5 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$, respectivamente.

¿Cuál es la caída de temperatura a través de cada una de las hojas de vidrio?

¿Cuál es la temperatura promedio del aire encerrado?

- 1.3 Comparar la pérdida de calor a través de la ventana contra tormentas bajo las condiciones descritas en el problema anterior con la pérdida a través de una ventana de vidrio ordinario con lámina de $\frac{1}{8}$ -in de espesor. Se pueden emplear los valores de h dados en el problema 1.2.
- 1.4 Se construyen las paredes de una casa con una capa de tabiques de 4 in de espesor, $\frac{1}{2}$ in de Celotex, y espacio relleno de aire de $3\frac{1}{2}$ in de espesor, otros $\frac{1}{2}$ -in de Celotex y $\frac{1}{4}$ in de tablero de madera. La temperatura en la superficie exterior del tabique es igual a 30°F y la del tablero interior de madera (expuesto al aire del cuarto) es igual a 74°F .

Encontrar el flujo de calor a través de esta pared si

- a) el espacio de aire transmite el calor solamente por conducción
- b) hay corrientes de convección en el espacio de aire que hacen la conductancia equivalente de este espacio igual a $2.0 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$.
- c) se rellena el espacio entre las paredes interior y exterior con lana de vidrio,

$$\begin{aligned} k_{\text{tabique}} &= 0.38 \text{ Btu/hr-ft-}^{\circ}\text{F} \\ k_{\text{Celotex}} &= 0.027 \text{ Btu/hr-ft-}^{\circ}\text{F} \\ k_{\text{lana}} &= 0.12 \text{ Btu/hr-ft-}^{\circ}\text{F} \\ k_{\text{lana vidrio}} &= 0.027 \text{ Btu/hr-ft-}^{\circ}\text{F} \end{aligned}$$

- 1.5 Dadas las mismas condiciones y dimensiones de la pared compuesta descrita en el problema anterior, determinar el flujo de calor para temperaturas interior y exterior de 74°F y 20°F respectivamente con coeficientes de transferencia convectiva de calor iguales a 3 y $8.5 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$ en las superficies de las paredes interior y exterior respectivamente. Resolver este problema para cada uno de los tres casos especificados en el problema 1.4.
- 1.6 Considere el caso de la conducción estable unidimensional a través de un medio que tiene una sección transversal que dis-

minuye linealmente desde el valor A_0 en $x = 0$ hasta A_L en $x = L$. Evaluar la razón de flujo de calor. Las temperaturas en $x = 0$ y $x = L$ son T_0 y T_L , respectivamente.

- 1.7 Se desea aislar un calentador de agua para que la pérdida de calor no sea superior a 750 Btu por ft^2 de área de pared. ¿Cuál es el espesor de asbesto requerido si se desea que las temperaturas de las superficies interior y exterior del aislante estén a 1500°F y 400°F respectivamente?
- 1.8 Si se desea aislar el calentador del problema anterior con asbesto, una de cuyas superficies está a 1500°F , ¿cuál es el espesor necesario del aislante si se requiere que el aire adyacente esté a la temperatura de 80°F con un valor de h igual a 11 Btu/hr-ft 2 - $^\circ\text{F}$? ¿Cuál es la temperatura de la superficie del aislante? Se requiere que el flujo de calor no sea mayor que 750 Btu/hr-ft 2 .
- 1.9 Se desea formar una pared compuesta de acero inoxidable de $\frac{3}{8}$ -in de espesor, 3 in de lámina de corcho y $\frac{3}{4}$ in de plástico ($k = 1.3$ Btu/hr-ft- $^\circ\text{F}$). Se requiere que la temperatura exterior del acero inoxidable esté a 250°F y que la temperatura de la superficie del plástico esté a 60°F .
 - a) Determinar la resistencia térmica de cada capa de material.
 - b) Determinar el flujo de calor.
 - c) Encontrar la temperatura en cada superficie de la lámina de corcho.
- 1.10 En el problema anterior se expone la pared compuesta a gases que están a 250°F y 70°F con coeficientes de transferencia convertida de calor iguales a 45 y 6 Btu/hr-ft 2 - $^\circ\text{F}$ en las superficies de acero y plástico respectivamente. Encontrar
 - a) el flujo de calor
 - b) las temperaturas de superficie e interfacial para la pared.
 - c) la resistencia térmica individual que controla.
- 1.11 Hay una placa de acero de 1/2-in de espesor, y cuyas superficies miden 4 ft por 6 ft en el suelo en un día de verano cuando el aire ambiente está a 95°F . El coeficiente de transferencia de calor entre la superficie de acero y el aire ambiente es igual a 1.0 Btu/hr-ft 2 - $^\circ\text{F}$. La energía solar incide sobre el acero con un flujo de 360 Btu/hr-ft 2 - $^\circ\text{F}$. Si se considera negra la superficie de acero, ¿cuál es la temperatura superficial bajo las condiciones descritas?
- 1.12 Para las condiciones del problema anterior, calcular la temperatura superficial del acero si es "gris" con una emisividad de 0.85. (Se absorbe 85% de la energía radiante que incide en

la superficie; se refleja el 15% restante; en realidad, se emite 85% de la emisión de cuerpo negro que sale de la superficie). Se puede suponer que el cielo absorbe toda la energía radiante que sale de la superficie del acero. ¿Cuál sería la temperatura de la superficie de acero si se despreciara la convección?

- 1.13 Resolver el problema 1.11 para la temperatura de la placa de acero si está en un soporte con aire a 35°C adyacente a ambas superficies. Todavía incide la energía solar en un lado.
- 1.14 Se calienta por debajo una placa de aluminio de 2 in de espesor con 10 in de diámetro mediante una placa caliente cuyas superficie superior y borde están expuestos al aire libre de 75°F. Se puede considerar que la conductancia de la superficie (incluyendo la radiación) es igual a 8 Btu/hr-ft²·°F. ¿Cuánto calor debe proporcionar la placa caliente si se requiere que la superficie superior del aluminio esté a 160°F?
- 1.15 Comparar la solución del problema 1.14 con el caso de un disco circular de la misma dimensión hecho de
 - a) cobre
 - b) acero inoxidable
 - c) asbesto
 - d) plomo.
- 1.16 Se desea colocar un tubo de acero de 1-1/2-in y calibre 80 con su superficie exterior a 400°F en aire a 90°F en donde el coeficiente de transferencia convectiva de calor entre la superficie de acero y el aire ambiente es igual a 1.6 Btu/hr-ft²·°F. Se propone agregar aislante de 85% magnesio a la superficie del tubo para reducir la pérdida de calor a un medio del correspondiente al tubo desnudo. ¿Cuál espesor de aislante se debe emplear si el coeficiente de transferencia de calor, h_0 , y la temperatura de la superficie exterior del acero retienen los mismos valores dados arriba?
- 1.17 Resolver el problema anterior manteniendo iguales todas las condiciones excepto que la conductancia de la superficie varía de acuerdo con $h_0 = 1.1/D_0^{1/4}$, en donde D_0 es el diámetro externo del aislante en pies.
- 1.18 Se hace entrar vapor saturado a 400 psía en un tubo de acero dulce de 2 in y calibre 40. El tubo está aislado con 3 in de magnesio al 85% y rodeado por aire a 55°F. Los coeficientes de transferencia convectiva de calor en la superficie interior del tubo y en la superficie exterior del aislante son de 270 Btu/hr-ft²·°F y 4.5 Btu/hr-ft²·°F respectivamente. Determinar

- a) la resistencia térmica de cada porción de la trayectoria de flujo de calor.
 - b) la pérdida total de calor por pie de tubo aislado.
 - c) el flujo de calor basado en el área de la superficie exterior del tubo de acero.
 - d) las temperaturas en la superficie interior del tubo, la interfase acero-magnesia y la superficie exterior del aislante.
 - e) la cantidad de vapor condensado en una longitud de 20 ft de tubería.
 - f) el coeficiente de transferencia total de calor para el tubo aislado.
- 1.19 Una pared plana tiene espesor igual a L y se mantienen sus dos superficies a las temperaturas T_0 y T_L , respectivamente. Si la conductividad térmica del material de la pared varía de acuerdo con $k = k_0(1 + \alpha T + \beta T^2)$, obtener una expresión para el flujo de calor unidireccional de estado estable.
- 1.20 Un colchón de asbesto, de sección transversal cuadrada mide 4 in por lado en su extremo grande; los lados decrecen linealmente hasta 2 in en su extremo pequeño. La pieza tiene 6 in, de altura y se mantienen las temperaturas en los extremos grande y pequeño a 800°F y 150°F respectivamente. Si se supone conducción unidimensional de calor y se desprecian las pérdidas convectivas de los lados, ¿cuál es la razón de conducción de calor a través del asbesto?
- 1.21 Resolver el problema anterior para el caso en que la temperatura en el extremo pequeño está a 800°F y la temperatura en el extremo mayor es de 150°F .
- 2.1 Partiendo de la forma cilíndrica de la ecuación de calor, bajo condiciones de estado estable se aplica la ecuación de Laplace y aparece en la forma de la ecuación (2.56).
- a) ¿A qué forma se reduce esta expresión si la conducción solamente va en la dirección radial?
 - b) Obtener la variación de la temperatura $T(r)$ en el caso de la conducción radial con las condiciones límite

$$\begin{aligned} T(r_i) &= T_i \\ T(r_o) &= T_o \end{aligned}$$

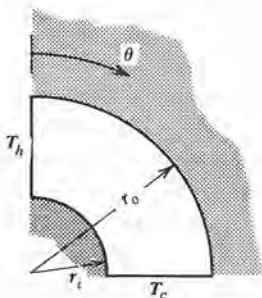
- c) Expresar la razón de flujo de calor q_r , que sigue de la expresión generada en b).
- d) ¿Cuál es el factor de forma para esta configuración?

- 2.2 Para la conducción de estado estable en las coordenadas esféricas, la ecuación de Laplace es de la forma dada por la ecuación (2-57).

- ¿Cuál es la forma que toma esta ecuación para la conducción en la dirección radial solamente?
- Obtener el valor de $T(r)$ en el caso de conducción radial con condiciones límites iguales a

$$\begin{aligned} T(r_i) &= T_i \\ T(r_o) &= T_o \end{aligned}$$

- Usando el perfil de temperaturas de b), evaluar la razón q_r de flujo de calor.
 - ¿Cuál es el factor de forma para esta configuración?
- 2.3 La ilustración que sigue muestra una pared cilíndrica cuyas superficies en $r = r_o$ y $r = r_i$ están aisladas de tal manera que el flujo de calor ocurre en la dirección de θ
- Explicar (o demostrar) la razón por la que bajo estas condiciones, las isotermas son líneas radiales y el flujo de calor está en la dirección de θ
 - Reducir la ecuación (2-56) a la forma aplicable para las condiciones especificadas.
 - Obtener $T(\theta)$ con las condiciones límite $T(0) = T_h$, $T(\pi/2) = T_c$.
 - Usando el resultado de c), expresar q_θ , la razón de flujo de calor en la dirección de θ
 - ¿Cuál es el factor de forma para esta configuración?



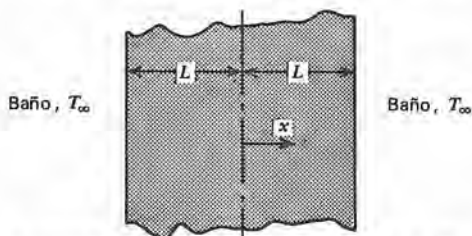
- Usando el resultado del problema 2.1 d), resolver los incisos d) y e) del problema 2.3 anterior.
- Se tiene una plancha doméstica con placa de acero inoxidable inicialmente a la temperatura ambiente T_0 . Cuando se conecta la corriente, la energía eléctrica genera calor uniformemente a la razón de \dot{q} Btu/hr-ft³ en la placa de acero. Para un

volumen V de acero inoxidable y un área superficial A , expuesta al aire con un coeficiente convectivo h entre la plancha y el aire ambiente, se desea encontrar la temperatura de la placa de acero en función de tiempo.

- a) Formular este problema utilizando un enfoque de parámetro "de mosaico", suponiendo que T es una función solamente del tiempo.
 - b) Obtener el valor de $T(t)$.
 - c) Formular este problema usando un enfoque diferencial. Modele la placa de acero de la plancha como un sólido rectangular con generación interna uniforme de calor. La convección ocurre en todas las superficies excepto una.
- 2.6 Se puede modelar una barra de combustible nuclear como un cilindro largo con generación volumétrica uniforme de energía \dot{q} , y convección en la superficie cilíndrica a un refrigerante con un coeficiente h de transferencia convectiva de calor aplicable a la superficie. Para una temperatura inicial de la barra de combustible, T_0 , temperatura T del refrigerante, diámetro D de la barra, y todas las propiedades del material de la barra de combustible consideradas constantes,
- a) formular el problema a partir de un enfoque de parámetro "de mosaico" para encontrar la temperatura de la barra en función del tiempo.
 - b) resolver la ecuación que se obtuvo en a) para despejar el valor de $T(t)$.
- 2.7 Si la barra cilíndrica de combustible del problema 2.6 es muy larga, se puede suponer sin dificultad que $T = T(r, t)$.
- a) Formular este problema, a partir de la expresión diferencial general para la conducción, ecuación (2-50).
 - b) Despejar la distribución de la temperatura de estado estable en la barra de combustible de la ecuación que se generó en a) con las condiciones especificadas.
- 2.8 Si la barra cilíndrica de combustible descrita en el problema 2.6 es delgada y su conductividad es buena, se puede suponer sin dificultad que $T = T(x)$ únicamente, o sea que la variación de la temperatura es en la dirección de las r . Para tal caso, con una barra de combustible de longitud L y generación interna de energía en función de x , o sea $\dot{q} = \dot{q}(x)$,
- a) formular el problema para encontrar $T(x, t)$ a partir de la expresión más completa, ecuación (2-50).
 - b) despejar la distribución de temperatura de estado estable, $T(x)$, bajo las condiciones especificadas.

- 2.9 Una placa plana, que está inicialmente a la temperatura T_0 , se coloca en un baño a la temperatura T_∞ con un coeficiente de transferencia de calor h aplicable en la interfase superficie-líquido. El espesor de la placa es $2L$ y se pueden considerar constantes sus propiedades. También se puede considerar constante la temperatura del baño.

- Formular el problema en forma de parámetro de mosaico, o sea para $T(t)$.
- Obtener la ecuación a partir de a).
- Formular el problema en forma diferencial, o sea para $T(x, t)$.

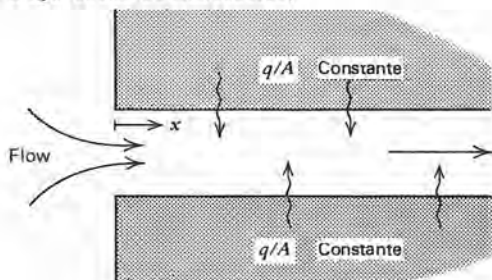


- ilustrar la variación de la temperatura en x de $t = 0$ hasta $t = \infty$.

- 2.10 Se deja caer repentinamente una esfera sólida de radio R que inicialmente está a la temperatura uniforme T_0 , a un baño que está a la temperatura T_∞ . Para T_∞ y propiedades sólidas constantes,

- formular el problema en forma de parámetro "de mosaico", o sea $T = T(t)$.
- despejar el valor de $T(t)$ en el caso del parámetro "de mosaico".
- formular el problema en forma diferencial, o sea para $T(r, t)$.

- 2.11 Un líquido a la temperatura T_e entra a un canal como se muestra entre dos placas calientes que tienen un flujo uniforme de energía impuesto en ambas paredes. El líquido fluye a la velocidad v constante y se pueden considerar constantes sus propiedades. Bajo estas condiciones,



- a) formular el problema para encontrar la temperatura "de mosaico" del fluido en función de x , la distancia medida a lo largo del canal desde la entrada.
- b) obtener el valor de $T(x)$.

2.12 Despejar el valor de $T(x)$ en el problema anterior en el caso de un fluido que fluye en el canal entre dos paredes planas paralelas en donde el flujo de calor desde ambas paredes está dado por la expresión

$$\frac{q}{A} = \alpha + \beta \sin \frac{\pi x}{L}$$

donde α y β son constantes y L es la longitud del conjunto de placas en la dirección de las x .

2.13 Un líquido a la temperatura T_e se hace entrar a un tubo de diámetro D , que está envuelto uniformemente con un elemento calefactor de tal forma que se impone un flujo constante de calor en la pared del tubo. El líquido fluye a velocidad v constante y se puede suponer que sus propiedades son constantes. Para estas condiciones,

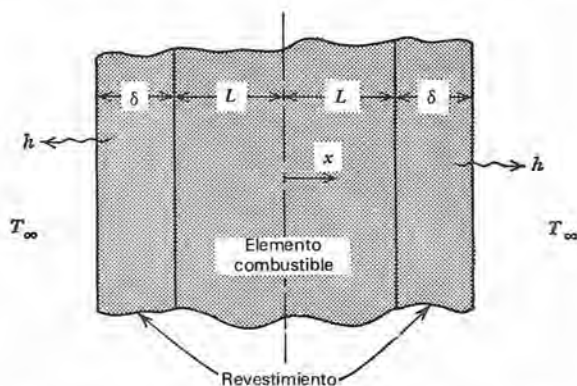
- a) formular el problema en que se expresa la temperatura del fluido de mosaico en función de x , la distancia en que avanza el líquido a partir de la entrada del tubo.
- b) obtener $T(x)$.

2.14 Dadas las condiciones del problema anterior, excepto que el flujo de calor de la pared es una función de x , o sea $q/A = (q/A)(x)$,

- a) formular el problema para encontrar $T(x)$.
- b) obtener $T(x)$, dado que $q/A = \alpha + \beta \sin \pi x/L$.
- c) ilustrar la variación de q/A y T con x . Señalar la forma en que cambian las ilustraciones si aumentan α y/o β

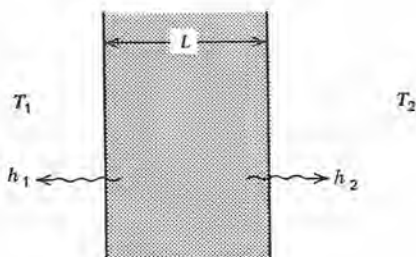
2.15 Se pueden considerar los elementos combustibles de los reactores nucleares como placas planas en donde se genera uniformemente la energía térmica a la razón 9 Btu/hr-ft³. Las placas están recubiertas con un material que tiene espesor δ en donde no ocurre generación de energía. Se hace fluir refrigerante a la temperatura T_∞ entre las placas, y se puede considerar que el coeficiente h de transferencia de calor es constante entre la superficie de la placa y el refrigerante. Se desea encontrar la variación en la temperatura dentro de un elemento combustible. En la ilustración siguiente se muestran las dimensiones.

- Formular el problema para encontrar $T(x)$, en los elementos combustibles y el revestimiento.
- Obtener $T_p(x)$ en los elementos combustibles y $T_c(x)$ en el revestimiento.
- Hacer una ilustración de la variación de la temperatura en los elementos combustibles y en el revestimiento.
- Mostrar la forma en que cambia el perfil de la temperatura ilustrado en el inciso (c) si se aumenta h .



- 2.16 Resolver el problema 2.14 para el caso en que un elemento combustible es un cilindro de diámetro D , recubierto con material de espesor uniforme.
- 2.17 Una placa de espesor L tiene expuestas sus superficies a fluidos a las temperaturas T_1 y T_2 , respectivamente, en donde $T_1 > T_2$.

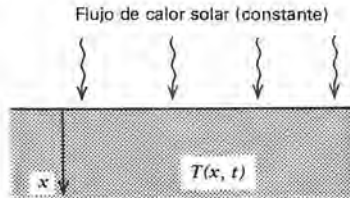
Se pueden usar los coeficientes de transferencia de calor h_1 y h_2 para expresar los flujos de calor convectivo en las superficies 1 y 2 respectivamente. Para una placa que inicialmente está a la temperatura uniforme D_0 , para $T_0 < T_2$, formular el problema en la forma de parámetro "de mosaico" y despejar $T(t)$.



- 2.18 Para la placa y condiciones descritas en el problema anterior, formular el problema en forma diferencial.

¿Cómo cambia la formulación si $T_1 > T_0 > T_2$?

- 2.19 Para el problema 2.17, reducir la formulación diferencial a condiciones de estado estable. Obtener $T(x)$ e ilustrar el perfil de temperatura de estado estable.

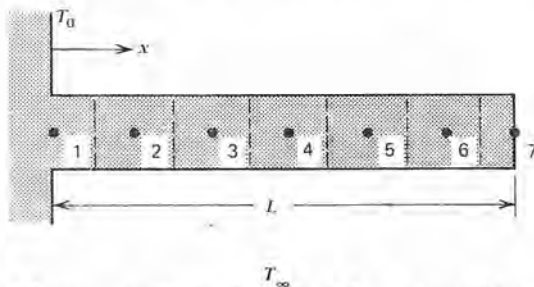


- 2.20 Aproximando la superficie de la tierra como la de un medio semi-infinito, formular el problema en que se debe encontrar la temperatura dentro de la tierra, dada en la forma $T(x, t)$, cuando la temperatura inicial de la tierra estaba uniforme en T_0 , e incide un flujo constante solar en la superficie en $x = 0$.

Ilustrar el perfil de temperatura que se espera encontrar dentro de la tierra después que haya transcurrido un tiempo corto t_1 y después de transcurrido un periodo más largo t_2 .

- 2.21 Repetir el problema anterior incluyendo la consideración de convección en la superficie con conductancia h de superficie y temperatura T_0 del aire.

- 3.1 En la ilustración siguiente se muestra una superficie con aletas. T_0 es la temperatura en la raíz de la aleta, T_∞ es la temperatura del aire ambiente y la conductancia superficial es h . Para el arreglo de nodos mostrado, formular el problema en forma de diferencias para encontrar la distribución de temperatura de estado sólido, usando el enfoque de balance de calor.



- 3.2 Si en el problema anterior el material es acero inoxidable, el área transversal de la aleta es 0.004 ft^2 , el perímetro de la aleta es 0.035 ft , $h = 100 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^\circ\text{F}$, $T_0 = 850^\circ\text{F}$, y $T_\infty = 1800^\circ\text{F}$,

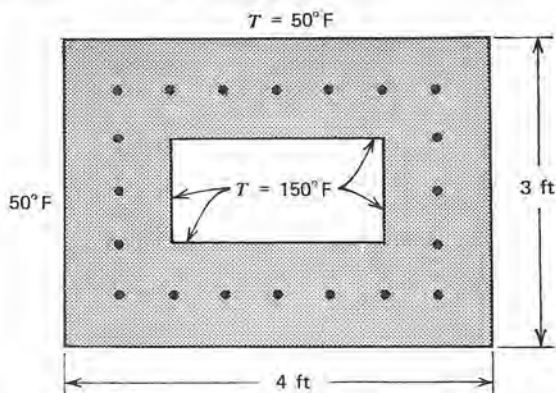
- a) la distribución de temperatura de estado estable en la aleta.
 b) la razón de transferencia de calor a la raíz de la aleta.
- 3.3 Formular numéricamente el problema transitorio en que la superficie con aletas descrita en el problema 3.1 está inicialmente a la temperatura T_0 y está expuesta a aire a T_∞ para $t > 0$.

Desarrollar las fórmulas en que la solución

- a) sea explícita (diferencia hacia adelante para la derivada en el tiempo).
 b) sea implícita (diferencia hacia atrás para la derivada en el tiempo).
 c) sea implícita (el método de Crank-Nicholson para considerar las derivadas en el tiempo).

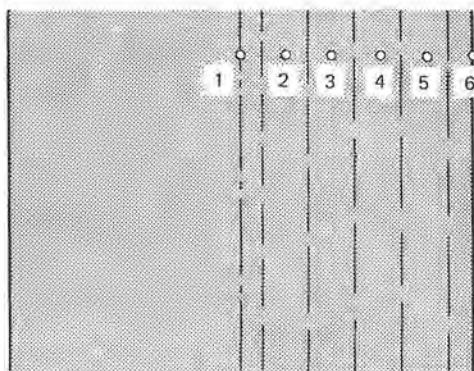
Comentar los criterios de estabilidad para cada enfoque usado.

- 3.4 Formular numéricamente el caso descrito en el problema 2.3. Dados $r_o = 5$ in., $r_i = 4$ in., $E_h = 400^\circ\text{F}$, y $T_c = 250^\circ\text{F}$, obtener numéricamente la distribución de temperatura de estado estable en la circunferencia.
- 3.5 Dada la sección rectangular hueca mostrada en la siguiente ilustración con temperaturas conocidas de superficie, formular el problema para la determinación numérica de las temperaturas de estado estable en los 20 nodos. Notar que la simetría puede disminuir apreciablemente el trabajo para obtener la distribución de la temperatura.



- 3.6 Para el caso descrito en el problema anterior, obtener las temperaturas en cada nodo interno, usando la eliminación de Gauss. El material de la pared es tabique de construcción.

- 3.7 Obtener las temperaturas nodales en el problema 3.4, usando la iteración de Gauss-Seidel. El material de la pared es tabique de construcción.
- 3.8 Formular el problema de conducción de calor transitorio en que el sistema descrito en el problema 3.5 inicialmente está a la temperatura uniforme de 50°F . Desarrollar esta formulación en
- forma explícita.
 - forma implícita, usando una primera diferencia hacia atrás para $\partial T/\partial t$.
 - forma implícita, usando el enfoque de Crank-Nicholson.
- 3.9 El problema 2.9 describe un caso transitorio unidimensional. Formular numéricamente este problema con el arreglo nodal mostrado en la siguiente ilustración en
- forma explícita.
 - forma implícita, usando una primera diferencia hacia atrás para $\partial T/\partial t$.
 - Forma implícita, usando el enfoque de Crank-Nicholson.



- 3.10 Obtener una formulación numérica para el caso de estado estable descrito en el problema 2.15 para un elemento combustible revestido de reactor nuclear.
- 3.11 Para el problema anterior, desarrollar la formulación numérica para el problema transitorio en que el elemento combustible inicialmente está a la temperatura uniforme T_{∞} . ¿Cuáles son los incrementos de tiempo recomendables para resolver este problema? Desarrollar el trabajo en
- forma explícita.
 - forma implícita, usando una primera diferencia hacia atrás para $\partial T/\partial t$.

c) forma implícita, usando el enfoque de Crank-Nicholson.

- 4.1 Se hace una pared compuesta de aluminio de 1/2 in. de espesor, tablero de corcho de 1/2 in. y plástico de 1/8 in. ($k = 1.3$ -Btu/hr-ft²-°F). La temperatura exterior del aluminio es igual a 250°F y se mantiene la superficie del plástico a 80°F. ¿Cuánto calor se transfiere por pie cuadrado de superficie de pared bajo estas condiciones? ¿Cuáles son las temperaturas a cada lado del tablero de corcho?
- 4.2 Para la pared compuesta descrita en el problema 4.1, ¿cuál es el flujo de calor si se usan remaches de aluminio de 1/4-in de longitud para fijar la pared? Los remaches están localizados en un arreglo cuadrado y colocados en perforaciones de 3 in.
- 4.3 Se expone la pared compuesta descrita en el problema 4.1 a aire a 325°F del lado del aluminio ($h = 60$ Btu/hr-ft²-°F) y a aire a 60°F del lado del plástico ($h = 6$ Btu/hr-ft²-°F). ¿Cuál es el flujo de calor y las temperaturas en las superficies de aluminio y plástico de la pared?
- 4.4 Para las temperaturas y valores de h dados en el problema anterior, determinar el flujo de calor y las temperaturas superficiales para la pared compuesta con remaches de aluminio descrita en el problema 4.2. ¿Hay alguna de las resistencias térmicas que controle el flujo de calor en este caso? ¿De ser así, cuál es?
- 4.5 Una tubería que lleva vapor saturado a 300 psi pasa por un recinto en el cual el aire está a la temperatura de 80°F. Si los valores de h de las paredes interna y externa de la tubería son 1700 y 7 Btu/hr-ft²-°F respectivamente, ¿cuál será la pérdida de calor por metro de tubería? La tubería tiene 2-1/2-in y es de acero suave de calibre 80.
- 4.6 Si se aísla la línea de vapor descrita en el problema anterior con magnesio de 2 in al 85%, ¿cuál será la disminución en pérdida de calor comparada con el caso en que la tubería está desnuda? Se puede considerar que las demás condiciones enunciadas para la tubería del problema anterior son iguales.
- 4.7 Si se desea reducir la pérdida de calor de la tubería desnuda considerada en el problema 4.5 en 50%, ¿qué espesor de magnesio al 85% se requiere?
- 4.8 Se requiere que una línea de vapor de acero suave, 3-in y acero de calibre 80 lleve vapor a 250°F por un túnel en que la temperatura puede llegar hasta a 100°F. Para que la temperatura superficial nunca sea superior a los 140°F, ¿cuánto

calcular aislante de magnesio al 85% se debe agregar a la pared de la tubería? Los valores de h que se aplican a las superficies interior y exterior de la tubería son 850 y 12 Btu/hr-ft²-°F respectivamente.

- 4.9 Obtener el espesor requerido de aislante cuando la tubería del problema 4.8 lleva vapor a 500°F.
- 4.10 Un tubo de acero de calibre 40 y 2-in lleva vapor saturado a 60 psi a 40 ft a través de una habitación cuya temperatura es de 70°F. La tubería está aislada con magnesio al 85% de 1-1/2 in que cuesta \$2.16 por ft. Si el costo de calentar el vapor es de \$3.50 10 Btu, ¿qué longitud debe tener la línea en servicio para justificar el costo del aislante? El valor de h en la superficie externa del aislante es de 6 Btu/hr-ft²-°F.
- 4.11 Obtener la longitud necesaria de servicio para la tubería de vapor aislada del problema 4.10 si se expone la línea a aire a 0°F en una longitud de 60 ft con h en la superficie exterior igual a 16 Btu/hr-ft²-°F.
- 4.12 Se almacena nitrógeno líquido en un recipiente esférico que mide 14 in de diámetro. A una atmósfera de presión total, la temperatura de saturación del nitrógeno es de 139.3°R, el calor latente de evaporación es 8.5.7 Btu/lb_m, y el volumen específico del líquido saturado y vapor saturado son 0.020 y 3.48 ft/lb_m respectivamente.
Se desea aislar el exterior del recipiente esférico de acero inoxidable con asbesto de manera que parte del nitrógeno líquido permanezca después de 36 horas de haber llenado el mismo. ¿De qué espesor debe ser el aislante de asbesto? El recipiente se ventila hacia la atmósfera a 75°F, y el coeficiente de la superficie exterior es 8 Btu/hr-ft²-°F.
- 4.13 ¿A qué velocidad se pierde la mitad del nitrógeno líquido en el recipiente esférico descrito en el problema anterior si no se aísla el recipiente de acero inoxidable de 1/4 in? Se puede considerar que el coeficiente superficial es igual 8 Btu/hr-ft²-°F.
- 4.14 Se almacena nitrógeno líquido con las propiedades dadas en el problema 4.12 en una botella de Dewar, que se puede considerar como un recipiente esférico con diámetro interior de 10 in. Las paredes de la botella están hechas de vidrio pyrex de 0.040 in de espesor con espacio al vacío de 1/4 in entre ellas. Las observaciones repetidas indican que se pierde 0.5 lb_m del nitrógeno por evaporación cada periodo de 48 horas. ¿Cuál es la conductancia efectiva del gas a baja presión en las

paredes de la botella bajo estas condiciones si h exterior es igual a 6 Btu/hr-ft²-°F y del aire ambiente que rodea la botella está a 72°F?

- 4.15 De acuerdo con la ecuación (4-5), la razón de estado estable de conducción de calor a través de una pared plana es $q = (kA/L) \Delta T$. Para la conducción de estado estable a través de una pared cilíndrica, la razón de flujo de calor está dada por la ecuación (4-10) como

$$q = \frac{2\pi kL}{\ln \frac{r_o}{r_i}} \Delta T$$

- a) Demostrar que es posible poner la ecuación (4-10) en la forma de la ecuación (4-5), en donde el área efectiva A en la expresión

$$q = \frac{k\bar{A}}{r_o - r_i} \Delta T$$

es el área media logarítmica dada por

$$A_{lm} = \frac{2\pi L(r_o - r_i)}{\ln \frac{r_o}{r_i}}$$

- b) Si se usa el área media aritmética $\pi L(r_o + r_i)$, en vez de la media logarítmica para una pared cilíndrica, ¿cuál será el porcentaje de error para valores de r_o/r_i iguales a 1.5, 3, y 5?
- 4.16 Encontrar el valor apropiado de \bar{A} para una pared esférica cuando se expresa el flujo de calor en la forma

$$q = \frac{k\bar{A}}{r_o - r_i} \Delta T$$

Repetir b) del problema 4.15 para el caso esférico.

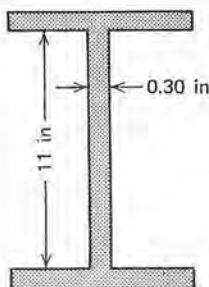
- 4.17 Se desea utilizar el nicromo, cuya resistividad es de 110 $\mu\Omega$ -cm, como elemento calefactor en un calentador de 10-kw. La temperatura superficial del nicromo no debe ser superior a 2400°F. Otras características del diseño incluyen

voltaje de entrada igual a 12 voltios.
temperatura ambiente igual 200°F
coeficiente de la superficie exterior igual a
200 Btu/hr-ft²-°F

- a) ¿Cuál es el diámetro del nicromo necesario para un calentador de 3 ft bajo estas condiciones?
- b) ¿Cuál es la longitud de alambre de calibre 14 necesaria para satisfacer los criterios dados?
- c) ¿Son las respuestas a a) y b) muy sensitivas a h ? ¿Cuáles son las respuestas a a) y b) si $h = 200 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^\circ\text{F}$?
- 4.18 Se forma un calentador de sandwich de alambre de nicromo enrollado de atrás hacia adelante y cubriendo una capa de asbesto de $1/8 \text{ in}$ a ambos lados, con acero inoxidable de $1/8 \text{ in}$ en el lado externo de cada pieza de asbesto. Para un coeficiente superficial exterior de $3 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^\circ\text{F}$ y una temperatura máxima del nicromo limitada a 1200°F ¿cuánta energía en watts/ft^2 se debe proporcionar al calentador? ¿Cuál será la temperatura superficial del acero inoxidable?
- 4.19 Un tubo de cobre nominal de 1 in se mantiene a 230°F en su superficie exterior. Se propone agregar aletas hechas de cobre de $3/32 \text{ in}$ de espesor y $3/4 \text{ in}$ de alto a la superficie del tubo para aumentar la razón de transferencia de calor. Si se agregan 12 aletas longitudinales igualmente espaciadas con las dimensiones dadas a la superficie del tubo, ¿cuál será el porcentaje de aumento en la transferencia de calor del tubo? El aire ambiente está a 80°F y se puede considerar que el coeficiente de superficie es $1.8 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^\circ\text{F}$.
- 4.20 Para establecer la importancia de la conductividad térmica sobre las razones de transferencia de calor de tubos con aletas, hacer nuevamente el problema 4.19 para materiales con los siguientes valores de conductividad térmica:
- $k = 132 \text{ Btu/hr-ft-}^\circ\text{F}$ (aluminio)
 $k = 70 \text{ Btu/hr-ft-}^\circ\text{F}$ (latón)
 $k = 40 \text{ Btu/hr-ft-}^\circ\text{F}$ (fierro)
 $k = 24.8 \text{ Btu/hr-ft-}^\circ\text{F}$ (acero suave)
 $k = 9.8 \text{ Btu/hr-ft-}^\circ\text{F}$ (acero inoxidable)
- Graficar el incremento en por ciento en la transferencia de calor para aletas de las dimensiones prescritas contra la conductividad térmica.
- 4.21 Hacer una gráfica del porcentaje de incremento en la transferencia de calor de una tubería con aletas sobre un tubo desnudo en función del coeficiente de superficie exterior manteniendo los demás valores como en el problema 4.19. Considere valores de h desde 1 hasta $150 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^\circ\text{F}$.
- 4.22 Se desean agregar aletas circulares de $1/32 \text{ in}$ de espesor y $3/4 \text{ in}$ de altura al tubo de 1 in del problema 4.19 cuya superficie

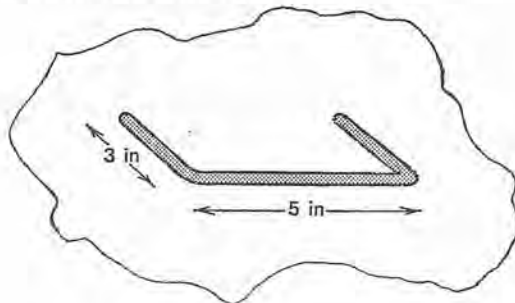
está a 230°F . Si se agregan 12 aletas de cobre cada ft, encontrar el porcentaje de aumento en la transferencia de calor comparada con el tubo desnudo. Como en el problema 4.19, el coeficiente superficial y la temperatura del aire son $1.8 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$ y 80°F respectivamente.

- 4.23 Una varilla metálica de 1 in de diámetro tiene un extremo en un horno y el resto está expuesto a aire a 75°F con un coeficiente superficial de $4 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$. Si se miden temperaturas sobre la varilla a 3 in de distancia y son iguales a 258°F y 197°F , calcular la conductividad térmica del material de la varilla.
- 4.24 Una viga I de acero con las dimensiones mostradas tiene sus patines superior e inferior adyacentes a materiales a 1000°F y 250°F respectivamente. El aire ambiente está a 80°F , y se aplica un valor de $h = 12 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$ en las superficies metálicas.
- Suponiendo un cambio despreciable en la temperatura a través de cada patín, generar una expresión para la temperatura T de el alma en función de x , la distancia creciente con respecto al patín a 1000°F .
 - Graficar $T(x)$.
 - Evaluar la razón de transferencia de calor por pie, hacia o del alma en ambos patines.

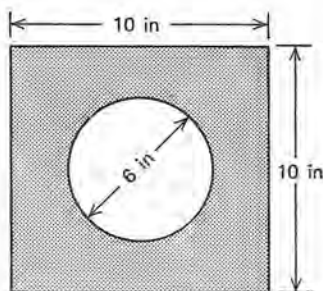


- 4.25 Repetir el problema 4.24, pero con la viga I en aluminio. Se puede considerar el resto de la información igual que en el problema anterior.
- 4.26 Se utiliza una varilla de fierro de 2 ft de longitud como soporte en una chimenea a través de la cual pasan gases de combustión a 800°F . La varilla tiene $1/2$ in de diámetro; el coeficiente de transferencia de calor superficial es $150 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$. Determinar la máxima temperatura a lo largo de la varilla si

- a) las paredes de la chimenea se mantienen a 350°F donde se fijó la varilla.
- b) Los extremos de la varilla se mantienen a 300°F y 400°F respectivamente.
- 4.27 Se desea condensar vapor saturado a presión atmosférica sobre la superficie exterior de un tubo cuya temperatura se controla mediante agua a 50°F que corre por el exterior. El tubo es de níquel de 1 in y 16-BWG; el valor efectivo de h en la superficie interior del tubo es de $300 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$ y del lado del vapor en condensación, $h = 2200 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$. Se propone agregar aletas circulares de níquel en dimensiones $1/16 \text{ in.}$ de espesor y $7/8 \text{ in}$ de alto y 2.54 cm entre los centros, a la superficie del tubo. ¿Qué aumento en la razón de condensación se debe esperar agregando las aletas?
- 4.28 ¿Cuánto calor se debe agregar para soldar dos piezas muy largas de alambre de cobre de $1/8 \text{ in}$ de diámetro entre sí? La temperatura del aire ambiente es de 70°F y se puede considerar el coeficiente superficial igual a $3 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$. La temperatura de la soldadura debe estar al menos a 450°F antes de fundirse.
- 4.29 Una varilla de cobre de $3/8 \text{ in}$ de diámetro y 3 ft de longitud corre entre dos varillas de cobre cuyas temperaturas están a 60°F . La temperatura del aire ambiente es de 60°F y el coeficiente superficial de $5 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$. ¿Cuánta corriente puede llevar la varilla de cobre si se requiere que su temperatura no sea superior a los 150°F ? La resistividad del cobre es de $1.72 \times 10^{-6} \Omega\text{-cm}$.
- 4.30 Se agrega una varilla cilíndrica a la superficie de un recipiente caliente para que pueda manejarse. Se desea que la temperatura al centro de la manija no sea mayor a 120°F . Para las dimensiones de la manija mostradas (pág. 470), temperatura ambiente de 70°F y coeficiente superficial igual a $5 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$, ¿qué tan caliente puede estar la superficie a la que se agrega una manija de acero suave de $3/8 \text{ in}$?



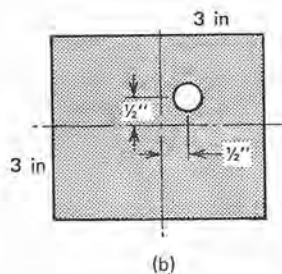
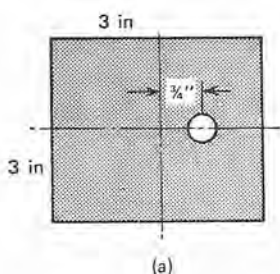
- 4.31 El ejemplo 4.6 se refería a una aleta bidimensional, y la solución para el caso de temperatura de superficie dada de acuerdo con $T(0, y) = F(y)$, $T(x, \pm l) = T_\infty$, $T(\infty, y) = T_\infty$; la ecuación (4-55) expresa la solución. Evaluar $T(x, y)$, utilizando la ecuación (4-55) como el punto de inicio cuando la función $F(y)$ es $T_{\max} \cos \pi y/2l$.
- 4.32 Obtener $T(x, y)$ como en el problema anterior con la función $F(y)$ dada como $F(y) = T_{\max} l^2 [1 - (y/l)^2]$.
- 4.33 Se coloca excéntricamente un tubo de 2 in de diámetro exterior con su superficie a 200°F dentro de un tubo de 6 in diámetro interior cuya superficie está a 60°F . El centro del tubo de 2-in está $3/4$ in del centro del tubo de 6 in. Se rellena con asbesto el espacio entre los tubos. Encontrar la razón de transferencia de calor entre los tubos a) graficando el flujo y b) utilizando el factor de forma de la tabla 4.3.
- 4.34 Se transportan gases calientes a 450°F a través de la abertura circular de 6 in de diámetro inferior de una estructura de chimenea de concreto con las dimensiones mostradas. Las temperaturas interior y exterior de las superficies de la chimenea se mantienen a 420°F y 100°F respectivamente. Encontrar la pérdida de calor por pie de chimenea utilizando a) técnicas de graficación de flujo y b) la tabla 4.3.



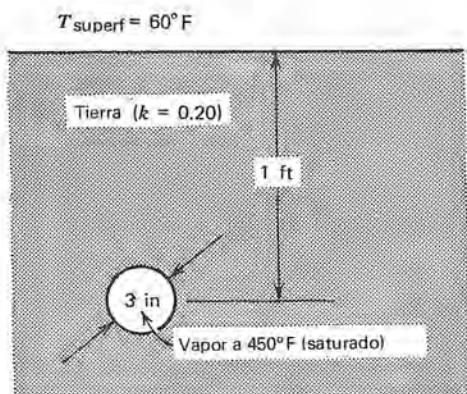
- 4.35 Se perfora un túnel rectangular de 3 ft de ancho y 6 ft de alto en "permafrost" ($k = 0.06$ Btu/hr-ft- $^\circ\text{F}$) y la parte superior a una profundidad de 2 ft bajo la superficie, que está a $\sim 10^\circ\text{F}$. Si las paredes del túnel están a 40°F , encontrar la pérdida de calor a la superficie, utilizando técnicas de graficación de flujo.
- 4.36 Se tiende una tubería que lleva aceite combustible en "permafrost" y las paredes de la tubería se mantienen a 35°F . Para la temperatura de la superficie del suelo a 30°F , encontrar la pérdida de calor si el centro del tubo de 8 in de diámetro ex-

terior está a 4 ft debajo de la superficie. Comparar los resultados obtenidos, usando técnicas de graficación de flujo, con aquellos utilizando el factor de forma determinado de la tabla 4.3. Para el permafrost, $k = 0.06 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^\circ\text{F}$.

- 4.37 ¿Cuál es la razón de transferencia de calor de la superficie de la tierra a un recipiente esférico de 3 ft de diámetro y su centro a 6 ft bajo la superficie de la tierra? El recipiente contiene oxígeno líquido a -297°F , y la superficie de la tierra está a 60°F . Se puede considerar que la conductividad térmica del suelo es de $0.4 \text{ Btu/hr-ft-}^\circ\text{F}$.
- 4.38 Se entierran profundamente dos tubos en la tierra ($k = 0.4 \text{ Btu/hr-ft-}^\circ\text{F}$), uno con vapor a 240°F , el otro con agua a 55°F . ¿Cuál es la razón de transferencia de calor entre los dos fluidos por pie de tubería si la línea de vapor tiene 8 in de diámetro, la de agua 3 in y están a 12 in de centro a centro? Resolverlo con una gráfica de flujos y con un factor de forma de la tabla 4.3.
- 4.39 Un elemento calefactor de varilla de 0.5 in de diámetro está embutido en el centro de un bloque de aluminio de 3 in^3 . La interfase de varilla-aluminio está a una temperatura de 600°F y la superficie exterior del aluminio a 250°F . ¿Cuál es la pérdida de calor por pie de este sistema compuesto?
- 4.40 Para las condiciones dadas en el problema anterior, encontrar la pérdida de calor si los errores de construcción hacen que el calentador en forma de varilla esté en las posiciones mostradas.



- 4.41 ¿Cuánto vapor se condensa en 30 ft de tubería de 3 in de diámetro exterior enterrada a 1 ft bajo la superficie como se muestra (pág. 472)? La superficie de la tierra está 60°F y el vapor entra saturado a 450°F . Se puede considerar que la conductividad térmica del suelo seco es de $0.20 \text{ Btu/hr-ft-}^\circ\text{F}$.



- 4.42 La mayoría de los once problemas anteriores que comprenden transferencia bidimensional de calor en estado estable se puede resolver utilizando los procedimientos numéricos semejantes a los empleados en los ejemplos 4.10 y 4.11. Partiendo de la forma bidimensional de la ecuación de Laplace, desarrollar una técnica numérica, diagrama de flujo y programa FORTRAN para resolver problemas de conducción típicos de estado estable bidimensionales, que sea compatible con el sistema de computadora al que usted tenga acceso. Utilizando su programa, resolver numéricamente
- el problema 4.31
 - el problema 4.32
 - el problema 4.34
 - el problema 4.39
 - el problema 4.40
- 4.43 Una barra de cobre que inicialmente está a 400°F mide 0.2 ft por 0.5 ft por 10 ft de longitud. ¿Después de cuánto tiempo de estar expuesta al aire a 80°F con $h = 12 \text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}^2\cdot^\circ\text{F}$, el centro de la barra llega a la temperatura de 200°F ?
- 4.44 Se sumergen municiones esféricas de plomo de 0.2 in de diámetro en aceite a 90°F después de haberse calentado a una temperatura uniforme de 420°F . Para un valor de h entre las esferas de plomo y el aceite de $30 \text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}^2\cdot^\circ\text{F}$, evaluar el histograma de tiempo-temperatura de una munición después de sumergirse en el baño de aceite. Si llega al fondo de la tina 12 segundos después de su primer contacto, ¿cuál es su temperatura al llegar al fondo?
- 4.45 Un cilindro que mide 2 ft de altura y 3 in de diámetro inicialmente está a 60°F . Determinar la cantidad de tiempo que

necesita el centro para llegar a 600°F cuando se coloca el cilindro en un medio a $1\,200^{\circ}\text{F}$ con $h = 16 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$ la superficie, para cilindros hechos de los siguientes materiales:

- a) acero inoxidable.
- b) aluminio.
- c) cobre.
- d) acero suave.
- e) asbesto.

4.46 Dado un cilindro de aluminio de 3 in de diámetro inicialmente a 60°F en un medio a $1\,200^{\circ}\text{F}$ con coeficiente de superficie de $16 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$, determinar el tiempo requerido para que la temperatura del centro alcance 600°F para alturas del cilindro de

- a) 3 in
- b) 6 in
- c) 1 ft
- d) 2 feet
- e) 5 feet

4.47 Se coloca la llanta de un neumático en una criba y se admite vapor a 320°F al derredor con un valor extremadamente grande para el coeficiente efectivo de la superficie. La difusividad térmica del hule es aproximadamente $0.0025 \text{ ft}^2/\text{hr}$. Para una temperatura inicial de 70°F , un espesor efectivo de la llanta de 1.25 in y una temperatura requerida en la capa central de 275°F , determinar el tiempo requerido para completar la vulcanización.

4.48 ¿Cuanto tarda el tratamiento térmico de una duela de vidrio que inicialmente está a 70°F uniforme para que su temperatura alcance al menos 730°F en todas partes? La pieza de vidrio se expone a aire a 810°F con un coeficiente de superficie de $3 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$. El vidrio es cilíndrico, mide 16 in de diámetro y 1.75 in de espesor.

4.49 Una zanahoria cuya forma se puede aproximar por un cilindro de 8 in de longitud y $3/4$ in de diámetro inicialmente está a temperatura ambiente a 70°F , y luego se deja caer en agua hirviendo a presión atmosférica. Se pueden considerar las propiedades del sistema y la zanahoria como sigue:

$$\begin{aligned} h &= 350 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F} \\ k &= 0.28 \text{ Btu/hr-ft-}^{\circ}\text{F} \\ c_p &= 0.95 \text{ Btu/lb}_m\text{-}^{\circ}\text{F} \\ \rho &= 64 \text{ lb}_m/\text{ft}^3 \end{aligned}$$

- ¿Durante cuánto tiempo debe cocinarse la zanahoria si se requiere que la temperatura mínima alcanzada sea de 195°F ?
- 4.50 Determinar el tiempo requerido de cocido para un nabo de 173 g expuesto a las mismas condiciones descritas antes para la zanahoria en el problema anterior. Se puede considerar que las propiedades de la zanahoria y del nabo son iguales. Suponga que el nabo es esférico.
- 4.51 Encontrar la temperatura en el centro de un bloque de concreto sólido que mide 1 ft por 1 ft por 4 in de espesor después de estar expuesto dos horas a vapor saturado a 210°F . Inicialmente, el concreto estaba a una temperatura uniforme de 80°F ; se puede considerar que el coeficiente superficial es de $300 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$.
- 4.52 Un lingote de acero inoxidable de forma cilíndrica, 10 in de longitud y 4 in de diámetro se calienta a una temperatura uniforme de 1200°F como preparación para el forjado. ¿Cuánto tiempo puede estar el lingote en aire inmóvil a 80°F con un coeficiente aplicable de superficie de $8 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$ antes que sus superficies alcancen la temperatura límite de 900°F ? ¿Cuál será la temperatura del centro del lingote para ese tiempo?
- 4.53 Se desea unir dos láminas de plástico inicialmente a 70°F y de $3/4$ in de espesor entre sí con pegamento que se fija a 300°F . Para calentar las láminas plásticas para que la capa de pegamento llegue a la temperatura requerida, se colocan y mantienen dos placas calientes de acero a 320°F próximas a las superficies plásticas. Determinar *a*) el tiempo requerido para que fragüe el pegamento y *b*) las temperaturas a $1/4$ in y $1/2$ in del acero al tiempo que se logre la temperatura de fraguado del pegamento. Las propiedades aplicables del plástico son

$$k = 0.090 \text{ Btu/hr-ft-}^{\circ}\text{F}$$

$$\alpha = 0.0030 \text{ ft}^2/\text{hr}$$

- 4.54 Se tiene agua contenida en un recipiente cilíndrico de paredes delgadas de 50°F de diámetro, inicialmente a 24 in. El agua y su recipiente se colocan en un baño de aceite que se mantiene a temperatura uniforme de 280°F . El cilindro está sumergido a una profundidad de 2 ft, el agua está bien agitada y a 2 ft de profundidad en el recipiente, y el coeficiente de transferencia de calor en la interfase cilindro-aceite es de $35 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$. Graficar la temperatura del agua en función del tiempo hasta 1 h.

- 4.55 Lord Kelvin estimó que la edad de la tierra es de 9.8×10^7 años, suponiendo que la temperatura original era de $7\,000^\circ\text{F}$ y utilizando las siguientes propiedades de la corteza terrestre:

$$\alpha = 0.0456 \text{ ft}^2/\text{hr}$$

$$T = 0^\circ\text{F}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = 0.02^\circ\text{F}/\text{ft} \text{ (observado)}$$

Utilizando la expresión para la conducción de estado estable en un medio semi-infinito, determinar si el cálculo de Lord Kelvin de la edad de la tierra es razonable o no.

- 4.56 Con referencia al problema anterior, determinar la profundidad bajo la superficie de la tierra en que es mayor la razón de enfriamiento.
- 4.57 Se expone una pared de tabiques inicialmente a 100°F a aire a 50°F con un coeficiente de superficie de $6 \text{ Btu}/\text{hr}\cdot\text{ft}^2\cdot^\circ\text{F}$. Si se considera semi-infinita la pared, ¿cuál será la temperatura de su superficie después de 1 hr? ¿2 hr? ¿10 hr? Encontrar la temperatura a una profundidad de 1 ft que corresponde a cada uno de los tiempos transcurridos mencionados.
- 4.58 Utilizando la solución integral para una pared semi-infinita desarrollada en la sección 4.2-3.2, encontrar la profundidad de penetración para la pared de tabique y las condiciones especificadas en el problema anterior.
- 4.59 Un cilindro de concreto de 6 in de diámetro y 16 in de longitud tiene tapados sus extremos, lo que esencialmente lo aísla contra el flujo de calor. Para el vapor a presión atmosférica que rodea el cilindro con un coeficiente superficial de $22 \text{ Btu}/\text{hr}\cdot\text{ft}^2\cdot^\circ\text{F}$, demostrar gráficamente el perfil de temperatura en el cilindro después de 5 minutos, 30 minutos, 1 h, 2 h, y 6 h. de tiempo transcurrido. Inicialmente el cilindro estaba a una temperatura uniforme de 80°F .
- 4.60 Encontrar la posición y magnitud de la temperatura mínima en el cilindro de concreto descrito en el problema anterior en cada uno de los tiempos especificados. Trabajar en este problema para la condición de a) un extremo descubierto y b) ambos extremos destapados con transferencia de calor a través de ambos extremos.
- 4.61 Una pared grande de concreto de 18 in de espesor puede considerarse como infinita en las otras dos direcciones. De una

condición inicial de temperatura uniforme a 65°F en toda ella, la pared se expone a gases calientes a 350°F en una superficie con un coeficiente de transferencia de calor en la superficie de $45 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$. Hay aire a 65°F y un coeficiente de 1.5 adyacente a la otra pared. a) ¿Cuáles serán las temperaturas en cada superficie después de 1 hr. de exposición a estas condiciones? b) ¿Cuánto tiempo le toma al centro de la pared llegar a 100°F ? c) Cuando la temperatura del centro llegue a 100°F , ¿cuánta energía habrá absorbido la pared por pie cuadrado?

- 4.62 Una placa de 2-in de espesor, considerada infinita en las otras direcciones, inicialmente está a una temperatura uniforme de 400°F . Luego se sumerge la placa en aceite a 120°F con valor de h igual a $12 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$ en ambas superficies. Graficar el perfil de la temperatura a través de la placa después de transcurridos 15 minutos para materiales con los siguientes valores de conductividad térmica

- a) $132 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$
- b) $23 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$
- c) $8.2 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$
- d) $0.73 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$
- e) $0.20 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$
- f) $0.10 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$

- 4.63 Dada la superficie plana de 2in y las demás condiciones del problema anterior, evaluar el tiempo requerido para que la temperatura del centro alcance 100°F si se le saca del baño de aceite después de 15 minutos de inmersión. Cuando se saca del aceite, hay aire a 65°F adyacente a ambas superficies y un valor aplicable de $h = 3 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$. Obtener los resultados para cada uno de los materiales especificados en el problema anterior.

- 4.64 Una pared de asbesto de 6in de espesor está inicialmente a una temperatura uniforme de 70°F . Súbitamente se expone una superficie de la pared a gases calientes a 600°F con un coeficiente superficial dado por $h = 0.10(\Delta T)^{1/3}$, en donde ΔT es la diferencia de temperatura entre el gas caliente y la superficie de la pared en grados fahrenheit y h tiene unidades de $\text{Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$. Si se supone que la otra pared está aislada, ¿Qué tiempo pasará hasta que la pared aislada alcance la temperatura de 250°F ? ¿Cuál será la temperatura de la pared caliente para ese tiempo?

- 4.65 Dada una pared de asbesto de 3 in de espesor con un perfil de temperatura inicialmente lineal, con valores de 350°F y 150°F respectivamente en cada superficie, determinar el tiempo que le tomaría al centro alcanzar una temperatura de 150°F si se exponen ambas superficies a 60°F con valores de $h = 0.90$.
- 4.66 Determinar la temperatura en cada superficie de una pared plana después de alcanzar condiciones de estado estable bajo las siguientes condiciones:

espesor de pared:	2 in
temperatura uniforme inicial a través de la pared:	70°F
medio adyacente a pared fría:	aire a 70°F
coeficiente superficial en pared fría	$h = 0.19(\Delta T)^{1/3}$
material de la pared:	tabique de barro

La pared caliente se sujeta a un flujo de calor constante de 100 Btu/hr-ft²-°F.

- 4.67 Determinar el tiempo requerido para que la temperatura del centro de la pared descrita en el problema anterior cambie en 95% de la diferencia entre los valores inicial y de estado estable.
- 4.68 Después de alcanzar las condiciones de estado estable en la pared de tabique descrita en el problema 4.66, se suprime la fuente de calor de la pared caliente y hay enfriamiento en ambas superficies al aire a 70°F en donde la h de ambas superficies está dada por la expresión $h = 0.19(\Delta T)^{1/3}$. ¿Cuánto tiempo tardará para que
- la superficie caliente llegue a 150°F?
 - el centro llegue a 150°F?
 - se libere setenta y cinco por ciento de la energía absorbida durante el calentamiento al aire ambiente?
- 4.69 Dado un perfil lineal de temperatura en la tierra cerca de la superficie, que crece en una cantidad dada de 0.5°F por pie de profundidad desde un valor de 35°F en la superficie, determinar el tiempo que requiere un tubo enterrado a una profundidad de 8 ft para llegar a una temperatura de 32°F si se expone repentinamente la superficie a aire a 0°F con un coeficiente superficial de 1.2 Btu/hr-ft²-°F. Las propiedades del suelo son $k = 0.8$ Btu/hr-ft-°F y $\alpha = 0.02$ ft²/hr.

- 4.70 Para la tierra que tiene las propiedades $k = 0.8 \text{ Btu/hr-ft-}^{\circ}\text{F}$ y $\alpha = 0.02 \text{ ft}^2/\text{hr}$, determinar la temperatura a una profundidad de 1 ft bajo la superficie después de transcurridas cinco horas cuando la superficie se mantiene a 1200°F . Inicialmente la temperatura del suelo estaba a 50°F . Comparar las respuestas a este problema, utilizando
- a) análisis de pared semi-infinita
 - b) análisis integral, suponiendo un perfil de temperatura parabólico.
 - c) análisis gráfico.
- 4.71 Obtener la temperatura a $1/2 \text{ ft}$ bajo la superficie del suelo después de 5 hr, como en el problema 4.70, excepto que la condición de la superficie tiene un flujo constante de calor de 150 Btu/hr-ft^2 . Como en el problema anterior, comparar las respuestas obtenidas usando
- a) análisis de pared semi-infinita (exacto).
 - b) análisis integral, suponiendo que el perfil de temperatura en la tierra es parabólico.
 - c) análisis gráfico.
- 4.72 En el ejemplo 4.19 se resolvió numéricamente un problema de conducción transitoria unidimensional utilizando una solución explícita. Comenzando con la ecuación diferencial parcial aplicable, obtener una técnica de solución numérica explícita, mostrar el diagrama de flujo, e incluir un listado de programa compatible con su sistema local de computadora que dé una solución explícita para problemas de conducción transitoria unidimensional. Utilizando el programa, resolver
- a) el problema 4.47
 - b) el problema 4.48
 - c) el problema 4.53
 - d) el problema 4.61
 - e) el problema 4.62
 - f) el problema 4.63
 - g) el problema 4.64
 - h) el problema 4.65
 - i) el problema 4.66
- 4.73 En el ejemplo 4.20 se resolvió numéricamente un problema de conducción de calor transitoria unidimensional usando técnicas implícitas. Comenzando con la ecuación diferencial parcial que domina, desarrollar un plan de solución numérica implícita, mostrar el diagrama de flujo, e incluir un listado de programa compatible con su sistema local de computadora

para problemas de conducción de calor transitoria unidimensional. Utilizando su programa, obtener soluciones numéricas para

- a) el problema 4.47
- b) el problema 4.48
- c) el problema 4.53
- d) el problema 4.61
- e) el problema 4.62
- f) el problema 4.63
- g) el problema 4.64
- h) el problema 4.65
- i) el problema 4.66

4.74 En el ejemplo 4.21 se ilustró una solución numérica para la conducción transitoria multidimensional. Partiendo de la ecuación diferencial que domina, desarrollar un plan de solución, diagrama de flujo, y listado de programa compatible con su sistema local de computadora para resolver problemas de conducción transitoria multidimensional. Usando su programa, obtener una solución numérica a

- a) problema 4.45 (coordenadas cilíndricas)
- b) problema 4.49 (coordenadas cilíndricas)
- c) problema 4.50 (coordenadas esféricas).
- d) problema 4.51 (coordenadas rectangulares).
- e) problema 4.52 (coordenadas cilíndricas).

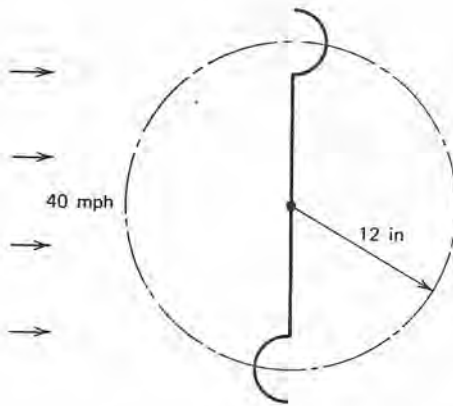
5.1 ¿A qué distancia del borde de ataque de una superficie plana ocurrirá la transición de flujo laminar a turbulento si el fluido es

- a) aire a 60°F y presión atmosférica?
- b) agua a 80°F?
- c) glicerina a 60°F?
- d) mercurio a 80°F?

La velocidad de la corriente libre es 50ft/seg.

5.2 Calcular la fuerza sobre un letrero circular de 10 ft de diámetro bajo un viento huracanado a 120 mph. Calcular el momento ejercido a nivel de tierra si el letrero está montado sobre una columna cilíndrica de apoyo de 6in de diámetro y 15 ft de alto.

5.3 Calcular la velocidad rotacional de estado estable en rpm del anemómetro mostrado cuando la velocidad local del viento es de 40 mph. Se puede suponer que la fricción es despreciable; se pueden utilizar condiciones atmosféricas normales.



- 5.4 Encontrar un perfil de velocidad para la capa límite laminar de la forma

$$\frac{v_x}{v_\infty} = a + by + cy^2 + dy^3$$

con un gradiente de presión cero.

- 5.5 Desarrollar expresiones adimensionales para el espesor de la capa límite y coeficiente local y medio de fricción superficial para el caso de una capa límite laminar sobre una superficie plana, suponiendo que el perfil de velocidad dentro de la capa límite tiene la forma

- a) $v_x = a + by$
- b) $v_x = a + by + cy^2$
- c) $v_x = a + bsenc y$

- 5.6 Comparar el espesor de capa límite y el coeficiente de fricción superficial local con el flujo sobre una superficie plana en un punto en el que $Re_x = 10^6$, para

- a) flujo laminar
- b) flujo turbulento

suponiendo que cada capa límite comienza en el borde de ataque de la placa. Comparar la fricción total ejercida sobre la placa para cada condición de flujo.

- 5.7 Encontrar la caída de presión para un fluido hidráulico a 80°F que fluye en un tubo de 0.20 in de diámetro, y 30 ft de largo a razón de 10 gal/hr.
- 5.8 Determinar la caída de presión que debe vencerse para que fluya aire a 70°F y presión atmosférica por un ducto rectan-

gular de 10 in \times 18 in con una velocidad promedio de 20 ft/seg. El ducto tiene 120 ft de longitud.

- 5.9 Con agua a 60°F fluyendo por un sistema de tubería a razón de 0.5 ft³/seg, se encuentra que la caída de presión es de 14 psi. ¿Cuál es la razón de flujo que ocurre con esta misma caída de presión si el fluido es

- a) aire a 60°F, presión atmosférica?
- b) Freón-12?
- c) fluido hidráulico?
- d) Kerosene?

Suponer que el flujo es totalmente turbulento.

- 5.10 Encontrar la razón de flujo de fluido hidráulico a 100°F logrado con una caída de presión de 15 psi a través de una línea de 40 in de largo y 0.15 in de diámetro.

- 5.11 La ecuación (5-86) se desarrolló de un análisis dimensional, considerando que la temperatura de la pared es constante. Otra posibilidad para una condición de límite en la pared es el *flujo de calor* constante.

Utilizando análisis dimensional, demostrar que el número modificado de Grashof para el caso de un flujo especificado de calor de pared está expresado por

$$Gr^* = \frac{\beta g(q/A)L^4}{\nu^2 k}$$

- 5.12 Utilizando análisis dimensional, demostrar que para la conducción de estado estable en una pared plana se aplican los siguientes parámetros:

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}, \quad \frac{\alpha t}{L^2}, \quad \frac{hL}{k}, \quad \frac{x}{L}$$

- 5.13 Se mantiene una superficie plana de 8 in \times 2 ft a la temperatura de 200°F. Evaluar el coeficiente de transferencia de calor local en la arista de la placa, y encontrar el valor medio de h y el calor total transferido si el fluido que fluye paralelo a la superficie con velocidad de 10 ft/seg es

- a) aire a 80°F y presión atmosférica
- b) agua a 80°F.
- c) fluido hidráulico a 80°F.
- d) kerosene a 80°F.

- 5.14 Desarrollar expresiones sin dimensiones para el espesor de capa límite térmica y números local y medio de Nusselt para el flujo de capa límite laminar en una superficie isotérmica plana, utilizando análisis integral. Se puede considerar que los perfiles de velocidad y temperatura con la capa límite son de la forma

$$a) \frac{v_x}{v_\infty} = \frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} = a + by$$

$$b) \frac{v_x}{v_\infty} = \frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} = a + by + cy^2$$

$$c) \frac{v_x}{v_\infty} = \frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} = a + by + cy^2 + dy^3$$

$$b) \frac{v_x}{v_\infty} = \frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} = a + b \sin cy$$

- 5.15 La figura muestra el caso de flujo paralelo a una superficie plana, donde para $0 \leq x < X$, la superficie plana y fluido están a la temperatura T_∞ . Para $x \geq X$, la temperatura T_s de la placa es mayor que T_∞ y se mantiene constante. Suponiendo perfiles de velocidad y de temperatura de la forma

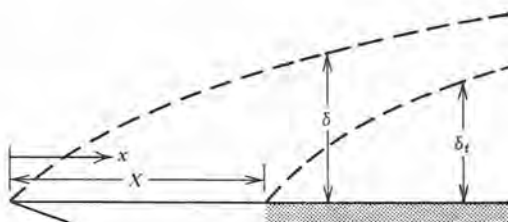
$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} = a + by + cy^2 + dy^3$$

demostrar que la razón del espesor de la capa límite está representada por

$$\xi = \frac{\delta_t}{\delta} \simeq \frac{1}{\text{Pr}^{1/3}} \left[1 - \left(\frac{X}{x} \right)^{3/4} \right]^{1/4}$$

y que es posible expresar el número local de Nusselt como

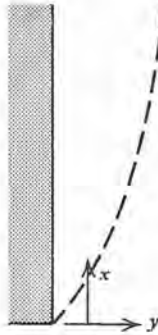
$$\text{Nu}_x \simeq 0.33 \left[\frac{\text{Pr}}{1 - (X/x)^{3/4}} \right]^{1/3} \text{Re}^{1/2}$$



- 5.16 Para la convección natural adyacente a una pared isotérmica vertical plana, demostrar que las ecuaciones integrales que se aplican a las capas límite hidrodinámica y térmica son

$$-v \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0} + \beta g \int_0^{\delta_t} (T - T_\infty) dy = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} v_x^2 dx$$

$$\alpha \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} v_x (T_\infty - T) dy$$



- 5.17 Suponiendo perfiles parabólicos de velocidad y de temperatura de la forma

$$\frac{v}{v_x} = \left(\frac{y}{\delta}\right) \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_s - T_\infty} = \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2$$

y las relaciones integrales dadas en el problema 5.16, demostrar que se obtienen las siguientes expresiones

$$\frac{2\alpha}{\delta} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta v_x}{30} \right)$$

$$- \frac{v v_x}{\delta} + \beta g \Delta T \frac{\delta}{3} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta v_x^2}{105} \right)$$

Luego suponer que, para δ y v_x que varían con x de acuerdo con

$$\delta = Ax^a$$

$$v_x = Bx^b$$

el espesor de la capa límite y el número local de Nusselt resultan ser

$$\frac{\delta}{x} = 3.94(\text{Pr} + 0.953)^{1/4} \text{Pr}^{-1/2} \text{Gr}_x^{-1/4}$$

$$\text{Nu}_x = 0.508(\text{Pr} + 0.953)^{-1/4} \text{Pr}^{1/2} \text{Gr}_x^{1/4}$$

- 5.18 Comenzando con las ecuaciones de δ y Nu_x del problema anterior, evaluar δ y h_x en $x = 1/2$ ft, 1 ft, y 5 ft para

- a) aire a 60°F, y a la presión atmosférica.
- b) agua a 60°F.
- c) fluido hidráulico a 60°F.
- d) kerosene a 60°F.

Se puede considerar constante la temperatura de la pared a 160°F.

- 5.19 Encontrar expresiones para los números local y medio de Nusselt aplicables a una placa plana usando el enfoque integral para una capa límite turbulenta con los perfiles de velocidad y temperatura dados por la expresión de la ley de potencia de 1/7 de acuerdo con

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$$

Se puede utilizar el ejemplo 5.2 como guía para la solución.

- 5.20 Entra aire a 100°F y 60 psi en el espacio entre dos placas adyacentes de combustible en el núcleo de un reactor nuclear. El flujo del aire es de 6000 lb_m/hr·ft², y las placas de combustible tienen 4 ft de largo y 1/2 in de espacio entre ellas. El flujo de calor entre las superficies de las placas varía de acuerdo con

$$\frac{q}{A} = \alpha + \beta \sin \frac{\pi x}{L}$$

en donde $\alpha = 250$ Btu/hr·ft²

$$\beta = 4000 \text{ Btu/hr}\cdot\text{ft}^2$$

x = distancia del borde de ataque

L = longitud total de la placa

Para estas condiciones, hacer gráficas de

- a) flujo de calor contra x .
- b) temperatura media del aire contra x .

- 5.21 Se introduce agua a 50°F en un tubo de 1-1/2 in de diámetro, 16-BWG y 8 ft de largo con una velocidad de 35 ft/seg. Hay vapor a 240°F condensándose en la pared exterior del tubo. Calcular el valor medio del coeficiente de transferencia de calor en la interfase tubo—agua, utilizando

- a) la analogía de Reynolds.
- b) la analogía de Prandtl.
- c) la analogía de von Kármán.
- d) la analogía de Colburn.

¿Cuál analogía cree que sea más exacta? ¿Más inexacta? ¿Por qué?

- 5.22 Para las condiciones descritas en el problema 5.21, comparar los resultados contenidos usando la analogía de Reynolds y la de Colburn con respecto a la transferencia de calor total y la temperatura del agua que sale.
- 5.23 Resolver el problema 5.21 para el caso de aire a 50°F que entra al tubo de $1\text{-}1/2$ in con las demás condiciones constantes.
- 5.24 Evaluar la transferencia total de calor y la temperatura del aire de salida para el caso considerado en el problema 5.23. Comparar los resultados usando la analogía de Reynolds y la de Colburn.
- 5.25 Los problemas 5.22 y 5.24 se refieren a dos enfoques posibles al diseño de condensadores. Para utilizar un condensador en un proceso en el cual el principal interés es la máxima razón de condensación en el mínimo de espacio, ¿especificaría agua o aire como el medio de transferencia de calor dentro de los tubos del condensador? Justificar cuantitativamente la respuesta.
- 5.26 Se hace entrar agua a 50°F a un tubo de $1\text{-}1/4$ in y 16-BWG, y 5ft de longitud a una velocidad de 5ft/seg. La superficie exterior del tubo se envuelve uniformemente con un listón de nicromo; se suministran 80 kw de potencia total al calefactor y se determina que se transfiere 94 por ciento de esta energía al agua que fluye en el tubo. Determinar
 - a) el flujo de calor en la pared
 - b) la temperatura media del agua en la salida del tubo.
- 5.27 Para las condiciones descritas en el problema anterior, evaluar y graficar la variación de temperatura superficial del tubo a lo largo de su eje; comparar los perfiles obtenidos utilizando las analogías de Reynolds y Colburn.
- 5.28 El flujo de calor aplicado en la superficie de un tubo de $1\text{-}1/4$ in, 16-BWG varía senoidalmente a lo largo de su longitud de 5ft. Si la potencia total aplicada es de 80 kw, con la distribución axial de aire descrita, y se transfiere 94% al agua que fluye por el interior del tubo, evaluar y graficar la temperatura de la superficie del tubo usando las analogías de Reynolds y Colburn. El agua entra al tubo a 50°F y fluye con velocidad de 15 ft/seg.

- 5.29 Los problemas 5.27 y 5.28 comprenden la variación de temperatura superficial de un tubo dentro del cual fluye agua sujeta a un flujo de calor especificado de pared. En ambos casos la energía total transmitida al agua es la misma; no obstante, la distribución axial del flujo de calor es constante en un caso y senoidal en el otro. ¿Cómo se comparan las máximas temperaturas de pared para estos dos tipos de variación de flujo de calor? Utilizar la analogía de Colburn para hacer esta comparación.
- 5.30 Se introduce aire a 50°F y 15 ft/seg a un tubo de 1-1/4 in, 16-BWG. El flujo de calor en la pared es uniforme en una longitud de 5ft de tubería de cobre, y se proporcionan 80 kw de energía a la pared, de la cual se transfiere 94% al aire. Bajo estas condiciones de operación, determinar
- a) el flujo de calor de la pared.
 - b) la temperatura media del aire a la salida del tubo.
- 5.31 Evaluar y graficar la variación de temperatura superficial a lo largo del eje del tubo para el caso descrito en el problema 5.30. Comparar los resultados que se obtienen utilizando las analogías de Reynolds y Colburn.
- 5.32 Con aire a 50°F y 15 ft/seg, evaluar y graficar la variación en temperaturas superficiales a lo largo del eje de un tubo de cobre de 1-1/4 in y 16-BWG sujeto a una distribución de flujo de calor senoidal. La energía total transmitida al aire es 94% de la proporcionada en la superficie del tubo, que es 80 kw. Comparar los perfiles de temperaturas de pared que se obtienen usando las analogías de Reynolds y Colburn.
- 5.33 Las placas de combustible de un reactor nuclear tienen 4 ft de longitud y están apiladas de tal forma que hay un claro de 1/2 in entre cada una y las adyacentes. El flujo de calor a lo largo de cada superficie de placa varía senoidalmente de acuerdo con la ecuación

$$\frac{q}{A} = \alpha + \beta \sin \frac{\pi x}{L}$$

en donde $\alpha = 250 \text{ Btu/hr-ft}^2$

$\beta = 8000 \text{ Btu/hr-ft}^2$

$x =$ distancia del borde de ataque

$L =$ longitud total de la placa.

Si se usa aire a 20°F, 80 psi, con una velocidad de masa de 6000 lb_m/hr-ft² para enfriar las placas, evaluar y graficar

- a) el flujo de calor contra x .
 - b) la temperatura media del aire contra x .
 - c) la temperatura de superficie de la placa contra x , usando la analogía de Colburn.
- 5.34 Con la información dada en el problema 5.33, determinar la transferencia total de calor de una pila de placas de 4ft de ancho y de largo, y cuya superficie total es igual a 4ft.
- 5.35 Resolver el problema 5.33 con toda la información dada excepto que el refrigerante es agua que entra a 800 ft² y con velocidad de masa igual a 120°F.
- 5.36 Determinar la temperatura superficial de un calentador de inmersión de 1 kw en agua estancada a 4.2×10^7 lb_m/hr-ft². El calentador es cilíndrico, su longitud de 80°F y diámetro de 6 in. Considerar tanto el caso en que el eje del calentador está
- a) horizontal y b) vertical.
- 5.37 Resolver el problema 5.36 para las mismas condiciones, excepto que el fluido estancado ambiente es
- a) fluido hidráulico a 3/4 in.
 - b) mercurio a 40°F.
- 5.38 Se coloca un lingote de acero de 120°F de diámetro y 1 ft de alto, calentado a una temperatura uniforme de 20 in en un piso de concreto y se deja enfriar en aire ambiente a 800°F. Calcular el tiempo necesario para que la superficie del lingote se enfríe hasta 100°F. ¿Cuál es la máxima temperatura del lingote para este momento?
- 5.39 Un tubo de aluminio de 150°F y 18-BWG transporta vapor tal que su superficie exterior permanece a 2-in. Si este tubo está rodeado de aire quieto a 250°F, ¿cuál es el flujo de calor resultante si la orientación del tubo es
- a) horizontal?
 - b) vertical?
- 5.40 Obtener el flujo de calor del tubo del problema anterior, excepto que el fluido ambiente es agua a 40°F.
- 5.41 Hay oxígeno líquido a 40°F en un tanque esférico con diámetro exterior igual a -320°F. El tanque está hecho de acero inoxidable de 3/4 in. Determinar la razón de transferencia de calor al tanque si está rodeado de aire a 1/8 in.
- 5.42 Determinar el espesor requerido de fibra de vidrio, en forma de lana, necesario para que el tanque esférico que contiene

oxígeno líquido descrito en el problema anterior reduzca su transferencia a un décimo de su valor correspondiente al tanque desnudo. Todavía se aplican las demás especificaciones dadas en aquel problema.

- 5.43 Un transformador montado en un poste eléctrico debe disipar 350 vatios de energía al aire ambiente que, en un día de verano, puede alcanzar 60°F . Para esa situación sin viento, calcular la temperatura superficial del transformador. Considerar que el transformador es un cilindro de 95°F de diámetro y 20 in de alto.
- 5.44 Una línea de transmisión eléctrica lleva 6000 amps de corriente por un conductor con resistencia de 40 in ohmios por pie de longitud. El diámetro exterior de la línea es 1.6×10^{-6} 7/8 in. Calcular la temperatura superficial de esta línea si está en aire quieto a 85°F .
- 5.45 Un reactor nuclear de "piscina" está formado por treinta placas rectangulares, cada una de las cuales mide 1 ft de ancho por 3 ft de alto. Estas placas, orientadas verticalmente están espaciadas de tal forma que existe un espacio de 2 in entre cada superficie vertical. Si el refrigerante es agua a 70°F y la máxima temperatura permisible de las placas es 205°F , ¿cuál es el máximo nivel de potencia a que puede operar el reactor?
- 5.46 Una delgada lámina de hierro que mide 3 ft \times 3 ft está soportada verticalmente y rodeada de aire quieto a 60°F . Considerando que el hierro es una superficie perfectamente emisora y considerando que se absorbe toda la emisión de la placa, determinar la temperatura superficial de la hoja si se le sujeta a un flujo de calor solar igual a 160 Btu/hr-ft².
- 5.47 Un colector de energía solar que mide 20 ft \times 20 ft está instalado en un techo en posición horizontal. La temperatura de la superficie del colector es de 160°F y el flujo de calor solar incidente es igual a 200 Btu/hr-ft². Si el aire ambiente quieto está a 60°F , ¿cuál es la pérdida de calor del colector por convección? ¿Cuál sería la pérdida convectiva si el colector estuviera atravesado con bordes cruzados espaciados a 1 ft de distancia?
- 5.48 Para el flujo dentro de un conductor cerrado y superficie de conductor a la temperatura T_0 y la temperatura "media mezclada" del fluido expresada como T_m , se define el coeficiente de transferencia de calor convectivo como

$$h \equiv \frac{q/A}{T_0 - T_m}$$

Para un perfil de temperatura "totalmente desarrollado" el requerimiento es que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{T_0 - T}{T_0 - T_m} \right) = 0$$

Demostrar que para perfil de temperatura completamente desarrollado, el coeficiente de transferencia de calor convectiva h , definido arriba, es constante.

- 5.49 Siguiendo con el estudio de la sección 5.3-1.1 relacionado con el flujo laminar totalmente desarrollado dentro de un conductor circular con un perfil de temperatura totalmente desarrollado, demostrar que el número de Nusselt tiene un valor de 4.364 para un flujo de calor de pared uniforme.
- 5.50 Usando los valores de número local de Nusselt con flujo laminar en un tubo de flujo de calor constante listado en la Tabla 5.4, calcular y graficar la temperatura media del fluido y la temperatura superficial del tubo para el caso en que se calienta un líquido orgánico de 60°F a 150°F en un tubo de 1/4 in de diámetro interior, y 4 ft de largo, calentado eléctricamente. La razón de flujo del líquido es de 9 lb_m/hr sus propiedades, que pueden suponerse constantes, son:

$$\begin{aligned}\rho &= 47 \text{ lb}_m/\text{ft}^3 \\ c_p &= 0.5 \text{ Btu/lb}_m\text{-}^\circ\text{F} \\ k &= 0.079 \text{ Btu/hr-ft-}^\circ\text{F} \\ \mu &= 1.6 \text{ lb}_m/\text{ft-hr}\end{aligned}$$

- 5.51 Refiriéndose al fluido orgánico y condiciones descritas en el problema anterior, determinar y graficar la temperatura media del fluido y el flujo de calor local en función de la posición axial a lo largo de una longitud de 4 ft de tubo en que la superficie de éste se mantiene a la temperatura constante de 200°F.
- 5.52 Se abre una válvula en una línea de agua caliente para lograr un flujo de 0.07 ft/seg de agua. La superficie del tubo de agua se mantiene a 80°F y el agua caliente sale de la válvula a 180°F. Determinar la temperatura del agua que sale de una sección de 5 ft de tubo, 1/2-in y calibre 40 bajo estas condiciones. ¿Cuál es la pérdida de calor?

- 5.53 Se introduce aceite con las propiedades dadas en la tabla siguiente a un banco de seis tubos de acero de 3/4-in y calibre 40 a 80°F. Se condensa vapor a 212°F en la superficie exterior de los tubos. El flujo de aceite es de 90 lb_m/hr, y cada tubo tiene 9 ft de largo. Determinar la temperatura del aceite en la salida del calentador y el calor total transferido.

$T (^{\circ}\text{F})$	$\rho (\text{lb}_m/\text{ft}^3)$	$c_p (\text{Btu}/\text{lb}_m\text{-}^{\circ}\text{F})$	$k (\text{Btu}/\text{hr-ft-}^{\circ}\text{F})$	$\mu (\text{lb}_m/\text{sec-ft})$
80	56.8	0.44	0.077	27.80×10^{-3}
100	56.0	0.46	0.076	15.30×10^{-3}
150	54.3	0.48	0.075	5.30×10^{-3}
200	54.0	0.51	0.074	2.50×10^{-3}

- 5.54 ¿Cuál es la velocidad máxima a la que puede fluir el aceite de las propiedades dadas en el problema anterior en tubería de 3/4 in y calibre 40 y de forma que su flujo siga siendo laminar? A esta máxima razón de flujo, determinar la transferencia total de calor y la temperatura del aceite de salida si todas las demás condiciones son las mismas que las descritas en el problema 5.53.
- 5.55 Para el aceite cuyas propiedades están dadas en el problema 5.53, que fluye a la máxima velocidad permisible tal que se mantiene el flujo laminar, ¿cuántos tubos de acero de 3/4 in y calibre 40 se requieren para recibir un flujo total de 90 lb_m/hr? Con este número de tubos, ¿cuál es la transferencia total de calor al aceite que se logrará y cuál será su temperatura al salir del calentador?
- 5.56 Determinar toda la transferencia de calor de un tubo de vapor aislado con superficie exterior a la temperatura de 140°F que pasa por una habitación donde la temperatura ambiente está a 70°F. La tubería tiene 28 ft de largo y su diámetro exterior, incluyendo el aislante, es de 8-1/2 in.
- 5.57 Determinar la pérdida de calor de la tubería aislada de vapor con las dimensiones y temperatura superficial dadas en el problema 5.56, si el tubo se extiende entre dos edificios a 28 ft de distancia cuando el aire está a 70°F y la velocidad del viento normal a la tubería es de 50 mph.
- 5.58 Un tubo de cobre de 1-1/2 in de diámetro, calibre 16-BWG y 10 ft de largo mantiene su temperatura superficial exterior a 50°F. Aire a 230°F y presión atmosférica rodea el tubo. Comparar el flujo de calor desde el tubo hasta el aire bajo las siguientes condiciones:

- a) tubo horizontal, aire inmóvil.
- b) tubo vertical, aire quieto.
- c) tubo horizontal, el aire fluye normal al tubo a 45ft/seg.
- d) tubo horizontal, el aire fluye paralelo al eje del tubo a 45ft/seg.

5.59 Se aísla un alambre de cobre de 1/8 in de diámetro con una capa de lana de vidrio apretada de 1/4 in de espesor ($k = 0.020$ Btu/hr-ft-°F) y se rodea de aire a 60°F. El alambre lleva 60 amps de corriente; la resistividad del cobre es 1.72×10^{-6} ohm-cm. Determinar

- a) el coeficiente de transferencia convectiva de calor entre el aire y la superficie de aislamiento.
- b) la temperatura en cada superficie del aislante de vidrio.

5.60 Determinar el coeficiente de transferencia de calor y la temperatura en cada superficie del aislante de lana de vidrio empacada para las condiciones descritas en el problema anterior cuando el aire fluye a través del alambre aislado, a una velocidad de 40 ft/seg.

5.61 Se usa agua como refrigerante en un condensador en donde entra vapor a 300 psia a un tubo de acero de 2-1/2 in y calibre 80 como vapor saturado y sale como líquido saturado. El proceso de condensación ocurre en una longitud de 8ft de tubería con una razón de vapor de 1000 lb_m/hr. El enfriamiento de agua ocurre en el espacio anular entre el tubo más pequeño y un tubo de 4-in y calibre 80 concéntrico con él mismo. Se dispone de agua 55°F. Para evitar la ebullición local, la temperatura media del agua no debe superar los 160°F. ¿Este arreglo puede condensar todo el vapor que entra? En caso contrario, ¿cuáles cambios sugeriría al diseño para lograrlo?

5.62 Se transfiere nitrógeno líquido saturado a presión atmosférica ($T_{\text{sat}} = 139^\circ\text{R}$) entre un cilindro de almacenaje y un frasco por medio de un tubo de cobre de 1/2-in y 18-BWG de 20in de longitud. Si esta transferencia ocurre cuando sopla aire a 80°F a través del tubo de cobre a 30ft/seg, ¿cuál es la razón de ganancia de calor durante el periodo en que prevalecen estas condiciones?

5.63 Se determina aislar la línea de cobre descrita en el problema anterior con magnesia al 85% y 1 in de espesor. Si las demás condiciones permanecen iguales que en el problema 5.62, ¿cuál será la razón de transferencia de calor con el aislante en su lugar?

- 5.64 Se desea usar agua como refrigerante en un intercambiador de calor en que el vapor se condensa en la superficie exterior de los tubos. Las consideraciones de diseño establecen la presión del vapor, las temperaturas del agua de entrada y salida del intercambiador, la razón de flujo del agua, y la pérdida de presión del lado del agua. ¿Cómo varía el área de transferencia de calor para este caso con el diámetro interior de los tubos del condensador?
- 5.65 Una gotita de agua, que se puede analizar como una esfera de 0.05 de diámetro ha alcanzado su velocidad terminal en aire a 75°F. Considerando que la temperatura de la gotita es de 145°F, ¿cuál es la razón de transferencia de calor debida solamente a la convección?
- 5.66 Se inyecta una gotita de aceite combustible a 180°F a 280 ft/seg dentro de la cámara de combustión de un motor diesel. El diámetro de la gotita es de 0.001 in y el gas en el cilindro está a 1300°F y a 680 psia. Se puede suponer que las propiedades del gas son las mismas que las del aire bajo las mismas condiciones de estado; se puede considerar que las propiedades del aceite combustible son constantes, con los siguientes valores:

$$\begin{aligned}\rho &= 51.8 \text{ lb}_m/\text{ft}^3 \\ c_p &= 0.54 \text{ Btu/lb}_m\text{-}^\circ\text{F} \\ k &= 0.073 \text{ Btu/hr-ft-}^\circ\text{F} \\ \mu &= 83 \times 10^{-5} \text{ lb}_m/\text{seg-ft} \\ \text{Pr} &= 22\end{aligned}$$

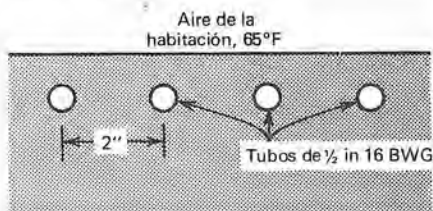
¿Cuánto le toma a la gotita de combustible llegar a su temperatura de encendido propio o sea, 600°F?

- 5.67 Un tubo cilíndrico de superficie a 300°F tiene un diámetro exterior de 4 in. Aire a 40°F sopla a través del tubo, normal al eje del tubo 25 ft/seg. Calcular la razón de transferencia de calor por pie de tubo bajo estas condiciones.
- 5.68 Se bombea fluido hidráulico a 175°F a la velocidad de 18 ft/seg a través de un atado de tubos arreglados de acuerdo con el modelo No. 1 de la figura 5.40. Si los tubos de 3/8-in tienen una temperatura superficial de 50°F, ¿cuál es el valor del coeficiente de transferencia de calor convectivo?
- 5.69 Comparar la capacidad de transferencia de calor de tubos de 3/8 in de diámetro arreglados en hileras orientadas de acuerdo con el modelo 2 de la figura 5.40 con el de la misma configuración excepto por mayor espaciado, como en el modelo 5

de la misma figura. Por comparación se puede utilizar el fluido hidráulico que fluye con las condiciones especificadas en el problema 5.68.

- 5.70 Comparar la capacidad de transferencia de calor de tubos de $3/8$ in de diámetro exterior arreglados en bancos orientados de acuerdo con el modelo No. 1 de la figura 5.40 con la de la misma configuración excepto por mayor espaciado, como el modelo 4 de la misma figura. El fluido que fluye por los bancos de tubos tiene las condiciones especificadas en el problema 5.68.
- 5.71 Un camión refrigerado cuya superficie exterior se mantiene a 50°F recorre un camino cierto día caluroso a razón de 50mph. Si la temperatura del aire está a 95°F calcular la razón de transferencia de calor desde la cubierta y costados del camión. La porción refrigerada del camión tiene 8ft de ancho, 10ft de alto y 12ft de largo.
- 5.72 Calcular la razón de transferencia de calor por convección, en un día invernal cuando la temperatura del aire está a 20°F , del techo plano de un edificio grande cuya temperatura de aire interior está a 72°F . Las dimensiones del techo son 100ft de largo y 125ft de ancho y está hecho de madera de $3/4$ in ($k = 0.14 \text{ Btu/hr-ft-}^{\circ}\text{F}$) aislante de $3/8$ in ($k = 0.023 \text{ Btu/hr-ft-}^{\circ}\text{F}$) y brea de $1/4$ in de espesor ($k = 0.09 \text{ Btu/hr-ft-}^{\circ}\text{F}$). Estudie el caso en que (a) el aire está quieto y (b) el aire sopla con una velocidad de 15 mph.
- 5.73 Calcular la velocidad requerida a la que debe soplar aire a 80°F a través de una hoja de vidrio, que inicialmente está a 350°F uniforme, tal que su temperatura superficial llegue a 100°F a los 30 minutos. El espesor del vidrio es de $3/8$ in y está en un soporte tal que sólo pierde calor de su superficie superior.
- 5.74 ¿Cuál es la velocidad requerida del aire para enfriar el vidrio descrito en el problema 5.73 si el enfriamiento ocurre en ambos lados de la superficie del vidrio?
- 5.75 Se introduce agua a 120°F a los tubos mostrados con una velocidad de 5ft/seg. Los tubos son de cobre de $1/2$ in y 16-BWG y están empotrados en concreto con sus centros a 1 in por debajo de la superficie del concreto, como se muestra. Calcular la temperatura superficial del concreto, si hay aire quieto a 65°F adyacente a la superficie. ¿Cuál es el flujo de

calor bajo estas condiciones? ¿En cuánto cambia la temperatura del agua por pie de tubería?



- 5.76 Calcular la temperatura superficial de concreto para las condiciones excepto porque el flujo del aire ocurre a través de la superficie del concreto con una velocidad de 15 ft/seg. Se puede considerar que el flujo de la capa límite es turbulento en todas partes, con una longitud característica total del concreto igual a 20ft.

La tensión superficial del agua depende de la temperatura; se puede calcular de la expresión $\sigma = (5.28 \times 10^{-3})(1 - 0.0013 T)$ donde T está en $^{\circ}\text{F}$ y σ en libra/pie. Se puede utilizar esta expresión para determinar σ , = cuando se necesita, en cada uno de los siguientes problemas.

- 5.77 Un elemento calefactor de cobre cilíndrico de 2 ft de longitud y diámetro igual a $3/4$ in se sumerge en agua. Para una temperatura superficial de 250°F y presión del sistema de 1 atm, calcular el valor de h aplicable y la razón a la que se transfiere el calor entre el elemento calefactor y el agua, que está a 212°F .
- 5.78 Dado el cilindro con las dimensiones especificadas en el problema 5.77 inicialmente a la temperatura uniforme de 550°F , sumergido súbitamente en agua a su temperatura de saturación y presión atmosférica, mostrar en forma no detallada al histograma de tiempo-temperatura del cilindro. ¿Cuánto transcurrirá hasta que la temperatura del cilindro llegue a 250°F ?
- 5.79 Calcular la temperatura superficial de equilibrio de un calentador de inmersión cilíndrico de 5 in de longitud y lin de diámetro, y 500 vatios de consumo. Suponer que el calentador se sumerge en

- a) agua a 60°F , calentador horizontal
- b) agua a 212°F y presión atmosférica.

- 5.80 Se sumerge alambre de nicromo de 0.02 in de diámetro en agua saturada a 240°F. Para una temperatura de superficie del alambre de 2100°F, calcular la razón de transferencia de calor por pie.
- 5.81 Se disiparán 1200 vatios de energía eléctrica a través de placas de cobre de 4 in por 8 in por 1/4 in sumergidas en agua a su temperatura de saturación de 220°F. ¿Cuántas placas sugiere utilizar? ¿Cuál es su cálculo de la temperatura de la superficie de las placas bajo estas condiciones?
- 5.82 Se elimina una placa de acero de una operación de tratamiento térmico a 700°F y luego se sumerge de inmediato en un baño de agua a 212°F.
- construir una gráfica que muestre el flujo de calor contra la temperatura de la placa para este sistema.
 - construir una gráfica de h contra la temperatura de la placa.
 - graficar la temperatura de la placa contra el tiempo si la placa de acero suave tiene 1 in de espesor y 18 in².
- 5.83 Se coloca un recipiente de agua a temperatura ambiente en un horno precalentado a 450°F. ¿Hervirá el agua? Explicar la respuesta.
- 5.84 Se desea que el flujo de calor entre una pared de tubo caliente y el agua que fluye por el tubo sea de 3×10^6 Btu/hr-ft². El diámetro interior del tubo es 1 in y su longitud 8 ft. El agua entra a 212°F. ¿Cuál es la razón recomendada de flujo del agua para la operación segura bajo estas condiciones? Explicar todos los criterios de diseño que conducen a la recomendación.
- 5.85 Se sumerge una pieza cilíndrica de metal calentado inicialmente a 500°F en agua saturada a 1 atm. Las dimensiones son 6 in de alto por 3 in de diámetro. Calcular el tiempo requerido para que la máxima temperatura en el cilindro caiga por debajo de 300°F si está hecho de
- cobre.
 - níquel
 - latón.
- Suponer que el cilindro descansa en una de sus bases.
- 5.86 Se condensa vapor saturado a 200°F en un tubo de 3/4 in de diámetro con temperatura superficial de 160°F. Encontrar el valor de h aplicable si la longitud del tubo es 5 ft y está orientado.

a) horizontalmente.

b) verticalmente.

¿Cuál es la razón de condensación en cada uno de estos casos?

- 5.87 ¿Cuál será la razón de transferencia de calor total y la razón de condensación si hay seis tubos en un banco vertical con los ejes horizontales de los tubos, y las condiciones iguales a las descritas en el problema anterior?
- 5.88 Una superficie plana orientada verticalmente tiene 2ft de altura y temperatura de 75°F. ¿Cuál será el coeficiente de transferencia de calor y la razón de condensación si hay vapor saturado a 1 atm que rodea la superficie?
- 5.89 La temperatura superficial de un tubo horizontal de 1 in de diámetro exterior y rodeado de vapor saturado a 200°F se mantiene a 140°F. ¿Cuál es el coeficiente de transferencia de calor en la superficie exterior del tubo para esta condición? ¿Cuál es la razón total de transferencia de calor para 3 ft de tubo?
- 5.90 Bajo las condiciones del problema anterior, ¿cuál debe ser el coeficiente de transferencia de calor medio en la pared interior del tubo si entra agua a 55°F al tubo de cobre de 1 in 15-BWG? ¿Cuál debe ser la razón de flujo del agua para lograr esta condición? ¿Cuál es la caída de presión correspondiente para el agua?
- 5.91 Resolver el problema 5.89 si el tubo está orientado verticalmente.
- 5.92 Se encierra vapor saturado a presión atmosférica dentro de un tubo de 1 in de diámetro interior y orientado verticalmente, cuya superficie se mantiene a 160°F. Construir una gráfica que muestre la fracción de sección transversal del tubo llena con condensado en función de la distancia desde la parte superior del tubo. ¿Qué sucede conforme la fracción de la sección transversal ocupada por el condensado se aproxima a la unidad?
- 5.93 Se hace circular vapor condensado a 212°F entre dos superficies verticales que se mantienen a 140°F y que están a 1/2 in de distancia. La razón de flujo del vapor es de 100 lb_m/hr por metro de ancho. ¿Qué tan alto puede ser este sistema para que la velocidad del vapor no sea superior a 25 ft/seg?
- 5.94 Si un recipiente circular tiene su superficie inferior a 200°F y está adyacente a vapor saturado a 230°F, mostrar con una

gráfica la profundidad de condensado acumulado contra el tiempo hasta una hora. Despreciar los efectos de los lados del recipiente.

- 5.95 Un recipiente de 18 in in² tiene una saliente de 3/4-in por todos lados y su superficie inferior se mantiene a 180 in. ¿Cuánto tiempo después de estar expuesto a vapor saturado a 212°F le toma para que el condensado se derrame sobre la saliente si la orientación del recipiente es

- a) horizontal?
- b) inclinada a 5 grados con la horizontal?
- c) inclinada a 10 grados con la horizontal?

- 5.96 Un vidrio de ventana de 16 in. de ancho por 30 in. de alto tiene aire adyacente a 70°F a una superficie. Si en la otra superficie hay vapor saturado a 210°F, calcular la cantidad de vapor que se condensa en una hora.

- 6.1 Se desea calcular las temperaturas superficiales de emisores negros, utilizando un detector que absorbe energía radiante en la banda de longitud de onda entre 0.6 y 4.6 μ . ¿Cuál es el factor de corrección que debe emplearse con este detector para corregir sus lecturas para superficies

- a) 1 000°R
- b) 3 000°R
- c) 5 000°R

Caracterizar los errores inherentes en este detector en cada una de esas temperaturas, es decir, la fracción de emisión que cae por debajo y arriba del rango del instrumento.

- 6.2 Para el detector de radiación descrito en el problema 6.1, generar y graficar en función de la temperatura absoluta la fracción de emisión superficial total que absorberá el instrumento. En esta misma gráfica mostrar la fracción de emisión que ocurre por debajo de 0.6 μ y la que está por encima de 4.6 μ .

- 6.3 Utilizando el Apéndice F-1, generar y graficar la potencia emisiva de cuerpo negro espectral en función de la longitud de onda para una superficie a

- a) 800°R
- b) 2 400°R
- c) 5 000°R

- 6.4 La temperatura del sol es aproximadamente 10,000°R. Si se considera el rango de luz visible como la que corresponde a

$0.4\mu < \lambda < 0.7\mu$, ¿qué fracción de la emisión solar es visible? ¿Qué fracción de la emisión solar está en el rango ultravioleta? ¿en el rango infrarrojo? ¿A qué longitud de onda es un máximo la potencia emisiva espectral del sol?

- 6.5 El efecto de "invernadero" es una manifestación de transmisión de baja energía de longitud de onda y absorción o reflexión de emisión de longitud de onda mayor. Si el vidrio de sílica transmite 92 por ciento de la radiación incidente en el rango de 0.33μ a 2.6μ y es opaco a la radiación a otras longitudes de onda, ¿qué fracción de energía solar incidente se transmite? ¿Qué fracción de energía emitida se transmite desde estas superficies cuya temperatura promedio es de 95°F ?
- 6.6 Un satélite en órbita circular a 500 millas sobre la tierra tiene un diámetro de 60 in y su superficie es de aluminio pulido. Se puede considerar que la tierra está a una temperatura constante de 55°F y su emisividad efectiva de 0.95. Estimar la temperatura de la superficie del satélite.
- 6.7 Se cubre un tanque de agua cuyos fondo y lados están aislados con una placa de vidrio que tiene características de transmisión radiante dadas por

$$\tau_\lambda = \begin{cases} 0 & 0 < \lambda < 0.33\mu \\ 0.92 & 0.33\mu < \lambda < 2.6\mu \\ 0 & 2.6\mu < \lambda \end{cases}$$

$$\rho_\lambda = 0.08 \quad \text{toda } \lambda$$

El espesor del vidrio es de 14 in y su superficie inferior está a 1/2 in sobre la superficie del agua. La profundidad del agua es de 6 in. Para una irradiación solar incidente promedio de $694\,220 \text{ Btu/hr-ft}^2$,

- determinar la temperatura promedio del agua si sólo se consideran los efectos de radiación
- determinar la temperatura promedio del agua, tomando en cuenta la conducción y convección al igual que la radiación; se puede considerar que la temperatura del aire ambiente es de 70°F .
- resolver b) si el agua y la cubierta de vidrio están en contacto.

- 6.8 Se pinta de color blanco un tanque de almacenaje cilíndrico de gasolina de 25 ft de alto y 40 ft de diámetro ($\rho = 0.82$). Para una irradiación solar de 350 Btu/hr-ft^2 , determinar la temperatura de la superficie del tanque si los rayos solares inciden

a) verticalmente sobre la tapa del tanque.

b) a un ángulo de 45° del plano de la tapa del tanque.

La temperatura del aire adyacente a la superficie del tanque es de 60°F ; asegúrese de incluir los efectos de convección natural cuando el aire está quieto.

6.9 Resolver el problema 6.8 para la temperatura de la superficie del tanque si hay un viento de 30 mph que sopla a través del tanque.

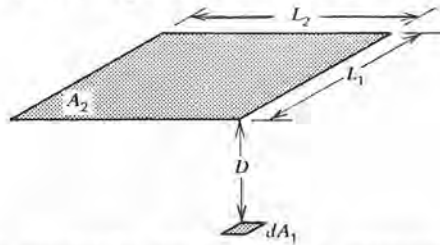
6.10 Resolver la temperatura del tanque especificado en el problema 6.8 cuando los rayos del sol están a 45° con el plano de la superficie superior en un día quieto, con

a) la tapa superior pintada de blanco ($\rho = 0.82$) y los lados grises ($\rho = 0.12$).

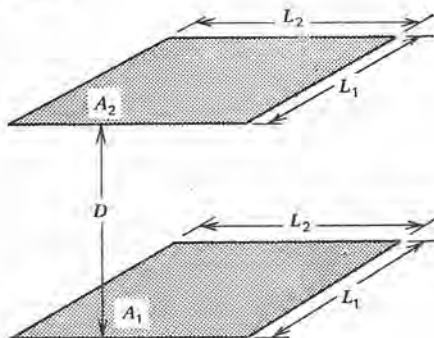
b) todo el tanque pintado de gris.

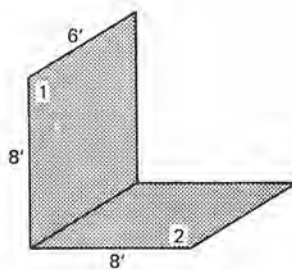
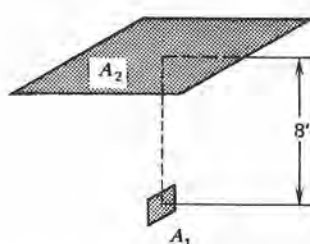
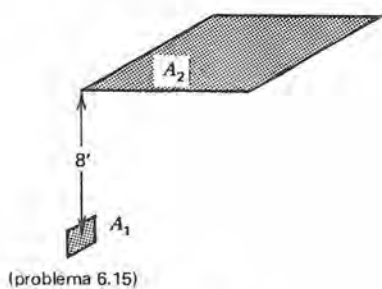
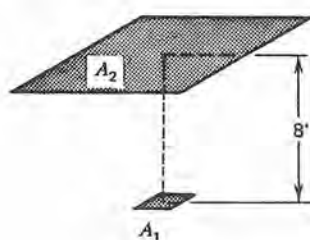
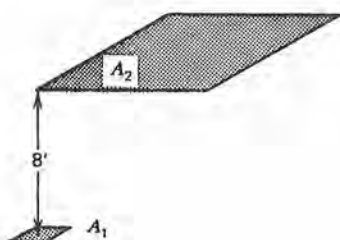
6.11 Evaluar el factor de vista F_{d1-d2} entre las áreas diferenciales dA_1 y dA_2 , orientadas en superficies planas paralelas entre sí y a una distancia D .

6.12 Utilizando el resultado del problema anterior expresar, sin tratar de resolver, el factor de vista entre el área plana diferencial dI y el área A_2 con las dimensiones mostradas.

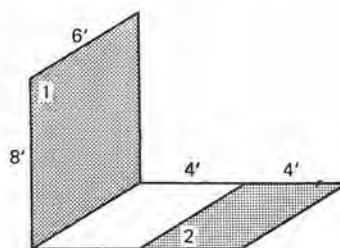


6.13 Utilizando el resultado del problema anterior, expresar sin tratar de resolver el factor de vista entre las áreas finitas A_1 y A_2 , orientadas en planos paralelos con las dimensiones mostradas en la figura.

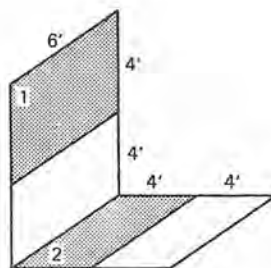




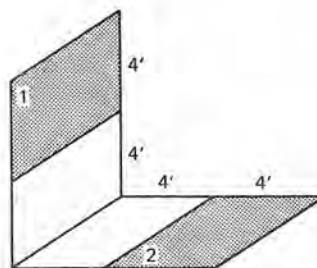
(a)



(b)



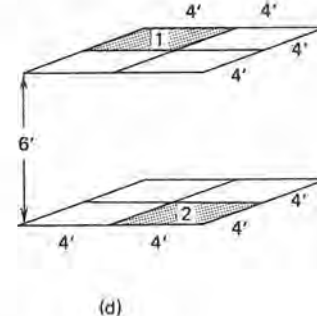
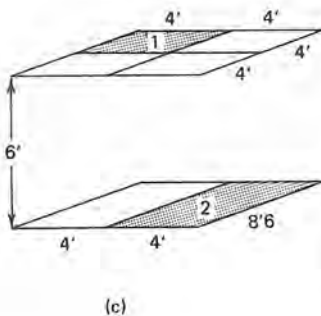
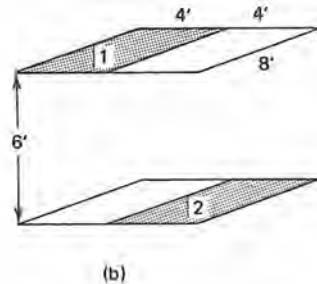
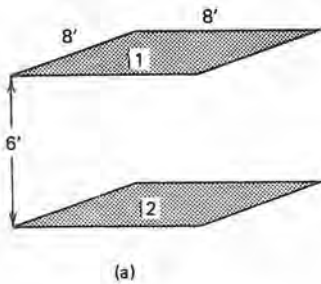
(c)



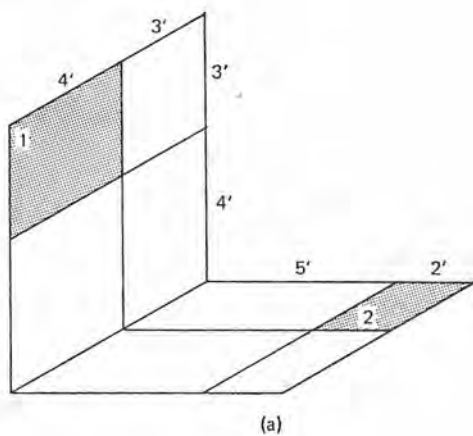
(d)

(problema 6.16)

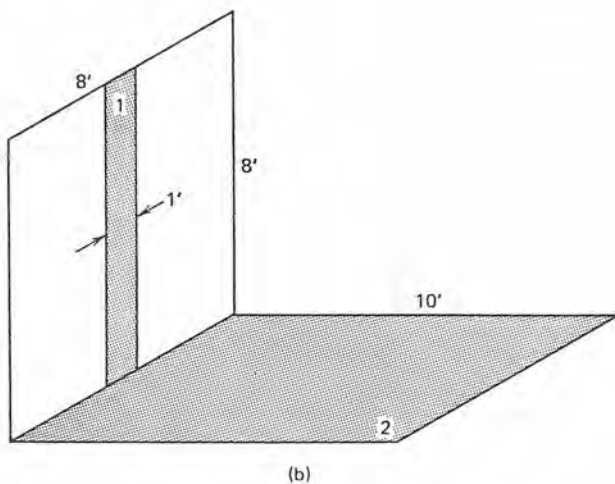
- 6.14 Determinar el factor de vista entre una superficie rectangular A_1 que mide 20 ft \times 20 ft y otra superficie rectangular A_2 de 1ft por 20ft centrada por encima de A_1 y paralela a A_1 a la distancia de 6ft.
- 6.15 Determinar el intercambio radiante entre una superficie negra de 1ft por 1ft a 700°F y un área rectangular negra de 20ft por 20ft mantenida a 75°F, si las dos superficies están orientadas como se muestra (pág. 494).
- 6.16 Determinar el factor de vista F_{1-2} para superficies orientadas como se muestra en las ilustraciones (pág. 494)
- 6.17 Determinar el factor de vista F_{1-2} para las superficies orientadas como se muestra.



- 6.18 Determinar el factor de vista F_{1-2} para las superficies orientadas como se muestra (pág. 496)
- 6.19 ¿Cuánta de la energía emitida de un piso que mide 8ft por 10ft se escapa directamente a través de una ventana de 1ft por 1ft centrada en una pared de la habitación que mide 8ft por 8ft?

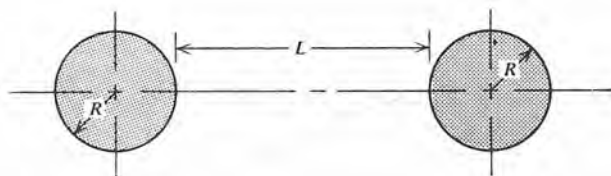


(a)



(b)

(problema 6.18)



(problema 6.21)

6.20 ¿Cuánta de la energía emitida desde una pared que mide 8ft por 8ft se escapa directamente a través de una ventana de 1ft por 1ft centrada en la pared opuesta de la habitación y que está a 10ft de distancia?

6.21 Dos superficies cilíndricas de longitud infinita están orientadas con la configuración y dimensiones mostradas (pág. 524).

a) Utilizando el método de hilos cruzados, demostrar que F_{1-2} queda como

$$F_{1-2} = \frac{4L(L/4 + R)^{1/2} + 2R \operatorname{sen}^{-1} [R/(L/2 + R)] - L - 2R}{\pi R}$$

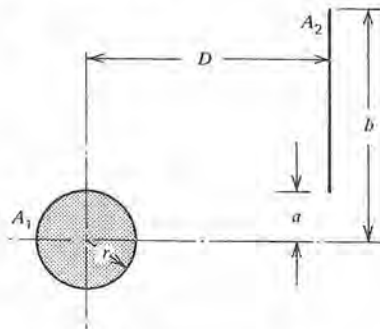
o, haciendo $X = L/2R + 1$,

$$F_{1-2} = \frac{2}{\pi} \left[(X^2 + 1)^{1/2} + \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{1}{X} \right) - X \right]$$

b) Demostrar que esta expresión se aproxima al límite apropiado para los planos paralelos infinitos.

6.22 Comparar el resultado del problema 6.21 para áreas cilíndricas infinitas con la respuesta obtenida en el ejemplo 6.10 para planos paralelos infinitos opuestos. Demostrar que estos resultados son compatibles en la condición limitante apropiada.

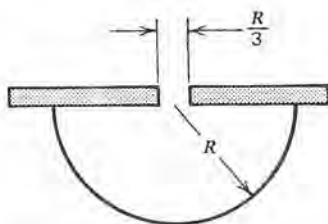
6.23 Dado un cilindro infinito y un plano infinito orientado como se muestra, utilizar el enfoque de los hilos cruzados para generar el factor de vista F_{1-2} .



6.24 Dos planos paralelos infinitamente largos están a 5 ft, sus anchos son de 1 ft y 20 ft respectivamente. Evaluar el factor de vista entre estos dos planos, utilizando el enfoque de los hilos cruzados de Hottel. ¿Cómo se compara F_{1-2} para planos infinitos con el del caso para planos finitos? (Vea el problema 6.14).

6.25 Una superficie cilíndrica larga de radio $R = 2$ ft se va a cubrir con un plano con una rendija de ancho $R/3$ que corre a lo largo de su centro como se muestra. La superficie inferior del plano se mantiene a 400°F y es negra. La superficie cilíndrica está bien aislada. Encontrar

- la temperatura de la superficie cilíndrica,
- el calor neto que debe aplicarse para mantener la temperatura de la superficie del plano a 400°F .

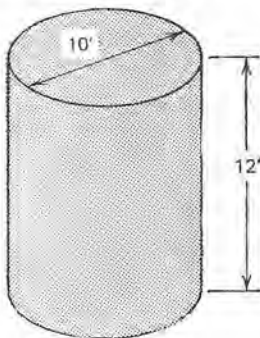


6.26 Una superficie semiesférica con radio $R = 2$ ft está cubierta por una placa con una perforación de diámetro $R/3$ en su centro. La placa inferior del plano es negra y se mantiene 400°F por un calentador empotrado. La superficie semiesférica está bien aislada. Encontrar

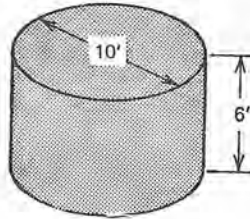
- la temperatura de la superficie semiesférica.
- la razón neta a la que se debe proporcionar el calor para mantener la temperatura de la superficie plana a 400°F .

6.27 El entorno cilíndrico mostrado consiste en paredes laterales mantenidas a 540°F con $\varepsilon = 0.70$, una base a 40°F con $\varepsilon = 0.35$, y la otra rerradiante. Determinar

- el intercambio neto de calor entre las superficies caliente y fría.
- la temperatura de la superficie rerradiante.



- 6.28 La base circular del tanque cilíndrico mostrado puede considerarse como una superficie rerradiante. Las paredes laterales cilíndricas tienen una emisividad de 0.75 y se mantienen a 540°F . La parte superior del tanque está abierta al medio ambiente que está a la temperatura efectiva de 50°F y puede considerarse como negra. Determinar la pérdida neta de calor al medio ambiente.



- 6.29 Determinar el intercambio neto de calor entre el piso y el techo de una habitación de 12 ft por 24 ft por 8 ft de alto se las paredes laterales se consideran rerradiantes. Para temperaturas de piso y techo de 80°F y 61°F respectivamente, determinar el intercambio neto de calor. La superficie del piso es de madera y el techo está pintado de blanco.
- 6.30 Se guarda equipo electrónico en una caja rectangular que mide 2 ft por 2 ft por 3 ft de alto. La energía generada por el equipo eléctrico es de 1 kw. La superficie de la caja es aluminio oxidado. La pérdida de energía proviene de cinco lados hacia el medio ambiente a una temperatura efectiva de 40°F . Aire quieto a 40°F rodea la caja. Encontrar la temperatura de la superficie de la caja si
- toda la pérdida de calor es por radiación.
 - toda la pérdida de calor es por convección natural.
 - la pérdida de calor es tanto por radiación como por convección natural.
- 6.31 Dos placas circulares son paralelas entre sí, y están espaciadas a 2 ft; ambas tienen 5 ft de diámetro. Una superficie está hecha de aluminio comercial y se mantiene a 1400°F ; la otra es acero inoxidable pulido y está a 200°F . Se puede suponer que el medio ambiente absorbe toda la energía que escapa a este sistema. Encontrar
- la pérdida de energía neta de la superficie caliente.
 - la ganancia de energía neta (o pérdida) de la superficie de acero inoxidable.

- c) el intercambio de energía neta entre las dos superficies circulares.
- d) la energía total perdida al medio ambiente.
- 6.32 Si se coloca otra placa de 5 ft de diámetro a mitad de la distancia entre las dos superficies descritas en el problema anterior, ¿cuál será la pérdida neta de energía de la superficie caliente? La nueva placa es latón pulido. Dibujar el circuito térmico para este problema.
- 6.33 Un tubo de fierro oxidado de 3 in de diámetro exterior pasa horizontalmente por una habitación cuyas paredes están a 72°F y tienen una emisividad efectiva de 0.92. Las dimensiones de la habitación son 10 ft de alto por 20 ft por 35 ft; hay 20 ft expuestos de tubo. La superficie de la tubería está a 210°F y aire a 70°F rodea el tubo. Determinar
- a) la pérdida de energía del tubo debido a la radiación.
- b) la pérdida de energía del tubo debido a la convección
- 6.34 Se pueden considerar dos superficies, que se mantienen a 1040°F y 140°F respectivamente, con emisividad de 0.6, como planos infinitos paralelos. ¿Cuál será el intercambio de energía neto entre estas superficies?
- 6.35 Determinar el flujo de calor y la temperatura de equilibrio de los blindajes si se colocan blindajes de radiación entre las superficies especificadas en el problema anterior. Los blindajes también tienen $\varepsilon = 0.6$. Resolver para el caso de
- a) un blindaje.
- b) dos blindajes.
- c) tres blindajes.
- 6.36 Un cilindro largo (que tiende a infinito) tiene una temperatura superficial de 540°F . Este cilindro, de diámetro de 2 in está encerrado dentro de otro cilindro concéntrico de 12-in de diámetro interior cuya temperatura se mantiene a 80°F . Las superficies de los cilindros interior y exterior tienen emisividades de 0.6 y 0.28 respectivamente. Encontrar la transferencia neta de calor entre los dos cilindros.
- 6.37 Si se coloca un cilindro de aluminio de paredes delgadas ($\varepsilon = 0.20$) y 6 in de diámetro entre las dos superficies descritas en el problema 6.36, encontrar
- a) el intercambio neto de calor.
- b) la temperatura del blindaje de aluminio

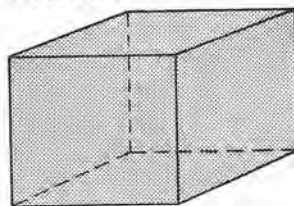
6.38 Se desea almacenar nitrógeno líquido a 130°R en un recipiente esférico de 10 in de diámetro. Una esfera concéntrica de 12 in de diámetro envuelve el recipiente de almacenaje y se vacía el espacio intermedio. Este recipiente de almacenaje está en una habitación con aire a 76°F . Las superficies de visión están recubiertas de aluminio con emisividad efectiva de 0.05. Suponiendo que la temperatura de la esfera interior sea de 139°F y despreciando la conducción a través de la capa esférica exterior, encontrar

- la temperatura en la superficie esférica exterior.
- la razón de evaporación del nitrógeno líquido bajo estas condiciones en libras por hora. h_{fg} para el hidrógeno a la presión atmosférica de 1 atm es de 85.7 Btu/lb_m .

6.39 Se coloca un termopar con área superficial de 0.3 in^2 en el centro de un ducto de 3 in de diámetro cuyas paredes están a 200°F y a través del cual fluye gas caliente. Las paredes del ducto tienen una emisividad efectiva de 0.8 y la del termopar es 0.6. El coeficiente de transferencia de calor convectivo entre los gases calientes y la unión del termopar (supuesta esférica) es de $25 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$. Si la lectura del termopar es de 340°F , ¿Cuál cree que sea la temperatura real del gas que fluye?

6.40 Obtener la temperatura del gas del problema 6.39 si se coloca un blindaje cilíndrico de radiación de 2 in de diámetro hecho de aluminio comercial alrededor del termopar. El blindaje tiene la suficiente longitud para que se pueda suponer con seguridad que obstaculiza completamente la vista entre el termopar y las paredes de la tubería. ¿Cuál será la temperatura del blindaje de radiación?

6.41 En la figura siguiente se muestra un encierro cúbico. La superficie interior se calienta hasta 1200°F y uno de los lados se mantiene a 700°F . Los lados restantes y la tapa se pueden considerar como superficies rerradiantes. Las emisividades en la base y la pared lateral son de 0.6. Si todos los lados tienen 3 ft de longitud, determinar la transferencia de calor del piso a la pared lateral a 700°F . ¿Cuál será la temperatura de las superficies rerradiantes? Resolver este problema utilizando una analogía eléctrica.



Piso, 1200°F , $\epsilon = 0.7$

Pared lateral
 700°F , $\epsilon = 0.7$

6.42 En el ejemplo 6.13 se logró una solución iterativa para un entorno cúbico, utilizando las ecuaciones (6-101), (6-115) y (6-117). Resolver el problema 6.41 utilizando el mismo enfoque iterativo.

6.43 En el ejemplo 6.14 se resolvió un problema de radiación de tres zonas por medio de la computadora digital, usando la iteración de Gauss-Seidel para obtener el resultado final.

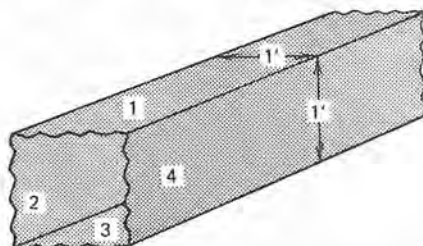
Partiendo de las mismas preguntas del ejemplo, generar un programa de computadora para resolver estas clases de problemas. Presentar el diagrama de flujo y el listado de programa compatible con su sistema local de computadora.

Utilizando el programa, resolver el problema 6.41 para

- a) tres zonas
- b) cuatro zonas
- c) cinco zonas.

6.44 Esquemáticamente, la figura muestra un ducto de sección transversal cuadrada que se extiende al infinito a lo largo de sus ejes. Determinar la transferencia de calor en cada superficie para las siguientes condiciones, utilizando cualquier técnica de solución adecuada:

- a) superficie 1; $T = 1200^{\circ}\text{F}$, $\varepsilon = 0.6$
 superficie 2; $T = 800^{\circ}\text{F}$, $\varepsilon = 0.44$
 superficie 3; $T = 400^{\circ}\text{F}$, $\varepsilon = 1.0$
 superficie 4 rerradiante
- b) superficie 1; $T = 1200^{\circ}\text{F}$, $\varepsilon = 0.6$
 superficie 2; $T = 800^{\circ}\text{F}$, $\varepsilon = 0.44$
 superficie 3; $T = 400^{\circ}\text{F}$, $\varepsilon = 1.0$
 superficie 4; $T = 600^{\circ}\text{F}$, $\varepsilon = 0.8$



6.45 Obtener la transferencia de calor en cada superficie en un ducto rectangular infinito con las temperaturas y emisividades de las paredes dadas en a) y b) del problema anterior. Las dimensiones del ducto son de 1 ft por 3 ft, y las paredes 2 y 4 de 1 ft de ancho; las paredes 1 y 3 tienen un ancho de 3 ft.

- 6.46 Un ducto cuadrado que mide 10 in por 10 in tiene vapor de agua a 1 atm y 640°F fluyendo por él. Las paredes del ducto están a 300°F y su emisividad es de 0.8. Determinar la razón de transferencia de energía radiante entre el vapor de agua y las paredes del ducto bajo estas condiciones.
- 6.47 Una mezcla de gas a 1000°F y 3 atm de presión entra a un ducto circular que mide 8 in de diámetro, con una superficie interior que puede considerarse negra. El gas es 18% CO_2 y 24% vapor H_2O por volumen, y el resto es no radiante. Determinar la razón de transferencia de calor entre esta mezcla de gas y las paredes del tubo si éste se mantiene a 300°F . Despreciar los efectos convectivos.
- 6.48 Si la mezcla de gas especificada en el problema 6.47 entra al tubo negro de 8 in de diámetro interior a 1000°F , fluyendo a 120 ft^3 calcular la longitud del tubo requerido para que la temperatura media del gas decrezca hasta 900°F . Puede suponerse que la fracción no absorbente de la mezcla de gas es nitrógeno.
- 6.49 Se introduce una mezcla de gas a 1200°F y 8 atm de presión a una cavidad esférica de 10 ft de diámetro con paredes negras que inicialmente se vació. Al mismo tiempo de introducir el gas, las paredes de la cavidad están a 600°F . ¿Cuál es la razón de transferencia de calor bajo estas condiciones? El gas está compuesto por 20% CO_2 y el resto son componentes no radiantes.
- 6.50 Un gas formado por 22% CO_2 y 78% de oxígeno y nitrógeno sale de un horno de cal a 2000°F y entra a un ducto cuadrado de 6-in con una velocidad de masa de $0.41\text{ lb}_m/\text{ft}$ por segundo. El calor específico del gas es $0.28\text{ Btu}/\text{lb}_m\text{-}^{\circ}\text{F}$. Se desea enfriarlo hasta 1000°F interactuando con las paredes del ducto, que tienen una emisividad de 0.9 y una temperatura superficial interna mantenida en 800°F . El coeficiente de transferencia convectiva de calor entre el gas y las paredes del ducto es de $1.5\text{ Btu}/\text{hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$.
- Determinar la longitud del ducto requerida para enfriar el gas hasta 1000°F .
 - Determinar las fracciones de transferencia total de calor debido a la radiación y convección.
 - Si se aumenta la longitud del ducto al doble del evaluado en el inciso (a), ¿cuál será la temperatura de salida del gas?
- 7.1 Se desea pasar 100,000 lb de agua por hora a través de un intercambiador de calor con un aumento resultante de tem-

peratura desde 140°F a 200°F . Se dispone de gas combustible a 800°F con calor específico de $0.24 \text{ Btu/lb}_m\text{-}^{\circ}\text{F}$ a razón de $100,000 \text{ lb}_m/\text{hr}$ para calentar el agua. Determinar (a) la temperatura de salida del gas y (b) el área de transferencia requerida de calor de un intercambiador de calor de contraflujo y un solo paso para lograr la transferencia especificada de energía.

- 7.2 Un aceite que tiene un calor específico de $0.45 \text{ Btu/lb}_m\text{-}^{\circ}\text{F}$ entra a un intercambiador de calor de contraflujo y un solo paso a 260°F con una razón de flujo de $18000 \text{ lb}_m/\text{hr}$. El aceite debe enfriarse a 180°F utilizando agua como el otro fluido; se dispone de agua a 50°F a razón de $15,000 \text{ lb}_m/\text{hr}$. Encontrar el área requerida de transferencia de calor para un coeficiente de transferencia de calor global de $42 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$.

- 7.3 Dadas las temperaturas iniciales de fluido, razones de flujo, coeficiente de transferencia de calor global, y transferencia de calor requerida especificados en el problema anterior, ¿cuál será el área requerida si la configuración del intercambiador es

- a) coraza y tubo con aceite en los tubos; un paso por la capa y cuatro pasos por el tubo?
- b) flujo cruzado; agua mezclada, aceite no mezclado?

- 7.4 Se hace entrar agua a un intercambiador de calor de doble tubería y contraflujo a 60°F y razón de flujo de $180 \text{ lb}_m/\text{min}$. Se desea calentar el agua a 140°F , utilizando un aceite con calor específico de $0.44 \text{ Btu/lb}_m\text{-}^{\circ}\text{F}$, que entra al intercambiador a 220°F y sale a 90°F . El intercambiador tiene un coeficiente de transferencia de calor total de $50 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$.

- a) ¿Qué área de transferencia de calor se requiere?
- b) ¿Qué área se requiere si la configuración será coraza y tubo en que el agua hace un paso por la coraza y el aceite dos pasos por los tubos?
- c) ¿Cuál será la temperatura de salida del agua si para el área determinada en a) se disminuye la razón de flujo del agua a $140 \text{ lb}_m/\text{min}$?

- 7.5 Una casa que utiliza un sistema de calefacción de agua caliente requiere $95,000 \text{ Btu/hr}$ para fines de calefacción. El agua se calienta de 80°F a 125°F usando para este fin un intercambiador de calor por el que entra aire caliente a 210°F y sale a 120°F . De los intercambiadores de calor especificados a continuación, elegir el que sea más compacto para este uso:

- a) Una unidad de contraflujo con $U = 30 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$ razón de superficie a volumen de $130 \text{ ft}^2/\text{ft}^3$.

- b) Una unidad de flujo cruzado, agua no mezclada y aire mezclado; $U = 40 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^\circ\text{F}$ razón de superficie a volumen de $100 \text{ ft}^2/\text{ft}^3$.
- c) Una unidad de flujo cruzado con ambos fluidos no mezclados, $U = 50 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^\circ\text{F}$ razón de superficie a volumen de $90 \text{ ft}^2/\text{ft}^3$.

7.6 Determinar el área de superficie de transferencia de calor requerida para un intercambiador de calor construido de tubería de acero suave de 1 in, 14-BWG para enfriar 55,000 lb/hr de benceno de 150°F a 103°F , utilizando 50,000 lb/hr de agua disponible a 50°F . El coeficiente de transferencia de calor total, basado en el área del tubo exterior, es de $110 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^\circ\text{F}$. Considerar cada uno de los siguientes arreglos:

- a) flujo paralelo, paso sencilla.
- b) contraflujo, paso simple.
- c) coraza y tubo con benceno en la coraza, dos pasos de coraza, 48 pasos de tubo.
- d) flujo cruzado con un paso de tubo y uno de coraza, fluido del lado de la coraza (benceno) mezclado.

7.7 Se hace fluir fluido hidráulico (MIL-M-5606) en los tubos de un intercambiador de calor de dos pasos de tubo y coraza sencilla entrando a 160°F y saliendo a 100°F con una razón de flujo de 5000 lb/hr; el aceite está en flujo turbulento. El agua entra a la coraza a 60°F y sale a 80°F . Si se emplea el mismo intercambiador con la misma razón de flujo de agua y temperatura de entrada, pero el aceite fluye a 3500 lb/hr y entra a 200°F , ¿cuáles serán las temperaturas de salida de los dos fluidos?

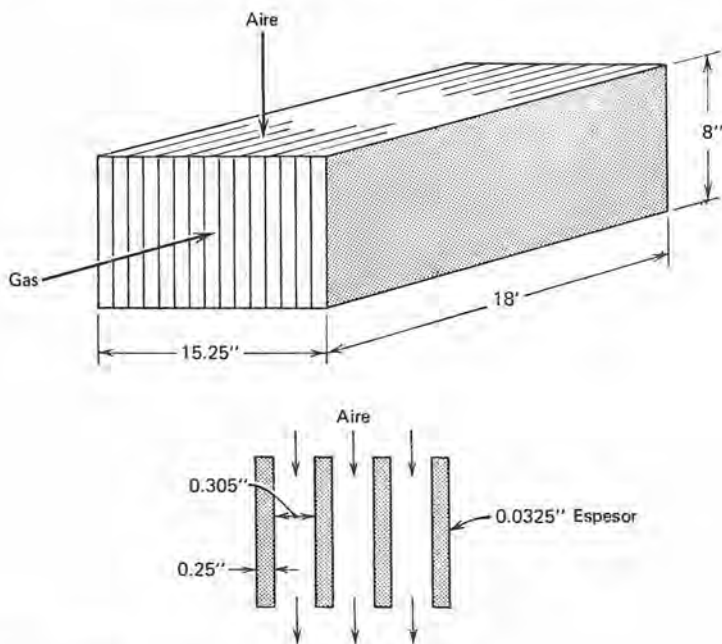
*7.8 En la página 534 aparece el diagrama de un intercambiador de calor de flujo cruzado. Se desea utilizar esta unidad para calentar aire que entra a 60°F y fluye a 6500 lb/hr por medio de gases de escape de una turbina que están disponibles a 1550°F , que fluyen a 5000 lb/hr. Se desea encontrar la temperatura de salida del aire.

*7.9 Se necesita un calefactor para calentar agua desde 60°F a 160°F , fluyendo a 6000 lb/hr, utilizando vapor saturado a 130 psi que se condensa en el exterior de tubos de cobre de 1-1/4 in y 16-BWG. Se puede suponer un coeficiente de la superficie del lado de vapor de $1400 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^\circ\text{F}$. Se desea que los tubos tengan 10 ft de longitud y que la velocidad del agua sea de 5 ft/seg.

* En este y los problemas siguientes marcados con un asterisco (*), no se da el coeficiente de transferencia de calor global. Entonces es necesario determinar estas cantidades relativas para resolver el problema.

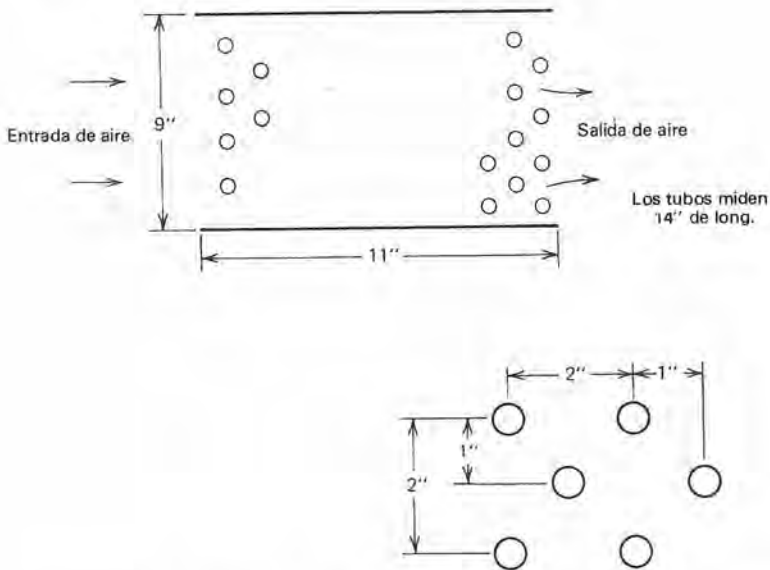
Determinar el número requerido de tubos por paso en un intercambiador de coraza y tubo, el área requerida de transferencia de calor, y el arreglo que logre la necesaria transferencia de calor.

- *7.10 Determinar la información requerida del problema anterior cuando se considera una resistencia de ensuciamiento de $0.002 \text{ hr/ft}^2\text{-}^\circ\text{F/Btu}$ para el lado del agua y una de $0.0005 \text{ hr-ft}^2\text{-}^\circ\text{F/Btu}$ del lado del vapor.
- *7.11 Se enfría anilina de 125°F a 90°F en la tubería interior de un intercambiador de calor de doble tubería y paso simple. El agua de enfriamiento fluye contracorriente a la anilina, entrando a 60°F y saliendo a 82°F . El intercambiador está formado por un tubo de cobre de $7/8\text{-in.}$, 16-BWG con una camisa de tubería de acero de $1\text{-}1/2 \text{ in}$ calibre 40. La velocidad de la anilina será 5 ft/seg y la del agua 4 ft/seg . Determinar
- el coeficiente global basado en el área exterior del tubo interno.
 - la longitud requerida de intercambiador si se quiere que la razón de flujo del agua sea de 3000 lb/hr .



(problema 7.8)

- *7.12 Se enfría fluido hidráulico de 200°F a 110°F en el anillo de un intercambiador de calor de doble tubería mediante agua que entra al tubo interior a 60°F y sale a 95°F . Se propone alargar la unidad de doble tubería para enfriar el fluido hidráulico a una temperatura más baja. Si las corrientes fluidas fluyen concurrentemente, determinar
- a) la temperatura mínima a la que se puede enfriar el fluido hidráulico.
 - b) la temperatura de salida del fluido hidráulico en función del aumento fraccional en la longitud del intercambiador de calor.
- *7.13 Dado el mismo intercambiador de calor de doble tubería del problema anterior, con las mismas temperaturas de entrada y las mismas razones de flujo de las dos corrientes de fluidos excepto porque los fluidos fluyen a contracorriente, determinar
- a) la temperatura de salida de cada corriente.
 - b) la temperatura más baja a la que se pueda enfriar el aceite.
- *7.14 Se desea calentar $40,000 \text{ ft}^3$ de nitrógeno de 75°F a 145°F condensando vapor saturado a 35 psia. Se requiere que el nitrógeno fluya por tubos de 1 in 14-BWG con una velocidad de masa de 8500 lb/hr-ft^2 .
- a) determinar el número requerido de tubos de 8 ft y el número de pasos para lograr este precalentado de nitrógeno. Se utilizará un paso de capa de vapor en condensación.
 - b) ¿Qué razón de flujo de bióxido de carbono en lb/hr se anticipa si se utilizara este intercambiador para precalentar CO_2 en vez de nitrógeno? Todavía se condensaría vapor a las mismas condiciones en la capa.
- *7.15 Se hace fluir aire por un banco de tubos por el que se introduce gas caliente. Ambos gases están a presión atmosférica; el aire entra a 80°F y el gas caliente entra a los tubos a 1450°F . El aire fluye a la razón de 2500 lb/hr , y la razón de flujo del gas caliente es de 4000 lb/hr . Se emplean 40 tubos de acero suave de 1 in m y 18-BWG; en la figura siguiente se muestran el arreglo y las dimensiones. Determinar la transferencia de calor lograda por hora y la temperatura de salida de cada fluido.
- 7.16 Se va a diseñar un intercambiador de calor de coraza y tubo con paso de un tubo en que el agua en los tubos se calentará mediante el vapor en condensación en la coraza. El vapor se



condensará en forma peculiar y el agua fluirá en forma turbulenta en los tubos lisos. Las cantidades especificadas incluyen la razón de flujo del agua, las temperaturas de entrada y salida del agua, la temperatura de condensación del vapor, y la caída disponible de presión (despreciando las pérdidas de entrada y salida). Suponiendo que el flujo del agua permanezca turbulento, y que la resistencia térmica de la pared del tubo y la película condensada son despreciables, evaluar el efecto del diámetro del tubo en el área de transferencia de calor requerida total en el intercambiador.

- 7.17 Se construyen dos intercambiadores idénticos de calor, cada uno de 12 ft de longitud. Estas unidades son un tubo de acero de 2-in y calibre 40 concéntrico con un tubo de 3-in y calibre 40. Se hace entrar agua a 65°F al tubo interior de una unidad y fluir a través de los dos intercambiadores en serie a razón de 50 gal/min. Se dispone de dos corrientes de agua caliente para proporcionar calor a la corriente fría, una a 140°F y 30 gpm, la otra a 210°F y 30 gpm. Si se pueden mezclar arbitrariamente las corrientes calientes en cualquier lugar antes de entrar a este sistema, especificar el arreglo que dé la máxima transferencia de calor. Para este arreglo óptimo, ¿cuál será la temperatura de salida de la corriente fría?
- 7.18 El condensador de un acondicionador de aire de automóvil tiene una capacidad de diseño para eliminar 50,000 Btu/hr

cuando el auto viaja a 40 mph y la temperatura del aire exterior es de 95°F . El fluido del sistema de enfriamiento es Freón-12, que permanece a 150°F y la elevación de temperatura del aire a través del condensador es de 12°F . Para propósitos de diseño, el coeficiente de transferencia de calor global es de $30 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$. Desde luego, cuando cambia la velocidad del automóvil también cambia el funcionamiento de la unidad de aire acondicionado. Con base en la suposición que la razón de flujo de la masa del aire varía directamente con la velocidad y que V varía con la velocidad a la potencia 0.7, generar una gráfica de la capacidad del condensador en Btu/hr , en función de la velocidad del auto en un rango de 10 a 60 mph.

- 7.19 El enfriador de aceite de un motor utiliza agua en camisa a 150°F para enfriar el aceite lubricante de 210°F a 165°F , fluyendo a 2600 lb/hr . Se desea utilizar un pequeño intercambiador de calor de coraza y tubo formado por un paso de coraza y dos pasos de tubo, con aceite en la coraza para este fin. Hay cincuenta tubos de cobre involucrados de $1/2 \text{ in}$ 18-BWG, a razón de 25 por paso. El calor específico del aceite es $0.42 \text{ Btu/lb-}^{\circ}\text{F}$, y se puede considerar que el coeficiente de transferencia de calor del lado del aceite es de $45 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$. Si se requiere que la elevación de temperatura del agua refrigerante sea de 5°F , ¿de qué largo deben ser los tubos del intercambiador de calor?
- 7.20 Se desea utilizar el vapor de salida de una turbina para calentar $50,000 \text{ lb/hr}$ de agua de 60°F a 115°F . Se desea que el vapor esté en la coraza de un intercambiador de calor de dos pasos de coraza y ocho pasos de tubo en que el paso de tubo emplea veinte tubos de cobre de $1-1/4 \text{ in}$ y 16-BWG. Los coeficientes de transferencia de calor de los lados de vapor y agua son $700 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$ y $250 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$, respectivamente. ¿Cuál es la longitud requerida de los tubos en este intercambiador? Despreciar el ensuciamiento de superficies.
- 7.21 Obtener las longitudes de los tubos para las condiciones especificadas en el problema anterior si se suponen resistencias de ensuciamiento de $0.001 \text{ hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F/Btu}$ para los lados del vapor y agua de los tubos del intercambiador de calor.
- *7.22 Se desea utilizar un intercambiador de calor de coraza y tubo y un solo paso con vapor en condensación en la coraza para calentar 5000 gpm de agua desde 60°F hasta 100°F . El coeficiente de transferencia de calor del lado del vapor es de $1800 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-}^{\circ}\text{F}$. La capacidad de bombeo limita la caída de

presión a través de los tubos hasta 14 psi. Calcular la longitud y número de tubos de acero de 1 in y calibre 40 que logre la transferencia necesaria de calor con la capacidad disponible de bombeo.

- *7.23 Se desea calentar 50 psi de alcohol N butilo de 550 lb/min a 80°F con un intercambiador de calor de coraza y tubo, con vapor saturado a 180°F condensándose en la coraza. El intercambiador emplea tubos de cobre de 3/4 in y 16-BWG, y la caída permisible de presión en los tubos es de 1.5 psi. Despreciando la resistencia del lado de vapor al igual que la resistencia conductiva a través de los tubos de cobre de paredes delgadas, determinar

- a) la velocidad del alcohol en los tubos
- b) el número de tubos en el grupo
- c) la longitud de los tubos.

- *7.24 Se desea enfriar benceno con razón de flujo de 80,000 lb/hr de 160°F a 100°F mediante 80,000 lb/hr de agua disponible a 70°F. Suponiendo un coeficiente de transferencia de calor global de la Tabla 7.2, calcular el área superficial requerida para las siguientes configuraciones de intercambiador:

- a) flujo cruzado, un paso, ambos fluidos no mezclados.
- b) flujo cruzado, dos pasos.
- c) flujo cruzado, un solo paso, con agua mezclada, benceno no mezclado.

Indice

A

Absortividad, 309, 323-325
 espectral direccional, 325
 espectral, hemisférica, 327
 total direccional, 325
 total hemisférica, 327
Addoms, J. N., 292-293
Agua, propiedades del, 429
Aire, propiedades del, 438
Alcohol N-butílico, propiedades del, 431
Aletas, ver superficies extendidas
Alternante, procedimientos de dirección,
Alloda, S. R., 158-160
Amoniaco, propiedades del, 430
Análisis aproximado,
 de la capa límite hidrodinámica, 197, 198
 de la capa límite térmica, 224-226
Análisis de mosaico de los parámetros en la
 conducción de estado inestable, 122,
 123
Análisis dimensional para flujo interno, 213-
 215
Análisis integral
 de la capa límite hidrodinámica-flujo
 laminar, 197, 198
 flujo turbulento, 211, 212
Analogía, eléctrica,
 para la conducción de estado estable, 75
 para la radiación, 359, 360
Analogía de Colburn, 237, 238
 de Prandtl, 235, 236
 de Reynolds, 232, 233
 de Von Kármán, 237, 238
Analogías eléctricas
 para el intercambio radiante entre
 superficies negras, 359, 360

 para el intercambio radiante entre
 superficies grises isotérmicas, 366, 367
Angulo sólido, 311, 312
Analogías entre la energía, la transferencia de
 momentum y, 230, 231
Anilina, propiedades de la, 430
Anisotrópicos, materiales, 7, 8
Aoki, T., 292, 293
Arpaci, V., 108
Arrastre
 por forma, 185-187
 viscoso, 185-187
Asociación de fabricantes de
 intercambiadores tubulares (TEMA),
 tabla de resistencias por
 ensuciamiento, 424, 425

B

Balance térmico, método de formulación
 numérica, 49, 50
Bandas de emisión para vapor de agua y
 bióxido de carbono, 383-386
Barakat, N. Z., 158-160
Benceno, propiedades del, 432
Berenson, P., 295
Bergelin, O. P., 279, 282-284
Beckmann, W., 248-250
Bióxido de carbono, propiedades del, 442
Bióxido de sulfuro, propiedades del, 447
Bird, R. B., 4, 5
Bismuto, propiedades del, 435
Blasius, H., 194, 195
Blasius, solución de, 193, 194
Boelter, L. M. K., 274, 275

Boussinesq, aproximación de
 Bowman, R. A., 407, 408
 Bray, A. P., 66-68
 Bromley, L. A., 294, 295
 Brown, G. A., 282-284

C

Calibres de tuberías, 468
 Capa límite
 definición de, 181-183
 ecuaciones de
 hidrodinámica, 191-193
 separación, 185-187
 térmica, 220, 221
 flujo paralelo a placa plana, 181-183
 Capa límite técnica, 213-215
 análisis exacto, 220, 221
 análisis integral, 224-226
 consideraciones del flujo turbulento, 233, 234
 espesor de, 224
 Carnahan, B., 68, 69
 Cary, J. L., 282-284
 Cess, R. D., 371, 372
 Chapman, S., 4, 5
 Chen, M. M., 304, 305
 Choi, H., 292, 293
 Cilindros
 en convección forzada, 277, 278
 en convección natural, 258, 259
 fuerza de arrastre en, 188, 189
 Clark, J. A., 158-160
 Cloro, propiedades del, 445
 Coeficientes de arrastre
 gráficas para cilindros y esferas, 188, 189
 Coeficiente de expansión térmica, 218, 219
 Coeficiente global de transferencia de calor, 17, 18
 Coeficiente de transferencia de calor por
 convección, 11, 12
 correlaciones para
 en flujos forzados, 266, 267
 en flujos naturales, 246, 247
 Coeficiente de transferencia del calor, valores
 típicos para, 13, 14
 Colburn, analogía, de 237, 238
 Colburn, A. P., 237, 274, 275, 279, 282
 Colwell, R. G., 254-256
 Comings, E. W., 7, 8
 Condensación
 con bancos de tubos horizontales, 303, 304
 consideraciones de flujo turbulento, 299

 el modelo de película de Nusselt, 295, 296
 sobre cilindros horizontales simples, 303
 Condensación en forma de película, 295, 296
 Condensación por goteo, 295, 296
 Conducción, 1, 71
 analogía eléctrica de la, 75
 efecto de la conductividad variable en la,
 10, 11
 estado estable, 71
 bidimensional, 94, 95
 solución analítica, 94, 95
 solución gráfica, 98, 99
 unidimensional, 71, 72
 estado inestable, 120, 121
 métodos gráficos, 150, 151
 numérica, 108
 soluciones numéricas, 150, 151
 uso de las tablas para, 136-138
 gráfica de flujo para, 98, 99
 ley de Fourier de la, 1, 2
 Conducción de calor de estado inestable, 120, 121
 análisis gráfico, 150, 151
 en cilindros, 133, 134
 en dos y tres dimensiones, 134, 135
 en esferas, 133, 134
 en paredes planas, 127, 128
 en paredes semi-infinitas, 141, 142
 en sistemas unidimensionales sin
 generación de calor, 121, 122
 Conductancia internodo, tabla de, 53, 54
 Conductancia, térmica, 12, 13, 73, 74
 Conductividad térmica, 1, 2
 en función de la temperatura, 3
 para los gases monotónicos en función de la
 presión y la temperatura, 6, 7, 8
 Conductividad, *ver* conductividad térmica
 Conservación de masa,
 forma diferencial, 31, 32
 forma de mosaico, 24, 25
 forma integral, 28, 29
 ley de, 21, 22
 Convección forzada, 265, 266
 con flujo constante por la pared, 269, 270
 con temperatura de pared constante, 269-272
 en flujo interno, 266, 267
 para flujo externo
 alrededor de esferas, 282, 284
 bancos de cilindros, 279, 282
 cilindros en flujo cruzado, 266, 267
 sobre superficies planas, 284, 286
 Convección natural,

adyacente a una placa vertical caliente,
 análisis dimensional, 218, 219
 consideraciones analíticas, 247, 248
 correlaciones experimentales, 251, 252
 en canales verticales, 252, 253
 expresiones simplificadas en el aire, 263,
 264
 para superficies horizontales, 258, 259
 Convergencia de soluciones numéricas, 12, 13
 Cowling, T. G., 4, 5
 Crank-Nicholson, método de promedios
 ponderados, 48, 49
 Cuerpo gris, 329, 330
 Cuerpo negro, 309, 310
 Cuerpo negro, radiación de, *ver* intercambio
 de energía radiante
 Cuerpo opaco, 309, 310
 Curtiss, C. F., 4, 5

D

Derivada sustancial, 31, 32
 Desprendimiento de la capa límite, 185, 187
 Diferencia central
 representación de primeras derivadas, 45,
 46
 representación de segundas derivadas
 3 puntos, 43, 44
 Diferencia de temperatura logarítmica
 media, 403, 404
 Diferencia finita, representación de las
 derivadas, 43, 44
 Diferencia hacia adelante, representación de
 primeras derivadas, 43, 44
 Diferencia hacia atrás, representación de
 primeras derivadas, 43, 44
 Difusividad
 molecular, de momentum, 184, 185
 Difusividad térmica, 35, 36
 Difusividad por turbulencia
 del calor, 230, 231
 del momentum, 205, 206
 Dittus, F. W., 274, 275
 Doberstein, S. C., 282-284
 Dominancia diagonal en soluciones
 numéricas, 64, 65
 Douglas, Jim, Jr., 154-156, 156, 157

E

Ebullición, 287, 288
 correlaciones 292, 293

mecanismos físicos de la, 288-290
 nuclear, 290, 291
 película, 291, 292
 Ebullición nuclear, 290, 291
 Eckert, E. R. G., 251, 277, 278
 Ecuaciones de circuito para resolver analogías
 eléctricas, 368, 370
 Ecuación del calor, 35, 36, 41, 42
 Efectividad de las aletas, 90, 91
 Efectividad del intercambiador de calor, *ver*
 intercambiador de calor, efectividad
 de
 Efectividad, gráficas NUT, 416
 Eficiencia de aletas, 91, 93
 Elenbaas, W., 254-256, 258-260
 Emisividad, 319-321
 espectral hemisférica, 321, 322
 total direccional, 321
 total hemisférica, 322, 323
 Encierro rectangular
 intercambio por radiación, solución
 numérica para 3, 4 y 5 zonas, 377-379
 Error, función, 143, 144
 Errores en soluciones numéricas, 65, 66
 Esferas,
 coeficientes de arrastre para, 188, 189
 transferencia de calor con flujo cruzado,
 284-286
 Espectro electromagnético, 308
 Estabilidad numérica, 65, 66
 criterios para, 66-68
 Euler, ecuación de, 37, 38
 Exactitud de las soluciones numéricas, 64, 65

F

Factor de configuración geométrica, *ver*
 factor de vista
 Factor de ensuciamiento, 423, 424
 Factor de fricción de Fanning, 190, 191
 Factor de fricción de Fanning, definición de,
 definición de, 190, 191
 gráfica, 190, 191
 Factor forma de la conducción
 definición, 17, 18
 tabla para sistemas bidimensionales, 104
 Factor de vista, 341
 álgebra, 345, 346
 para rectángulos perpendiculares, 348
 para superficies planas paralelas, 350-352
 por el método de hilos cruzados de Hottel,
 356, 357
 Fluido hidráulico, propiedades del, 432

- Flujo cruzado sobre cilindros, coeficiente de transferencia de calor para, 278, 279
- Flujo cruzado sobre esferas, coeficiente de transferencia de calor para, 283, 284
- Flujo externo, 181, 183
 - junto a cuerpos romos, 184, 185
- Flujo, gráfica de, 98, 99
- Flujo interno, 181, 187, 188
- Flujo laminar, 183, 184
 - convexión en, 272, 273
- Flujo turbulento, 183, 184
 - dentro de tubos y ductos, correlación para, 274, 275
 - transferencia de energía en, 229
- Formulación de ecuaciones de transferencia de calor,
 - numérica, 41
- Formulación de mosaico de las leyes básicas, 21, 22
- Formulación diferencial de ecuaciones, *ver* Formulación de ecuaciones, diferencia
- Formulación diferencial de leyes básicas, 30, 31
- Formulación integral de las leyes básicas, 26
- FORTTRAN, programación, 41
- Fourier, J. B. J., 1, 2
- Fourier, ecuación de la relación de, para la conducción del calor, 1, 2
- Fourier módulo de en la conducción transitoria, 124-126
- Freón, propiedades del, 431
- Función corriente, 194, 195

G

- Gas gris, aproximación H_2O y CO_2 , 386, 387
- Gases, propiedades de los, 438
- Gauss, método de eliminación de
 - diagrama de flujo para, 60
 - técnica, 54, 55
- Gauss-Seidel iteración de
 - diagrama de flujo para, 62, 63
 - técnica, 58, 59
- Generación interna de la energía térmica en una pared plana con una fuente homogénea, 81
- Giedt, W. H., 277, 278
- Glicerina, propiedades de la, 433
- Goldstein, S., 194, 195
- Grashoff, número de, 220, 221
- Graetz, L., 270-272
- Gregg, J. L., 251, 252

- Griffith, P., 292, 293
- Gubareff, G. C., 335, 337
- Gunn, J. E., 154-157

H

- Hawkins, G. A., 3
- Helio, propiedades del, 438
- Hidrógeno líquido, propiedades del, 434
- Hidrógeno, propiedades del, 443
- Hirschfelder, J. O., 4, 5
- Hottel, H. C., 348-352, 356, 357, 365, 366, 386, 387
- Howarth, L., 194, 195
- Howell, J. R., 330, 331
- Hsu, S. T., 258-260, 293-295
- Hsu, Y. Y., 293-295
- Hull, H. L., 279-282

I

- Impulso, teorema del, 30, 31
- Intensidad
 - de un cuerpo negro, 311, 312
 - espectral, 311, 312
 - total, 311, 312
- Intensidad de la turbulencia, 204, 205
- Intercambiadores de calor, 395
 - clasificación, 396, 397
 - de coraza y tubo, 398
 - diferencia de temperatura media
 - logarítmica, 403, 404
 - discusión general, 395
 - efectividad, 412, 413
 - flujo cruzado, 397-399
 - número de unidades de transferencia (NUT), 412, 413
 - resistencias por ensuciamiento para, 424, 425
- Intercambiador de calor de doble tubo, 400, 401
- Irradiación, en el intercambio radiante, 362, 363

J

- Jackson, T. W., 248-250
- Jakob, M., 3, 254-256
- Janssen, J. F., 335-337
- Jenkins, R., 231, 232
- Junk, W. A., 7, 8

K

- Kantorovich, método de, para soluciones integrales, 106
- Kays, W. M., 194-195, 237-238, 240-241, 269, 283-284, 286-287, 397, 399, 412-413, 416,
- Kerosén, propiedades del, 433
- King, W. J., 258-260
- Kirchoff, ley de la radiación térmica, 328-329
- Klein, J. S., 269-272

L

- Lambert, ley de cosenos de, 312-313
- Langhaar, H. L., 213-215
- Laplace, ecuación de, 35-36, 41-42
- Larkin, B. K., 158-160
- Lenoir, J. N., 7-8
- Lightfoot, E. N., 4-5
- Líquidos, propiedades térmicas de los, 429
- London, A. L., 282-284, 412-413, 416
- Longitud de mezcla de Prandtl, 206-207
- Lorenz, L., 248-250
- Love, T. K., 350-352
- Luther, H. A., 68-69

M

- MacCracken, S. J., 66-68
- Materiales isotrópicos, 7-8
- McAdams, W. H., 258-259, 258-260, 263-264, 275-276, 278-279, 356-357
- Mercurio, propiedades del, 436
- Metales, propiedades de los, 427
- Módulo de Biot, 124
- Monocromática, radiación para un cuerpo negro, 316-317
- Monóxido de carbono, propiedades del, 444
- Mueller, A. C., 417-418, 424-425
- Mull, W., 254-256

N

- Navier-Stokes, ecuaciones de, 37-38
 - en forma incompresible, 37-38
- Newton, segunda ley del movimiento, 21-22
 - forma diferencial, 36-37
 - forma integral, 30-31
- Nikuradse, J., 207-208
- Nitrógeno, propiedades del, 440

Nodos,

- para la formulación de diferencia de ecuaciones diferenciales, 45-46
- Número de unidades de transferencia, enfoque al análisis del intercambiador de calor, 412-413
- Nusselt, número de, 217-218
 - en la región de entrada de un tubo circular, tabla de, 270, 272-273
- Nusselt, W., 295-296, 303-304, 412-413
- NUT, definición de, 416

O

- Ostrach, S., 248-250
- Owens, E. J., 6
- Oxígeno-líquido, propiedades del, 434
- Oxígeno, propiedades del, 441

P

- Pagnani, B., 254-256
- Patrón numérico explícito, 46-47
- Patrones numéricos implícitos, 47, 48
- Peaceman, D. W., 154-156
- Perfil de velocidad universal, 210-211
- Placa plana
 - capa límite hidrodinámica sobre, 181-183
 - capa límite térmica sobre, 221, 222
- Planck, ley de, 313, 314
- Pohlhausen, E., 224, 248-250
- Poisson, ecuación de, 35, 36, 41, 42, 47, 48
- Potencia de emisión,
 - del cuerpo negro, 312, 313
 - distribución con la longitud de onda, 317
 - distribución con la temperatura, 315
 - espectral direccional, 312, 313
 - espectral hemisférica, 312, 313
- Prandtl, analogía de, 232, 233
- Prandtl, L., 206, 207
- Prandtl, longitud de mezcla de, 206, 207, 225, 226
- Prandtl, número de, 217, 218
- Primera ley de la termodinámica, 21, 22
 - forma de mosaico, 24, 25
 - forma diferencial, 33, 34
 - forma integral, 29, 30
- Promedios ponderados, en patrones numéricos, 48, 49
- Propiedades,
 - de gases, tablas de, 438
 - de líquidos, tablas de, 429
 - de sólidos, tablas de, 427

Punto de estancamiento, anterior y posterior, 185

Q

Quemado, 291, 292

Quon, D., 158-160

R

Rachford, H. H. Jr. 154-156

Radiación, coeficiente de transferencia de calor por, 392, 393

Radiación, factores de vista de la, 341
tablas para, 349, 351

Radiación, intercambio de energía, analogía con red eléctrica, 359, 360, 366, 367

con medios participantes, 280

entre planos grises paralelos finitos, 365, 366

entre planos grises paralelos infinitos, 363, 364

entre superficies isotérmicas grises, 361, 362

entre superficies negras isotérmicas, 337

entre superficies negras y gases absorbentes, 388, 389, 391

soluciones numéricas, 373, 374

Radiación, propiedades de la, 331-333

Radiación, transferencia de calor por estudio general, 307

introducción a, 13, 14

Radiosidad, 362

Reciprocidad relación de, 344, 345
especial, 354, 355

Reflectividad, 307-310, 330, 331

espectral bidireccional, 330, 331

Reflexión difusa, 307-310

Reflexión especular, 307-310

Refractarias superficies, 360, 361

Reiher, H., 254-256

Resistencia, térmica, 12, 13

Resistencia térmica

en un cilindro hueco, 80, 81

en una esfera hueca, 80, 81

en una pared plana, 176, 177

tabla de, 80, 81

Reynolds analogía de, 231, 232

Reynolds esfuerzo de, 205, 206

Reynolds número de, 189-190

Reynolds, O., 231, 232

Ritz método de, para las soluciones integrales, 105

Rohsenow, W. J., 312, 313, 298-299, 300

Rugosidad

en tubería, 192

relativa, 190-191

S

Sarofim, A. F., 350-352

Saul'ev, K., 156, 157

Saul'ev solución gráfica de, 154-156

Schlichting, H., 194, 195, 248-250

Schmidt, E., 248-250

Schmidt Gráfica de, 150, 151

Schuh, H., 248-250

Sebou, R. A., 333-335

Sellers, J. R., 269-272

Seider, E. N., 269-272, 275, 276

Seider-Tate ecuación de,

en flujo laminar, 269-272

en flujo turbulento, 275, 276

Siegel, R., 330, 331

Sodio, propiedades del, 437

Soehnghe, E., 277, 278

Sólidos propiedades térmicas de los, 427

Solución gráfica de la conducción

bidimensional de estado estable, *ver*
graficación del flujo

Soluciones integrales, para la conducción

bidimensional de estado estable, 103,
104

Soluciones numéricas

con una fuente interna de calor, 114, 115
en la conducción estable bidimensional,

108

en la conducción transiente, 158-160

Sparrow, E. M., 252, 334

Stanton número de, 216, 217

Stefan-Boltzmann constante de, 14, 15, 317

Stewart, W. E., 4

Subcapa laminar, 184, 185

Superficies extendidas, 184, 185

soluciones para aletas rectas de sección
transversal constante, 87-89

Superficies reales,

efectos de la rugosidad superficial, 335

impurezas superficiales, 335-337

propiedades radiativas, 331, 332

variación de la emisión con la temperatura,
335

variación de la longitud de onda de la,
334-335

variación direccional de la radiación,
331-332

T

Tamaños de tuberías, 468
Tate, G. E., 269-272, 275, 276
Temperatura de razón de mezcla, 268, 269
Temperatura de película, 224, 226
Temperatura distribución de
 en aletas, 89, 90
 en tubos con flujo por la pared constante y
 con temperatura constante, 238, 239
Tensión superficial
 del agua, variación con la temperatura,
 515-517
Torberg, R. A., 335-337
Transferencia de calor por convección,
 introducción a, 11, 12
Transición,
 en capas límite, 181-183
 en el flujo de tubería, 190, 191
Transitoria, conducción *ver* conducción de
 estado inestable
Transmisividad, 307-310
Trent, D. S., 68, 69
Tribus, M., 269-272
Thodos, G., 6
Tuberías

flujo en, 189, 190
transferencia de calor en, 238, 239

U

Un séptimo, ley de potencias de, 210, 211

V

Vapor, propiedades del, 439
Viscosidad
 absoluta o dinámica, 184, 185
 cinemática, 184, 185
Viscosidad de turbulencia, 205
Von Kármán, 237, 238
Von Kármán, analogía de, 237, 238

W

Welty, J. R., 4, 5, 30, 31, 68, 69, 213-215,
 255, 256
Weibelt, J. A., 350-352
Westwater, J. W., 293-295
Wicks, C. E., 4, 5, 30, 31, 213-215
White, D. H., 251, 252
Wien, ley de desplazamiento de, 314-317
Wilkes, J. O., 68, 69
Wilson, R. E., 4, 30, 31, 213-215

SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA
CENTRO DE INFORMACION
D.C.I.T.
2017



CENTRO DE INFORMACION



OBRAS AFINES:

TERMODINÁMICA

Virgil Moring Faires

Brinda una exposición clara y precisa de los conceptos fundamentales de la termodinámica, la cual estudia los diversos fenómenos de la energía y las propiedades relacionadas con la materia; asimismo, la obra analiza especialmente las leyes de transformación de calor en otras formas de energía, y viceversa.

PROBLEMAS DE TERMODINÁMICA

Virgil Moring Faires, et al.

Mediante la presentación de problemas reales de ingeniería, esta obra tiene el propósito de hacer que el alumno comprenda y repase las diversas ideas relacionadas con el tema.

INTRODUCCIÓN A LA TERMODINÁMICA CLÁSICA Y ESTADÍSTICA

Richard E. Sonntag, et al.

Proporciona una excelente introducción tanto a la termodinámica clásica como a la estadística, señalando las relaciones existentes entre el aspecto microscópico de los fenómenos estudiados. Hace énfasis en las aplicaciones específicas de esta disciplina en los diversos campos profesionales.

FUNDAMENTOS DE TERMODINÁMICA

Gordon J. Van Wylen, et al.

Ofrece el material básico para el estudio de la termodinámica clásica, y proporciona una preparación adecuada para su aplicación a los distintos campos profesionales. Además constituye un apoyo para adentrarse a temas más avanzados, como aquéllos que tienen conexión con los materiales, fenómenos de superficie, plasmas y criogénica.

Esta obra se ha preparado para impartir la materia a los estudiantes de ingeniería a nivel de licenciatura. Abarca tanto los conceptos básicos transferencia de calor como las técnicas más recientes para el planteamiento y la solución de problemas. El material se desarrolla en forma lógica pasando del estudio de los fenómenos físicos a la solución de problemas por medio de los métodos numéricos, integrales y gráficos a igual que los analíticos tradicionales.

La obra se destaca como libro de texto por su excelente exposición de los fundamentos del análisis numérico que se utilizan para resolver los problemas de la transferencia de calor. Este libro se complementa con varios ejemplos interesantes de soluciones numéricas totalmente desarrolladas y con el análisis de los resultados. Además, al final del libro hay un apéndice que proporciona datos sobre las propiedades y el comportamiento físico de las sustancias más comunes.

ÁREA: ING. MECÁNICA

ISBN 968-18-0628-X



9 789681 806286